



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

11 КЛАСС. Вариант 1



1. [4 балла] Натуральные числа a, b, c таковы, что ab делится на $2^9 3^{10} 5^{10}$, bc делится на $2^{14} 3^{13} 5^{13}$, ac делится на $2^{19} 3^{18} 5^{30}$. Найдите наименьшее возможное значение произведения abc .
2. [5 баллов] Дан прямоугольный треугольник ABC . Окружность, касающаяся прямой BC в точке B , пересекает высоту CD , проведённую к гипотенузе, в точке F , а катет AC – в точке E . Известно, что $AB \parallel EF$, $AD : DB = 3 : 1$. Найдите отношение площади треугольника ABC к площади треугольника CEF .
3. [4 балла] Решите уравнение $5 \arcsin(\cos x) = x + \frac{\pi}{2}$.
4. [5 баллов] Найдите все значения параметра a , для каждого из которых найдётся значение параметра b , при котором система уравнений

$$\begin{cases} ax + 2y - 3b = 0, \\ (x^2 + y^2 - 9)(x^2 + y^2 - 12x + 32) = 0 \end{cases}$$

имеет ровно 4 решения.

5. [5 баллов] Некоторые числа x и y удовлетворяют равенствам

$$\log_3^4 x + 6 \log_x 3 = \log_{x^2} 243 - 8 \quad \text{и} \quad \log_3^4(5y) + 2 \log_{5y} 3 = \log_{25y^2} (3^{11}) - 8.$$

Найдите все возможные значения произведения xy .

6. [5 баллов] На координатной плоскости дан параллелограмм с вершинами в точках $O(0; 0)$, $P(-14; 42)$, $Q(6; 42)$ и $R(20; 0)$. Найдите количество пар точек $A(x_1; y_1)$ и $B(x_2; y_2)$ с целыми координатами, лежащих в этом параллелограмме (возможно, на границе) и таких, что $3x_2 - 3x_1 + y_2 - y_1 = 33$.
7. [6 баллов] Дана треугольная пирамида $SABC$, медианы AA_1 , BB_1 и CC_1 треугольника ABC пересекаются в точке M . Сфера Ω касается ребра AS в точке L и касается плоскости основания пирамиды в точке K , лежащей на отрезке AM . Сфера Ω пересекает отрезок SM в точках P и Q . Известно, что $SP = MQ$, площадь треугольника ABC равна 90, $SA = BC = 12$.
 - а) Найдите произведение длин медиан AA_1 , BB_1 и CC_1 .
 - б) Найдите двугранный угол при ребре BC пирамиды, если дополнительно известно, что Ω касается грани BCS в точке N , $SN = 4$, а радиус сферы Ω равен 5.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☒	☐	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

N 1 $a, b, c \in \mathbb{N}$

$$ab : 2^9 \cdot 3^{10} \cdot 5^{10}$$

$$bc : 2^{14} \cdot 3^{13} \cdot 5^{13}$$

$$ca : 2^{19} \cdot 3^{18} \cdot 5^{30}$$

$$\Rightarrow (abc)^2 : 2^{7+14+19} \cdot 3^{10+13+18} \cdot 5^{10+13+30}$$

$$(abc)^2 : 2^{42} \cdot 3^{41} \cdot 5^{53}$$

⊗ Для $x, p, l \in \mathbb{N}$, если $x^2 = p^l$, то

$$x = p^{\left[\frac{l}{2}\right]}$$

иначе если $l = 2n+1$,

~~то $x = p^{\frac{l-1}{2}}$, то $x^2 = p^{l-1}$ и $\deg_p(x^2) \leq 2n < 2n+1$~~

$$\Rightarrow abc : 2^{\left[\frac{42}{2}\right]} \cdot 3^{\left[\frac{41}{2}\right]} \cdot 5^{\left[\frac{53}{2}\right]} = 2^{21} \cdot 3^{21} \cdot 5^{27}$$

Заметим, что $ac : 5^{30} \Rightarrow abc : 5^{30}$

$$\Rightarrow abc : 2^{27} \cdot 3^{27} \cdot 5^{30} \Rightarrow abc \geq 2^{27} \cdot 3^{27} \cdot 5^{30}$$

Тогда пусть $a = 2^4 \cdot 3^8 \cdot 5^{75}$

$$b = 2^2 \cdot 3^3 \cdot 5^0$$

$$c = 2^{12} \cdot 3^{10} \cdot 5^{15}$$

$$a \cdot b \cdot c = 2^{27} \cdot 3^{27} \cdot 5^{30}$$

Ответ: $abc \geq 2^{27} \cdot 3^{27} \cdot 5^{30}$

⊗ Здесь $\left[\frac{l}{2}\right]$ - округление вверх до целого
 $\deg_p(x)$ - степень вхождения числа p в x
 $n \in \mathbb{N}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

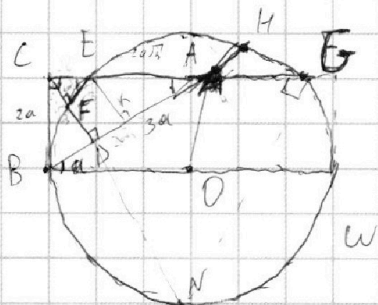
1	2	3	4	5	6	7
☐	☒	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

N 2

Пусть W - данная окружность
CD проведена к гипотенузе
 $\Rightarrow AB$ - гипотенуза



Дано:

$$AB \parallel EF$$

$$\frac{AD}{DB} = \frac{3}{1}$$

$$\frac{S_{ABC}}{S_{CEF}} = ?$$

OB перпендикулярна BC в $B \Rightarrow OB \perp BC$

(O - центр окружности W)

$$1) \frac{AD}{DB} = \frac{3}{1} \Rightarrow \text{Пусть } BD = a; \text{ тогда } AD = 3a$$

$$2) \angle ACB = 90^\circ \Rightarrow CD^2 = BD \cdot AD = a \cdot 3a$$

$$CD = a\sqrt{3}$$

$$3) \text{ в } \triangle ACD: \angle ADC = 90^\circ \Rightarrow \text{гипотенуза: } AC = \sqrt{CD^2 + AD^2} = 2a\sqrt{3}$$

$$4) \text{ аналогично в } \triangle BCD: BC = \sqrt{BD^2 + CD^2} = 2a$$

5) заметим, что в $\triangle ABC$ гипотенуза $AB = 4a$

$$\text{катет } BC = 2a$$

$$\Rightarrow \angle BAC = 30^\circ \Rightarrow \angle ABC = 60^\circ$$

$$6) S_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot AC \cdot BC = \frac{1}{2} \cdot 2a\sqrt{3} \cdot 2a = 2a^2\sqrt{3}$$

$$4) OB \perp BC \Rightarrow \angle OBC = 90^\circ; \angle ABC = 60^\circ \Rightarrow \angle ABO = \angle OBC - \angle ABC = 30^\circ$$

$$\text{Тогда } \angle BAC = \angle ABO = 30^\circ \Rightarrow AC \parallel BO$$

8) Продлим CA до повторного пересечения с окружностью, получим G

BA до пересечения с окружностью получим H

9) $EF \parallel BA \Rightarrow EF \parallel BH$; B, F, E, H лежат на одной окружности

$\Rightarrow BFEH$ - равнобедренная трапеция

$\Rightarrow$ если опустить высоту $EK \perp BH$, то $KH = BD = a$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☒	☐	☐	☐	☐	☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

N 2

10) $CB^2 = CE \cdot CG = (2a)^2 = 4a^2$ (по теореме косинусов $\angle OAK = 90^\circ$)

$EA \cdot AG = BA \cdot AH$ (пересекающиеся хорды)

11) $EF \parallel AB \Rightarrow EF \parallel AD \Rightarrow \triangle CEF \sim \triangle CAD$

12) $EF \parallel AD \Rightarrow \angle CEF = \angle CAB = 30^\circ$
 $\angle CFE = \angle CDA = 90^\circ \Rightarrow \frac{CF}{CE} = \frac{1}{2} \Rightarrow CF = \frac{1}{2} CE$

13) Проведем CD до пересечения с ω - полуокружностью N

Тогда $CN \cdot CF = CE \cdot CG$

~~$CE \cdot CN = CE \cdot CG$~~

$\frac{1}{2} CE \cdot CN = CE \cdot CG$

$\frac{1}{2} CN = CG$

14) в $\triangle CNG$: $\angle NCG = 60^\circ$

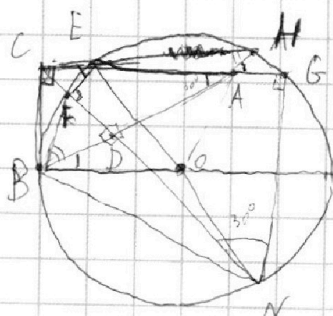
$CN = 2 \cdot CG \Rightarrow NG^2 = CG^2 + CN^2 - 2 \cos 60^\circ \cdot CG \cdot CN$

$NG^2 = CG^2 + 4CG^2 - 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot CG \cdot 2 \cdot CG =$
 $= 5CG^2 - 2CG^2 = 3CG^2$

$\Rightarrow CN^2 = 4CG^2 = CG^2 + NG^2 \Rightarrow \angle CGN = 90^\circ$

$\angle EGN$

EN - диаметр ω



15) $S_{CEF} = \frac{1}{2} \cdot CF \cdot FE$

Тогда $CF = b$; Тогда $CE = 2b$

$FE = b\sqrt{3}$

$S_{CEF} = \frac{1}{2} \cdot b \cdot b\sqrt{3} = \frac{b^2 \sqrt{3}}{2}$

Тогда $\frac{S_{ABC}}{S_{CEF}} = \frac{2a^2 \sqrt{3}}{\frac{b^2 \sqrt{3}}{2}} = 4 \cdot \frac{a^2}{b^2} = \left(\frac{2a}{b}\right)^2 = X^2$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☒	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



N 2

$$16) CE \cdot CG = 4a^2 \quad (из 10))$$

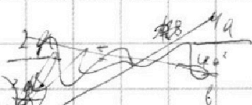
$$26) CG = 4a^2$$

$$CG = \frac{2a^2}{b} \quad ; \quad CN = 2 \cdot CG = \frac{4a^2}{b}$$

$$14) \triangle ABC \sim \triangle CNG \Rightarrow \frac{BC}{CG} = \frac{AB}{CN} = \frac{\frac{2a}{\frac{2a^2}{b}}}{\frac{4a^2}{b}} = \frac{b}{a}$$

$$\frac{S_{ABC}}{S_{CNG}} = \frac{b^2}{a^2} = \left(\frac{b}{a}\right)^2 = \left(\frac{2}{x}\right)^2$$

$$\frac{S_{CEF}}{S_{CNG}} = \frac{\frac{S_{CEF}}{S_{ABC}}}{\frac{S_{CNG}}{S_{ABC}}} = \frac{\frac{1}{x^2}}{\frac{x^2}{4}} = \frac{4}{x^4} = \left(\frac{2}{x^2}\right)^2 \Rightarrow \frac{CN}{CE} = \frac{x^2}{2}$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☒	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

N3

$$5 \arcsin(\cos x) = x + \frac{\pi}{2}$$

~~$\arcsin(\cos x) \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$~~

$$\arcsin(t) \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$$

$$\Rightarrow 5 \arcsin(t) \in [-\frac{5}{2}\pi, \frac{5}{2}\pi]$$

~~$\arcsin(\cos x) =$~~

$$\Rightarrow x + \frac{\pi}{2} \in [-\frac{5}{2}\pi, \frac{5}{2}\pi]$$

$$x \in [-3\pi, \pi]$$

$$\arcsin(\cos x) = \begin{cases} \frac{\pi}{2} - x, & \text{если } x \in [0, \pi] \end{cases} \quad (1)$$

$$\begin{cases} \frac{\pi}{2} + x, & \text{если } x \in [-\pi, 0] \end{cases} \quad (2)$$

$$\begin{cases} \frac{\pi}{2} - (x + 2\pi), & \text{если } x \in [-2\pi, -\pi] \end{cases} \quad (3)$$

$$\begin{cases} \frac{\pi}{2} + (x + 2\pi), & \text{если } x \in [-3\pi, -2\pi] \end{cases} \quad (4)$$

Итак следует из того, что $\arcsin(t) \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ и из (1))

(1) $x \in [0, \pi]$

$$5 \cdot (\frac{\pi}{2} - x) = x + \frac{\pi}{2}$$

$$4 \cdot \frac{\pi}{2} - 5x = x + \frac{\pi}{2} \Rightarrow 4\pi - 5x = x + \frac{\pi}{2}$$

$$\frac{5}{2}\pi - 5x = x + \frac{\pi}{2} \Rightarrow \frac{4}{2}\pi = 6x \Rightarrow x = \frac{4}{12}\pi = \frac{\pi}{3}$$

(2) $x \in [-\pi, 0]$

$$5 \cdot (\frac{\pi}{2} + x) = x + \frac{\pi}{2}$$

$$\frac{5}{2}\pi + 5x = x + \frac{\pi}{2}$$

$$\frac{4}{2}\pi = -4x \Rightarrow x = -\frac{\pi}{2}$$

Ответ:

$$\begin{aligned} x &= \frac{\pi}{3} \\ x &= -\frac{\pi}{2} \\ x &= -\frac{4}{3}\pi \\ x &= -3\pi \end{aligned}$$

(3) $x \in [-2\pi, -\pi]$

$$5 \cdot (\frac{\pi}{2} - 2\pi - x) = x + \frac{\pi}{2}$$

$$5 \cdot (-\frac{3}{2}\pi) - 5x = x + \frac{\pi}{2}$$

$$-\frac{15}{2}\pi - \frac{\pi}{2} = 6x$$

$$-\frac{16}{2}\pi = 6x \Rightarrow x = -\frac{16}{12}\pi = -\frac{4}{3}\pi$$

(4) $x \in [-3\pi, -2\pi]$

$$5 \cdot (\frac{\pi}{2} + 2\pi + x) = x + \frac{\pi}{2}$$

$$5 \cdot \frac{5}{2}\pi + 5x = x + \frac{\pi}{2}$$

$$\frac{25}{2}\pi - \frac{\pi}{2} = -4x$$

$$-4x = \frac{24}{2}\pi \Rightarrow x = -3\pi$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☒	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

пч стр. 1
все $a \mid \exists b$, система имеет ровно 4 р-м.

$$\begin{cases} ax + 2y - 3b = 0 \end{cases} \quad (1)$$

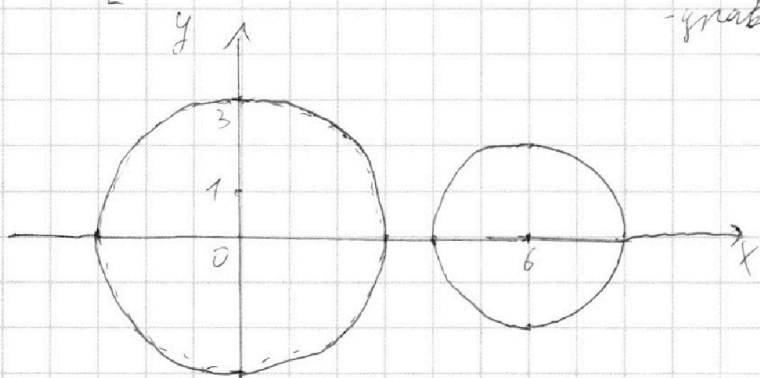
$$\begin{cases} (x^2 + y^2 - 9)(x^2 + y^2 - 12x + 32) = 0 \end{cases} \quad (2)$$

(2): произведение = 0 $\Leftrightarrow$ хотя бы 1 из
множителей равен 0

$$\Rightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 - 9 = 0 \\ x^2 + y^2 - 12x + 32 = 0 \\ x^2 + y^2 = 3^2 \\ (x^2 - 12x + 36) + y^2 = 2^2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 = 3^2 \\ (x-6)^2 + y^2 = 2^2 \end{cases}$$

- уравнения двух окружностей



окружности не пересекаются, т.к. в первом уравнении $|x| \leq 3$

во втором

$$\begin{aligned} &\Rightarrow -3 \leq x \leq 3 \\ &\|x-6| \leq 2 \\ &-2 \leq x-6 \leq 2 \\ &4 \leq x \leq 8 \end{aligned}$$

уравнение (1) - это прямая

если $a=0$: $0x + 2y - 3b = 0$

$$y = \frac{3}{2}b$$

очевидно, что

$\rightarrow$ горизонтальная прямая

система 4 решения при $b=0$

$\Rightarrow$ ~~не~~ $a \neq 0$ доказано

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☒	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

2) ^{№ 4 стр. 2} $a \neq 0$:

$$ax + 2y - 3b = 0$$

$$2y = -ax + 3b$$

$$y = -\frac{a}{2}x + \frac{3}{2}b \rightarrow \text{прямая}$$

коэфф. $\frac{3}{2}b$ позволяет || перенести на левую часть ~~прямую~~

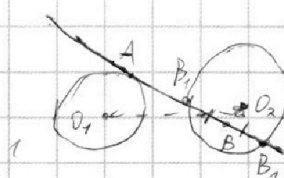
Тогда для ~~каждого~~ $a_0 \neq 0; b_0$.

лемма: если прямая $y = -\frac{a_0}{2}x + \frac{3}{2}b_0$ пересекает окружность хотя бы по трём точкам, то найдётся b_1 такая, что прямая $y = -\frac{a_0}{2}x + \frac{3}{2}b_1$ пересекает окружность по 4 точкам

Δ Док-во: если точек пересеч. хотя бы 4, то $b_1 = b_0$.

если их ровно 3: прямая и окружность имеют не более 2 общих точек

⇒ такая прямая касается одной окружности и пересекает по 2 точки другую:



O_1, O_2 - линия центров;

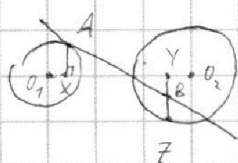
A - точка касания окр. 1 и прам.

B_1, B_2 - точки пересеч. окр. 2 и прам.

Тогда пусть B - середина B_1B_2

опустим перпендикуляр из A на O_1O_2 ; (X)

из B на O_1O_2 (Y) и продолжим его до точки B2 до пересечения с окр. 2 (Z)



пусть Δb - длина наименьшего из отрезков AX, BY, BZ

Тогда для $b_1 = b_0 + \frac{1}{10}\Delta b$

или $b_1 = b_0 - \frac{1}{10}\Delta b$

прямая сместится вверх или вниз на $\frac{3}{20}\Delta b < \Delta b$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☒	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

№ 4 стр. 3

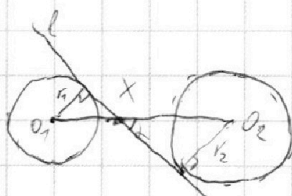
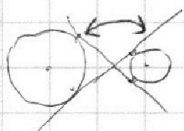
Зам-ба даны (продолжение): при сдвиге
прямой на $\pm \frac{3}{20} \Delta b$ пересечение прямой и окр. 2
все еще 2 точки; пересек. с O_1 — либо 2, либо
~~одна~~ (или 1 или 0 точек на $-\frac{3}{20} \Delta b$,
или на $+\frac{3}{20} \Delta b$)
тогда пересек. прямой $-\frac{3}{2} + \frac{3}{2} \Delta b = 2$ точки

$\Rightarrow$ всего 4 точки пересек. $\Rightarrow$ ~~существует~~ ^{существует} исключение в

$\Rightarrow$ Подходят все точки O , что при касании с
одной окружностью прямая пересекает другую

$\Rightarrow$ Не подходят те, у которых $\angle$ ^{касания} либо совпадает
с одной из внутр. касательных, либо лежит между
ними:

Где внешние касательные
действуют по алгоритму, описы-
ваемому в листе:



l — прямая
 O_1, O_2 — центры окруж.
 r_1, r_2 — радиусы соотв. окруж.
 $X = l \cap O_1 O_2$

Если l — угол наклона, то $O_1 X \cdot \sin \alpha = r_1$
 $O_2 X \cdot \sin \alpha = r_2$
 $\Rightarrow (O_1 X + O_2 X) \cdot \sin \alpha = r_1 + r_2$
 $O_1 O_2 \cdot \sin \alpha = r_1 + r_2$
 $\sin \alpha = \frac{r_1 + r_2}{O_1 O_2}$ (с точностью до знака)

Тогда подставляя числа: $\sin \alpha = \frac{3+2}{6} = \frac{5}{6}$
 $\cos \alpha = \sqrt{1 - \sin^2 \alpha} = \sqrt{1 - \frac{25}{36}} = \sqrt{\frac{11}{36}} = \frac{\sqrt{11}}{6} \Rightarrow \tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \frac{5}{\sqrt{11}}$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☒	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

N 4 стр. 4

$$\operatorname{tg} \alpha_1 = \frac{5}{\sqrt{11}}; \quad \operatorname{tg} \alpha_2 = -\frac{5}{\sqrt{11}}$$

$$\Rightarrow \text{"непересекающиеся"} \quad -\frac{\alpha}{2} \in \left[\frac{5}{\sqrt{11}}; +\infty \right) \cup \left(-\infty; -\frac{5}{\sqrt{11}} \right]$$

$$\text{тогда} \quad \alpha \in \left(-\infty; -\frac{10}{\sqrt{11}} \right] \cup \left[\frac{10}{\sqrt{11}}; +\infty \right)$$

$$4) \text{ Ответ: } \alpha \in \left(-\frac{10}{\sqrt{11}}; \frac{10}{\sqrt{11}} \right)$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☒	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



N5

Ответ: $\frac{1}{5}$

$$\log_3^4 x + 6 \log_x 3 = \log_x 243 - 8$$

$$\log_3^4 (5y) + 2 \log_{5y} 3 = \log_{25y^2} (3^{11}) - 8$$

$$O.A.3: x > 0; x \neq 1$$

$$y > 0; y \neq \frac{1}{5}$$

Заменим: $\log_3 x = a; a \neq 0$

$\log_3 5y = b; b \neq 0$

$$\begin{cases} a^4 + \frac{6}{a} = \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot \log_x 3 - 8 = \frac{5}{2a} - 8 & (1) \end{cases}$$

$$\begin{cases} b^4 + \frac{2}{b} = \frac{1}{2} \cdot 11 \cdot \log_{5y} 3 - 8 = \frac{11}{2b} - 8 & (2) \end{cases}$$

$$\log_3 x + \log_3 5y = \log_3 5yx = a+b$$

$$5xy = 3^{a+b}$$

$$xy = \frac{3^{a+b}}{5}$$

$\Rightarrow$ все возможные xy заданы возможными $(a+b)$

$$(1) - (2): a^4 - b^4 + \frac{6}{a} - \frac{2}{b} = \frac{5}{2a} - \frac{11}{2b}$$

$$(a^2+b^2)(a+b)(a-b) + \frac{6b-2a}{ab} = \frac{5b-11a}{2ab}$$

$$a^4 - b^4 = \frac{5b-11a}{2ab} - \frac{6b-2a}{2ab} = \frac{-4a-4b}{2ab} \Rightarrow a^4 - b^4 = \frac{-4}{2a} - \frac{4}{2b}$$

$$a^4 - b^4 = \frac{5b-11a-6b+2a}{2ab} = \frac{-4a-4b}{2ab}$$

$$(a^2+b^2)(a+b)(a-b) = -\frac{4}{2ab}(a+b)$$

$$(a+b) \left((a^2+b^2)(a-b) + \frac{4}{2ab} \right) = 0 \Rightarrow$$

$$\begin{cases} a+b=0 \Rightarrow xy = \frac{3^0}{5} = \frac{1}{5} \\ (a^2+b^2)(a-b) + \frac{4}{2ab} = 0 \end{cases}$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☒	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{cases} a^4 + b^4 + \frac{6}{a} + \frac{2}{b} = \frac{5}{2a} + \frac{11}{2b} - 16 \\ a^5 + b^5 = \frac{5}{2} - 8a \\ b^5 + 2 = \frac{11}{2} - 8b \end{cases}$$

$$a^4 + b^4 + \frac{12}{2a} - \frac{5}{2a} + \frac{4}{2b} - \frac{11}{2b} + 16 = 0$$

$$a^4 + b^4 + \frac{4}{2a} - \frac{4}{2b} + 16 = 0$$

$$a^4 - b^4 + \frac{4}{2a} + \frac{7}{2b} = 0$$

$$\Rightarrow 2a^4 + \frac{4}{a} + 16 = 0$$

$$\begin{cases} a^4 + \frac{4}{2a} + 8 = 0 \end{cases} \Rightarrow b^4 - \frac{4}{2b} = 0$$

$$\begin{cases} b^4 - \frac{4}{2b} + 8 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2a^5 + 4 + 16a = 0 \\ 2b^5 - 4 + 16b = 0 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} &\Rightarrow b^4 - \frac{4}{2b} = 0 \\ &b^4 = \frac{4}{2b} \\ &2b^5 = 4 \Rightarrow b^5 = \frac{4}{2} \Rightarrow b = \sqrt[5]{\frac{4}{2}} \end{aligned}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

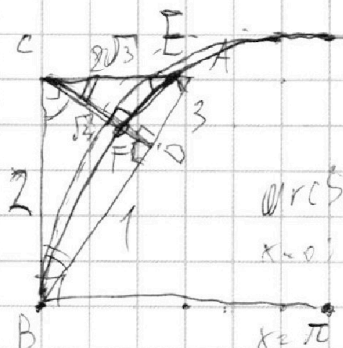
1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

N 2

Черновик



$$\arcsin(\varphi) \in [0; \pi/2]$$

$$\arcsin(\varphi) \in [0; \pi/2] \Rightarrow x + \frac{\pi}{2} \in [0; 5\pi/2]$$

$$x = \frac{\pi}{6} \quad \frac{\pi}{6} = \frac{3}{6}$$

$$\cos \frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2} \quad \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{3\sqrt{3}}{6} = \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{6}$$

$$\arcsin \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\pi}{6}$$

$$x = -\pi \quad \arcsin(\cos(-\pi)) = \arcsin(-1) = -\frac{\pi}{2} = -\pi + \frac{\pi}{2}$$

$$\arcsin(\cos x) = \frac{x}{5} + \frac{\pi}{10}$$

$$\arcsin(\cos x) = x + \frac{\pi}{2}$$

$$\cos x = \pm \sqrt{1 - \sin^2 x}$$

$$x^2 + y^2 - 12x + 32 = 0$$

$$x^2 - 12x + 36 + y^2 = 4$$

$$(x-6)^2 + y^2 = 2^2$$

$$\sin(2+\pi) = \sin 2 \cos \pi + \sin \pi \cos 2$$

$$\sin(0 + \frac{\pi}{2}) = \sin 0 \cdot \cos \frac{\pi}{2} + \sin \frac{\pi}{2} \cdot \cos 0 = 1$$

$$\sin \frac{\pi}{2} = 1$$

$$\sin(\frac{x}{5} + \frac{\pi}{10}) = \sin \frac{x}{5} \cdot \cos \frac{\pi}{10} + \sin \frac{\pi}{10} \cos \frac{x}{5}$$

$$\arcsin(\cos x) = \varphi$$

$$\sin(\arcsin(\cos x)) = \sin \varphi$$

$$\cos x = \sin \varphi$$

$$\cos x = \sin(\frac{\pi}{2} - x) \Rightarrow \sin(\frac{\pi}{2} - x) = \sin \varphi$$

$$\frac{\pi}{2} - x = \varphi$$

$$\arcsin(\cos x) = \frac{\pi}{2} - x$$

$$5(\frac{\pi}{2} - x) = x + \frac{\pi}{2}$$

$$\frac{5}{2}\pi - 5x = x + \frac{\pi}{2} \Rightarrow 2\pi = 6x \Rightarrow x = \frac{2\pi}{3}$$

