



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

11 КЛАСС. Вариант 4



1. [4 балла] Натуральные числа a, b, c таковы, что ab делится на $2^6 3^{13} 5^{11}$, bc делится на $2^{14} 3^{21} 5^{13}$, ac делится на $2^{16} 3^{25} 5^{28}$. Найдите наименьшее возможное значение произведения abc .
2. [5 баллов] Дан прямоугольный треугольник ABC . Окружность, касающаяся прямой AC в точке A , пересекает высоту CD , проведённую к гипотенузе, в точке E , а катет BC – в точке F . Известно, что $AB \parallel EF$, $AB : BD = 1,4$. Найдите отношение площади треугольника ACD к площади треугольника CEF .

3. [4 балла] Решите уравнение $10 \arccos(\sin x) = 9\pi - 2x$.

4. [5 баллов] Найдите все значения параметра a , для каждого из которых найдётся значение параметра b , при котором система уравнений

$$\begin{cases} 5x + 6ay - b = 0, \\ (x^2 + y^2 - 25)(x^2 + y^2 + 18y + 77) = 0 \end{cases}$$

имеет ровно 4 решения.

5. [5 баллов] Некоторые числа x и y удовлетворяют равенствам

$$\log_4^4 x - 6 \log_4 11 = \log_{\frac{1}{4}} \frac{1}{11} - 5, \quad \text{и} \quad \log_{11}^4(0,5y) + \log_{0,5y} 11 = \log_{0,125y^3} (11^{-13}) - 5.$$

Найдите все возможные значения произведения xy .

6. [5 баллов] На координатной плоскости дан параллелограмм с вершинами в точках $O(0;0)$, $P(-15;90)$, $Q(2;90)$ и $R(17;0)$. Найдите количество пар точек $A(x_1; y_1)$ и $B(x_2; y_2)$ с целыми координатами, лежащих в этом параллелограмме (возможно, на границе) и таких, что $6x_2 - 6x_1 + y_2 - y_1 = 48$.
7. [6 баллов] Дана треугольная пирамида $SABC$, медианы AA_1 , BB_1 и CC_1 треугольника ABC пересекаются в точке M . Сфера Ω касается ребра AS в точке L и касается плоскости основания пирамиды в точке K , лежащей на отрезке AM . Сфера Ω пересекает отрезок SM в точках P и Q . Известно, что $SP = MQ$, площадь треугольника ABC равна 180, $SA = BC = 20$.
- а) Найдите произведение длин медиан AA_1 , BB_1 и CC_1 .
- б) Найдите двугранный угол при ребре BC пирамиды, если дополнительно известно, что Ω касается грани BCS в точке N , $SN = 6$, а радиус сферы Ω равен 8.

1	2	3	4	5	6	7
☒	☐	☐	☐	☐	☐	☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

№1

Решение:

1) Пусть $a:2^x, b:2^y, c:2^z$, где

$x, y, z \in \mathbb{Z}$ и $x, y, z \geq 0$;

2) п.к. $(ab):2^6$, но $2^x \cdot 2^y \geq 2^6$, т.е.

$x+y \geq 6$, аналогично $y+z \geq 14$, $x+z \geq 16$, сложив
эти три неравенства,

получим $2 \cdot (x+y+z) \geq 6+14+16=36$, $(x+y+z) \geq 18$,

но $2^x \cdot 2^y \cdot 2^z \geq 2^{18}$

получим $(a \cdot b \cdot c):2^{18}$;
все три неравенства выполняются, например при $x=9, y=9, z=0$;

3) Аналогично для числа 3 $a:3^{x_1}, b:3^{y_1}, c:3^{z_1}$,
 $x_1, y_1, z_1 \in \mathbb{Z}$, $x_1, y_1, z_1 \geq 0$; $x_1+y_1 \geq 13$, $y_1+z_1 \geq 25$,
получим $x_1+y_1+z_1 \geq \frac{13+21+25}{2} = \frac{34+25}{2} = \frac{59}{2} = 29,5$;

получим $x_1+y_1+z_1 \geq 30$, значит $(a \cdot b \cdot c):3^{30}$;

4) Аналогично для числа 5, $a:5^{x_2}, b:5^{y_2}, c:5^{z_2}$,

$x_2, y_2, z_2 \in \mathbb{Z}$, $x_2, y_2, z_2 \geq 0$, получим

$x_2+y_2+z_2 \geq \frac{11+13+28}{2} = \frac{24+28}{2} = \frac{52}{2} = 26$, получим

~~$(a \cdot b \cdot c):5^{26}$~~

5) Значит $a \cdot b \cdot c \geq 2^{18} \cdot 3^{30} \cdot 5^{26}$ (т.к. 2, 3, 5 — простые

числа); ~~повторно выполняются~~ например при

~~$a=5$~~ 5) мы знаем, что $x_1+y_1 \geq 13$, $y_1+z_1 \geq 21$,

$x_1+z_1 \geq 25$, получим при $x_1=9, y_1=4$ и $z_1=17$, все

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☒	☐	☐	☐	☐	☐	☐



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

при неравенства будут выполнены; при этом
 $x_1 + y_1 + z_1 = 30$;

6) Мы знаем, что $x_2 + y_2 \geq 11$, $y_2 + z_2 \geq 13$, $x_2 + z_2 \geq 28$,
 тогда, так как $y_2 \geq 0$, то $x_2 + y_2 + z_2 \geq 28$;

при $x_2 = 14$, $y_2 = 0$, $z_2 = 14$, все

при неравенства будут выполнены, при этом

$x_2 + y_2 + z_2 = 28$; и

7) Тогда $a \cdot b \cdot c \geq 2^{18} \cdot 3^{30} \cdot 5^{28}$;

8) Если $a = 2^4 \cdot 3^9 \cdot 5^{14}$, $b = 2^2 \cdot 3^4$, $c = 2^{12} \cdot 3^{17} \cdot 5^{14}$,

то $a \cdot b \cdot c = 2^{18} \cdot 3^{30} \cdot 5^{28}$ и

$a \cdot b = 2^6 \cdot 3^{13} \cdot 5^{14}$; $(2^6 \cdot 3^{13} \cdot 5^{14})$; $b \cdot c = 2^{14} \cdot 3^{21} \cdot 5^{14}$; $(2^{14} \cdot 3^{21} \cdot 5^{14})$;

~~$a \cdot c = 2^{16} \cdot 3^{26} \cdot 5^{28}$; $(2^{16} \cdot 3^{26} \cdot 5^{28})$~~

$a \cdot c = 2^{16} \cdot 3^{26} \cdot 5^{28}$; $(2^{16} \cdot 3^{26} \cdot 5^{28})$;

Ответ $2^{18} \cdot 3^{30} \cdot 5^{28}$

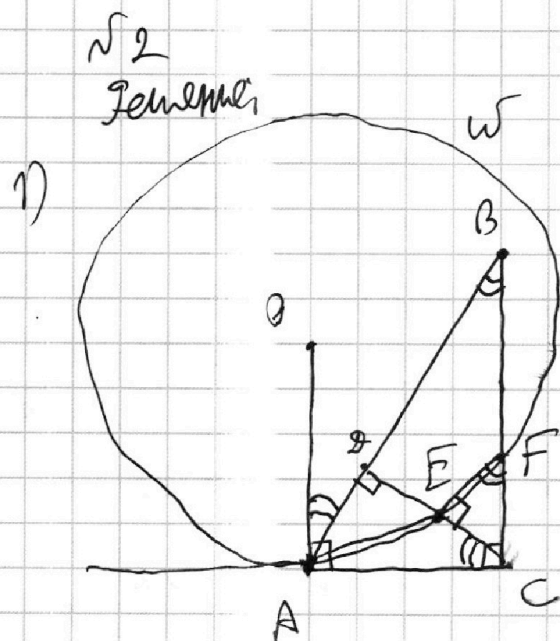
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☒	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



2) $AO : OB = 2 : 5$; пусть $AO = 2 \cdot x$, где $x > 0$,
тогда $OB = 5 \cdot x$; $OC = \sqrt{AO \cdot OB} = \sqrt{5 \cdot x \cdot 2 \cdot x} = \sqrt{10} \cdot x$;

$$AC = \sqrt{AO^2 + CO^2} = \sqrt{(2x)^2 + (\sqrt{10}x)^2} = \sqrt{14} \cdot x$$

$$BC = \sqrt{35} \cdot x$$

3) Если $B \in \omega$, то $CF \cdot CB = CA^2$;

$$CF \cdot CB = 14x^2; \text{ пусть } CF = \frac{14x^2}{BC} = \frac{14x^2}{\sqrt{35}x} =$$

$$= \frac{7 \cdot 2 \cdot x}{\sqrt{7} \cdot \sqrt{5}} = \frac{2\sqrt{35} \cdot x}{5}; \text{ тогда, так как } \triangle AOC \sim \triangle CEF,$$

$$\text{то } \frac{S_{\triangle AOC}}{S_{\triangle CEF}} = \left(\frac{AC}{CF} \right)^2 = \left(\frac{\sqrt{14} \cdot x}{\frac{2\sqrt{35} \cdot x}{5}} \right)^2 =$$

$$= \left(\frac{\sqrt{2} \cdot 5}{2\sqrt{5}} \right)^2 = \left(\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{2}} \right)^2 = \frac{5}{2};$$

Ответ: $\frac{5}{2}$

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☒	☐	☐	☐	☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

№3 Решение:

$$1) \quad 10 \cdot \arccos(\sin x) = 9\pi - 2x;$$

Пусть $\arccos(\sin x) = L$, где $L \in [0, \pi]$, тогда
 $\cos L = \sin x$; и $10 \cdot L = 9\pi - 2x$, $L = \frac{9\pi - 2x}{10}$;

значит $\begin{cases} \cos\left(\frac{9\pi - 2x}{10}\right) = \sin x, \text{ н.о.} \\ 0 \leq L \leq \pi \end{cases}$

$$\begin{cases} \sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{9\pi}{10} + \frac{2x}{10}\right) = \sin x; \\ 0 \leq \frac{9\pi - 2x}{10} \leq \pi \end{cases}; \quad \begin{cases} \sin\left(\frac{x - 2\pi}{5}\right) = \sin x; \\ -9\pi \leq -2x \leq \pi \end{cases}$$

$$\begin{cases} \sin\left(\frac{x - 2\pi}{5}\right) = \sin x; \\ -\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{9\pi}{2} \end{cases}; \quad \begin{cases} \frac{x - 2\pi}{5} = x + 2\pi h, h \in \mathbb{Z} \\ \frac{x - 2\pi}{5} = \pi - x + 2\pi h, h \in \mathbb{Z} \\ -\frac{\pi}{2} \leq x \leq 4,5 \cdot \pi \end{cases}$$

$$\begin{cases} 4x = -2\pi + 10\pi h, h \in \mathbb{Z} \\ 6x = 7\pi + 10\pi h, h \in \mathbb{Z}; \\ -\frac{\pi}{2} \leq x \leq 4,5\pi \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = \frac{5\pi h - \pi}{2}, h \in \mathbb{Z} \quad (1) \\ x = \frac{7\pi + 10\pi h}{6}, h \in \mathbb{Z} \\ -\frac{\pi}{2} \leq x \leq 4,5 \cdot \pi \end{cases}$$

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☒	☐	☐	☐	☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$(1) \quad x = \frac{5\pi h - \pi}{2}; \quad h \in \mathbb{Z}; \quad -\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{9\pi}{2};$$

$$\text{Если } h > 2, \text{ то } x > \frac{9\pi}{2};$$

$$\text{Если } h < 0, \text{ то } x < -\frac{\pi}{2};$$

$$\text{Пусть } 0 \leq h \leq 2; \quad -\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{9\pi}{2}, \text{ тогда}$$

$$\text{значит} \quad \begin{cases} x = -\frac{\pi}{2} \\ x = 2\pi \\ x = \frac{9\pi}{2} \end{cases};$$

$$(2) \quad x = \frac{7\pi + 10\pi h}{6}, \quad h \in \mathbb{Z}; \quad -\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{9\pi}{2};$$

$$\text{Если } h > 2, \text{ то } x > \frac{27\pi}{6} = \frac{9\pi}{2};$$

$$\text{Если } h < -1, \text{ то } x < \frac{-3\pi}{6} = -\frac{\pi}{2}, \text{ значит}$$

$$\text{Если } -1 \leq h \leq 2, \text{ то } -\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{9\pi}{2}, \text{ тогда}$$

$$\begin{cases} x = -\frac{\pi}{2} \\ x = \frac{7\pi}{6} \\ x = \frac{17\pi}{6} \\ x = \frac{9\pi}{2} \end{cases}; \quad \text{значит} \quad \begin{cases} x = -\frac{\pi}{2} \\ x = \frac{7\pi}{6} \\ x = 2\pi \\ x = \frac{17\pi}{6} \\ x = \frac{9\pi}{2} \end{cases};$$

$$\text{Ответ: } \left\{ -\frac{\pi}{2}; \frac{7\pi}{6}; 2\pi; \frac{17\pi}{6}; \frac{9\pi}{2} \right\}.$$

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☒	☐	☐	☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Решение:

$$1) \begin{cases} 5x + 6ay - b = 0 \\ (x^2 + y^2 - 25)(x^2 + y^2 + 18y + 77) = 0 \end{cases}$$

~~$$\begin{cases} x = y \cdot \left(-\frac{6a}{5}\right) + \frac{b}{5} \\ x^2 + y^2 = 25 \end{cases}$$~~

$$\begin{cases} x = y \cdot \left(-\frac{6a}{5}\right) + \frac{b}{5} \quad (3) \\ \begin{cases} x^2 + y^2 = 5^2 \quad (1) \\ x^2 + (y+9)^2 = 2^2 \quad (2) \end{cases} \end{cases}$$

(1) $x^2 + y^2 = 5^2$; график этой фигуры это окружность с центром в точке $(0; 0)$ и радиусом 5;

(2) $x^2 + (y+9)^2 = 2^2$; график этой фигуры это окружность с центром в точке $(0; -9)$ и радиусом 2;

(3) ~~$x = y \cdot \left(-\frac{6a}{5}\right) + \frac{b}{5}$~~ график ~~этой~~ прямой равенства это прямая, негоризонтальная; при $\left(-\frac{6a}{5}\right) \neq 0$ эта прямая становится параллельна оси Oy ;

2) Изобразим все это на графике:

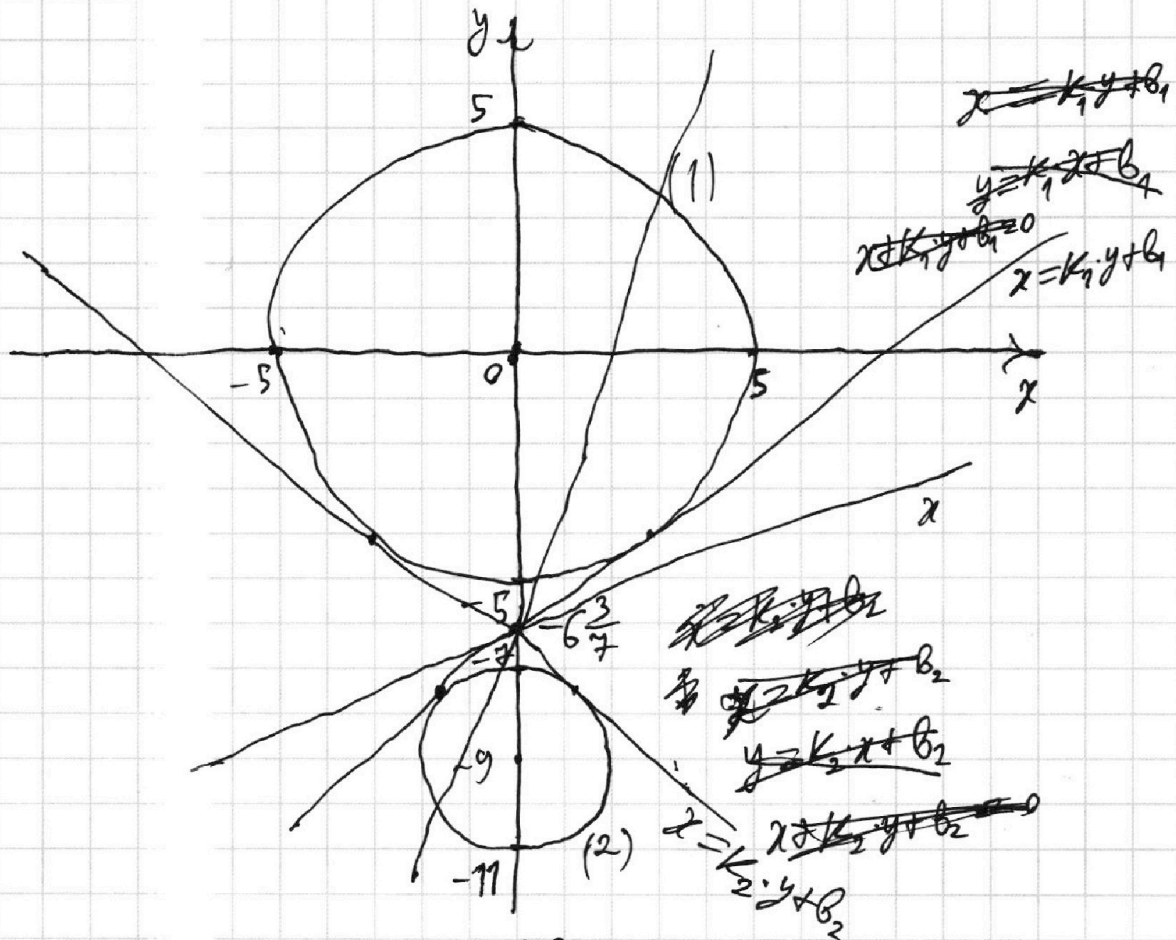
На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☒	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



3) Нарисовать ^{внутренние} касательные к двум окружностям

это можно $y = k_1 x + b_1$ и $y = k_2 x + b_2$
 $0 = x + k_1 y + b_1$, $x + k_2 y + b_2 = 0$

Заметим, что фиксируем значение переменной x

тогда при изменении переменной y линия $x =$
 ~~$x = (-\frac{6a}{5})y + \frac{b}{5}$~~ будет касательной

касательная вдоль оси абсцисс; тогда, если

$(-\frac{6a}{5}) = k_1$, то линия $x = k_1 y + b_1$ будет касательной

касательная касательная $x = (-\frac{6a}{5})x + b$

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☒	☐	☐	☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

~~но при нулевых значениях $x = k_1 \cdot y + b_1$
влево вдоль оси Ox эта линия не
будет пересекать (2)-ю окружность, т.е. не
будет 4 решения у системы; а при нулевом
значении, она не будет пересекать~~

~~Запишем все уравнения $y = k_3 \cdot x + b_3$,~~

~~где $k_1 \leq k_3 \leq k_2$ ($k_1 < 0$ и $k_2 > 0$);~~

~~$k_2 \leq k_3 \leq k_1$ ($k_1 > 0$; $k_2 < 0$); тогда уравнение
 $y = k_1 \cdot x + b_1$ и $y = k_2 \cdot x + b_2$; ~~Второе уравнение~~~~

~~$y = k_1 \cdot x + b_1 \geq 0$; $d_0 = 0 - k_1 \cdot 0 =$
 $x = k_1 \cdot y + b_1$~~

4) т.к. ~~касательная~~ $\checkmark$ - касательная к окружности,
то рассмотрим ее касаясь $(0;0)$ и $(0;-9)$ точки
иногда точки 5 и 2 соответственно, т.е.

$$\begin{cases} 5 = \frac{10 + k_1 \cdot 0 + b_1}{\sqrt{(1-k_1^2)}} \\ 2 = \frac{10 - 9k_1 + b_1}{\sqrt{(1-k_1^2) + k_1^2}} \end{cases}$$

$$\begin{cases} 5\sqrt{k_1^2 + 1} = |b_1| \\ 2\sqrt{k_1^2 + 1} = |b_1 - 9k_1| \end{cases}$$

$$\underline{9k_1^2 + 9 \geq 81k_1^2}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☒	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$b_1^2 = 25(1+k_1^2); \quad (b_1 - 9k_1)^2 = 4(1+k_1^2);$$

$$(b_1 - 9k_1)^2 = \frac{4}{25} b_1^2; \quad \frac{21}{25} b_1^2 - 18 b_1 k_1 + 81 k_1^2 = 9$$

$$\begin{cases} b_1 = 15k_1 \\ b_1 = \frac{45}{7} k_1 \end{cases}$$

5) Если $b_1 = 15k_1$, то $|15k_1| = 5\sqrt{1+k_1^2};$

$$9k_1^2 = 1+k_1^2; \quad k_1 = \pm \frac{1}{\sqrt{8}};$$

6) Если $b_1 = \frac{45}{7} k_1$, то $|\frac{45}{7} k_1| = 5\sqrt{1+k_1^2};$

$$\frac{45 \cdot 45}{7 \cdot 7} k_1^2 = 25(1+k_1^2); \quad \frac{81}{49} k_1^2 = 1+k_1^2;$$

$$\frac{32}{49} k_1^2 = 1; \quad k_1^2 = \frac{49}{32}; \quad k_1 = \pm \frac{7}{\sqrt{32}};$$

2) Если $k_1 = \frac{1}{\sqrt{8}}$, то $b_1 = \frac{15}{\sqrt{8}}$, тогда уравнение

касательной будет: $x \pm \frac{4}{\sqrt{8}} + \frac{15}{\sqrt{8}} = 0$

или $x \geq 0; \quad y = -15$; тогда $(0; -15)$ — точка

пересечения этой касательной и оси Oy ; тогда,

так как они не лежат на отрезке, соединяющем

центры окружностей (1) и (2), то $k_1 = \frac{1}{\sqrt{8}}$ не

подходит; аналогично при $k_1 = -\frac{1}{\sqrt{8}}$ и $b_1 = -\frac{15}{\sqrt{8}}$

не будет подходящим;

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☒	☐	☐	☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

8) Если $k_1 = \frac{7}{\sqrt{32}}$, то $b_1 = \frac{45}{7} \cdot \frac{7}{\sqrt{32}} = \frac{45}{\sqrt{32}}$,

тогда уравнение касательной будет:

$$x = \frac{7}{\sqrt{32}} y + \frac{45}{\sqrt{32}}; \text{ или } x = 0;$$

$$y = -\frac{45}{7} = -6\frac{3}{7}, \text{ где } 0 < -6\frac{3}{7} < -9,$$

значит уравнения:

$$x = \frac{7}{\sqrt{32}} y + \frac{45}{\sqrt{32}} \text{ и } x = -\frac{7}{\sqrt{32}} y - \frac{45}{\sqrt{32}}$$

это уравнения внутренних касательных;

9) Запишем все прямые $x + k_0 y + b_0 = 0$,

где $k_0 \cdot (-6\frac{3}{7}) + b_0 \geq 0$; т.е. $b_0 \geq \frac{45}{7} k_0$;

и $k_0 \geq \frac{7}{\sqrt{32}}$, т.е. $x = k_0 y + \frac{45}{7} k_0$

Эта прямая проходит через точку $(0; -6\frac{3}{7})$

и из-за $k_0 \geq \frac{7}{\sqrt{32}}$, она не пересекает ни одну

из окружностей не более чем в одной точке, тогда
ли параллельная перпендикулярная этой прямой будет

Она, она будет ещё дальше от центра от $\sqrt{32}$

из центров окружностей; и не сможет пересекать

две окружности в двух точках каждой, т.е. у системы

не будет более 2 решений; следовательно при $k_0 \leq \frac{7}{\sqrt{32}}$

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☒	☐	☐	☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

10) Если $l_{\text{кр}} - \frac{7}{\sqrt{32}} \leq K_0 \leq \frac{7}{\sqrt{32}}$, то прямая

$x = K_0 y + b_0$ будет пересекать каждую

из окружностей в двух точках, т.е. у системы
будет ровно 4 решения;

11) Если прямая (3) это $x = (-\frac{6a}{5})y + \frac{b}{5}$;

~~мы считаем, что $b \geq \frac{45}{7}$, тогда~~

~~прямая $x = K_0 y + \frac{b}{5}$ не имеет точек,~~

т.е. $l_{\text{кр}} - \frac{7}{\sqrt{32}} \leq -\frac{6a}{5} \leq \frac{7}{\sqrt{32}}$ или $-\frac{6a}{5} \geq \frac{7}{\sqrt{32}}$, то

новая прямая, полученная параллельным переносом

прямой $x = (-\frac{6a}{5})y$, ^{если $a \leq 0$} не имеет пересеканий

~~с~~ окружностями в 4-х точках;

или $-\frac{7}{\sqrt{32}} < -\frac{6a}{5} < \frac{7}{\sqrt{32}}$, то тогда $\frac{b}{5} \geq \frac{45}{7} \cdot (-\frac{6a}{5})$;

т.е. $b \geq \frac{5 \cdot 45}{7} \cdot (-\frac{6a}{5})$; мы получим прямую,

проходящую через точку $(0; -\frac{45}{7})$ и перескающую

окружности в четырех точках, тогда

$-\frac{7}{\sqrt{32}} < -\frac{6a}{5} < \frac{7}{\sqrt{32}}$; $-\frac{35}{6\sqrt{32}} < a < \frac{35}{6\sqrt{32}} = \frac{35 \cdot \sqrt{32}}{6 \cdot 32} =$

$= \frac{35 \cdot 4\sqrt{2}}{6 \cdot 32} = \frac{35\sqrt{2}}{48}$; тогда $-\frac{35\sqrt{2}}{48} < a < \frac{35\sqrt{2}}{48}$;

т.е. $(-\frac{35\sqrt{2}}{48}; \frac{35\sqrt{2}}{48})$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☒	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

№ 5

Решение:

1) Пусть $\log_m x = t$ и $\log_m (\frac{1}{2}y) = a$, $t \neq 0$ $a \neq 0$

тогда $a + t = \log_m \frac{xy}{2}$, т.е.

~~(a+t)~~ $11^{a+t} = \frac{xy}{2}$ $xy = 2 \cdot 11^{a+t}$;

2) $t^4 - \frac{6}{t} = (-\frac{2}{3}) \cdot \frac{1}{t} - 5$ / $t \neq 0$;

$t^5 + 5t - \frac{16}{3} = 0$;

$a^4 + \frac{1}{a} = (-\frac{13}{3}) \cdot \frac{1}{a} - 5$ / $a \neq 0$;

$a^5 + 5a + \frac{16}{3} = 0$; тогда

$a^5 + t^5 + 5t + 5a = 0$;

$(a+t)(a^4 - a^3t + a^2t^2 - at^3 + t^4) + 5(a+t) = 0$;

$\begin{cases} a+t = 0 \\ a^4 - a^3t + a^2t^2 - at^3 + t^4 + 5 = 0 \\ a+t \neq 0 \end{cases}$;

Если $a+t = 0$, то $xy = 2 \cdot 11^0 = 2$; для этого

можно выбрать по корню из уравнений $a^5 + 5a + \frac{16}{3} = 0$

и $t^5 + 5t - \frac{16}{3} = 0$, которые можно попарно

(п.к. степень множителей в уравнениях нечетная)

и не могут равняться 0, т.к. $\frac{16}{3} \neq 0$ и $(-\frac{16}{3}) \neq 0$;

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1
☐

2
☐

3
☐

4
☐

5
☒

6
☐

7
☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



~~возведем 19 в степень равно краю~~
из этих двух корней, получим x и $(\frac{1}{2x})$,
где будет выполняться, что $xy = 2$;

3) ~~Рассмотрим на выражение:~~

~~$A = a^4 - a^3b + a^2b^2 - ab^3 + b^4$; т.к. $a \neq 0$ и $b \neq 0$,~~

~~докажем, что $A > 0$ для любых a и b ;~~

~~$A = a^4 + b^4 - a \cdot b (a^2 - ab + b^2)$~~

~~Рассмотрим на выражение $b = a^2 - ab + b^2$~~

~~как на квадратное относительно переменной a ,~~

~~укажем этот квадрат это парабол, ветви~~

~~которой направлены вверх; тогда $D = b^2 - 4b^2 =$~~

~~$= -3b^2$, где $b \neq 0$, тогда $D < 0$, значит параболы~~
~~целиком лежат выше оси абсцисс, значит~~

~~$a^2 - ab + b^2 > 0$; ~~или~~~~

3) $A = a^4 - a^3b + b^4 - ab^3 + a^2b^2 =$

$= a^3(a-b) + b^3(b-a) + a^2b^2 =$

$= (a^3 - b^3)(a-b) + a^2b^2$; т.к. $f(a) = a^3$ кр.

но $(a^3 - b^3)$ и $(a-b)$ имеют одинаковый знак,

тогда $(a^3 - b^3) \cdot (a-b) \geq 0$, но $a^2b^2 > 0$ (т.к. $a, b \neq 0$),

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☒	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

значит $A = (a^3 - b^3)(a - b) + a^2 + b^2 > 0$, тогда

$(A + 5) > 0$, значит равенство

$$a^4 - a^3b + a^2 + b^2 - ab^2 + b^4 + 5 = 0 \text{ невозможно}$$

тогда ~~равно~~ ~~тогда~~ $a + b \geq 0$;

4) Возьмем корень уравнения $t^5 + 5t - \frac{16}{3} = 0$, t_0 ,

~~где~~ он может существовать (н.к. многочлен

в левой части уравнения нечетной степени);

и $t_0 \neq 0$, н.к. $-\frac{16}{3} \neq 0$;

Аналогично возьмем корень уравнения $a^5 + 5a + \frac{16}{3} = 0$,

$a_0 = -t_0$; ~~где он может существовать и $a_0 \neq 0$;~~

~~тогда, н.к.~~ н.к. $(-t_0)^5 + 5 \cdot (-t_0) + \frac{16}{3} =$

$$= -\frac{16}{3} + \frac{16}{3} = 0; \text{ тогда } \text{существует}$$

$(a_0 + t_0) \geq -t_0 + t_0 = 0$; значит

$$x \geq 11^{t_0} \text{ и } \frac{1}{2}y \geq 11^{a_0}, \text{ тогда } \frac{xy}{2} \geq 11^0; xy \geq 2$$

Значит 2.



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1



2



3



4



5



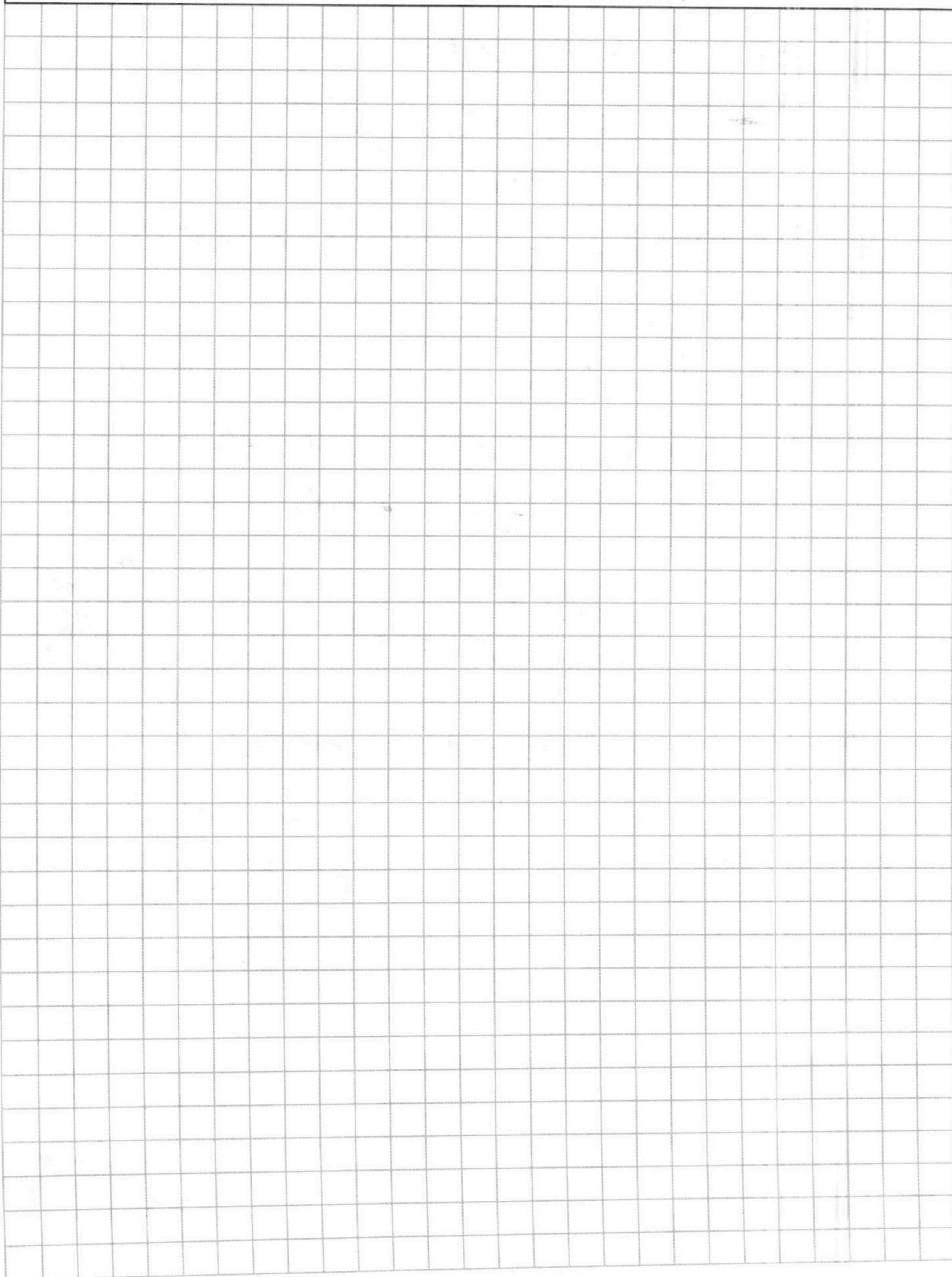
6



7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$a^5 + 5a + b^5 + 5b = 0; \quad (a+b) - ? \quad a+b \neq 0$$

$$a^4 - a^3b + a^2b^2 - ab^3 + b^4 + 5 = 0;$$

$$(a+b)^4 = (a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3)(a+b) =$$

$$= a^4 + 3a^3b + 3a^2b^2 + ab^3 + a^3b + 3a^2b^2 + 3ab^3 + b^4 =$$

$$= a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$$

$$(a+b)^4 - 5a^3b - 5a^2b^2 - 5ab^3 + 5 = 0;$$

$$(a+b)^4 - 5(a^3b + a^2b^2 + ab^3 - 1) = 0;$$

$$5 + 5 = (a+b)(a^4 - a^3b + a^2b^2 - ab^3 + b^4)$$

$$-5ab(a^2 + ab + b^2)$$

$$a^4 - a^3b - a^2b^2 - ab^3 + b^4$$

$$a > b;$$

$$b^4 - a^4 + a^3b - ab^3$$

$$b^3(b-a) + a^3(a-b);$$

$$(a^3 - b^3)(a-b)$$

$$a^2 - ab + b^2$$

$$D = b^2 - 4a^2b^2$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$a^5 + b^5 = (a+b)(a^4 - a^3b + a^2b^2 - ab^3 + b^4)$$

$$a^5 + 5a + \frac{16}{3} = 0$$

$$\frac{S_{\triangle ACD}}{S_{\triangle CEF}} = ?$$

$$b^5 + 5b - \frac{16}{3} = 0$$

$$(a+b) = ?$$

$$BD:DA = 5:2$$

$$(a+b)(a^4 - a^3b + a^2b^2 - ab^3 + b^4) = 0$$

$$\log_n x + \log_n y = \log_n xy$$

$$\begin{cases} 0 < x < 1 \\ x > 1 \end{cases}$$

$$\log_n^4 x - \frac{6}{\log_n x} = \log_n^4 11 - 5; \quad \log_n^4 x - \frac{6}{\log_n x} = (-2) \cdot \log_n^2 11 - 5;$$

$$\log_n^4 x - \frac{6}{\log_n x} = \frac{-2}{\log_n^3 x} - 5; \quad \log_n^4 x - \frac{6}{\log_n x} = \left(-\frac{2}{3}\right) \cdot \frac{1}{\log_n x} - 5$$

$$t^4 - \frac{6}{t} = -\frac{2}{3t} - 5; \quad t^5 - 6 = -\frac{2}{3} - 5t$$

$$t^5 + 5t - 5\frac{1}{3} = 0; \quad t^5 + 5t - \frac{16}{3} = 0$$

$$\log_n^4 \left(\frac{y}{2}\right) + \frac{1}{\log_n \left(\frac{y}{2}\right)} = \log_n^4 \left(\frac{y}{2}\right)^3 \left(11\right)^{-13} - 5;$$

$$- \frac{13}{3} \cdot \frac{1}{\log_n \frac{y}{2}} - 5$$

$$a^4 + \frac{1}{a} = -\frac{13}{3} \cdot \frac{1}{a} - 5$$

$$a^5 + 1 = -\frac{13}{3} - 5a; \quad a^5 + 5a + \frac{16}{3} = 0$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$x + \left(\frac{6a}{5}\right)y + \frac{8}{5} = 0$$

$$x + \left(\frac{6a}{5}\right)y - \frac{8}{5} = 0;$$

$$x + k_1 y + b_1 = 0;$$

$$\frac{|b_1|}{\sqrt{1+k_1^2}} = 5; \quad \frac{|b_1 - 9 \cdot k_1|}{\sqrt{1+k_1^2}} = 2;$$

$$b_1^2 = 25 \cdot (1+k_1^2);$$

$$(b_1 - 9k_1)^2 = 4(1+k_1^2);$$

$$b_1^2 - 18b_1 \cdot k_1 + 81k_1^2 = \frac{4}{25} \cdot b_1^2;$$

$$\frac{21}{25} \cdot b_1^2 - 18b_1 \cdot k_1 + 81k_1^2 = 0;$$

$$\frac{D}{4} = 9^2 - \frac{21}{25} \cdot 81 = \frac{4}{25} \cdot 81; \quad \left(\frac{2 \cdot 9}{5}\right)^2$$

$$b_1 = \left(\frac{9 \pm \frac{18}{5}}{\frac{21}{25}} \right) \cdot k_1$$

~~5~~
~~7~~
~~4~~

$$|15k_1| = 5\sqrt{1+k_1^2};$$

$$15^2 k_1^2 = 25(1+k_1^2);$$

$$9k_1^2 = k_1^2 + 1;$$

$$8k_1^2 = 1; \quad k_1 = \pm \sqrt{\frac{1}{8}};$$

$$9 - \frac{18}{5} = \frac{27}{5};$$

$$\frac{27 \cdot 25}{5 \cdot 21} = \frac{45}{7};$$

$$9 \pm \frac{18}{5} = \frac{45 \pm 18}{5} = \frac{63}{5};$$

$$\frac{63 \cdot 25}{5 \cdot 21} = 15;$$

$$\begin{cases} b_1 = 15k_1 \\ b_1 = \frac{45}{7} \cdot k_1 \end{cases}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

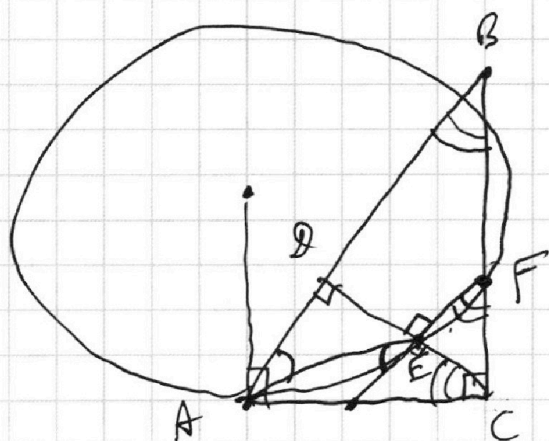
1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$10 \cdot \cos(5x) = 9\sqrt{10} - 2x;$$



$$\cos 2 \in [0; \pi]$$

$$\cos(5x) = 2$$

$$5x = 852$$

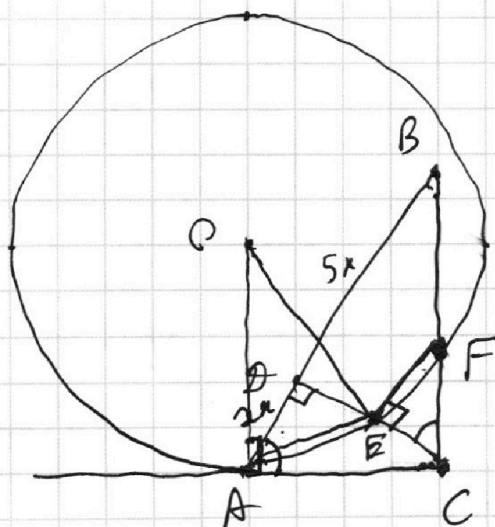
$$10 \angle = 9\sqrt{10} - 2x$$

$$\angle = \frac{9\sqrt{10} - 2x}{10}$$

$$AB:BD = 7:5;$$

$$\frac{S_{\triangle ACD}}{S_{\triangle CEF}}$$

$$\cos 2x \cdot 5x = 2\sqrt{10}x$$



$$\frac{BD}{AB} = \frac{5}{7}$$

$$\cos \frac{9\sqrt{10} - 2x}{10} = \sin x$$

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{9\sqrt{10} - 2x}{10}\right) = \sin x$$

$$\sin\left(\frac{2x - 9\sqrt{10}}{10}\right) = \sin x$$

$$\sin\left(\frac{x - 2\sqrt{10}}{10}\right) = \sin x$$

$$\frac{x - 2\sqrt{10}}{10} = x + 2\pi k$$

$$x - 2\sqrt{10} = 10x + 20\pi k$$

$$-2\sqrt{10} + 20\pi k = 9x$$

$$\triangle ADE \sim \triangle A'B'$$

$$\frac{AD}{CD} = \frac{AB}{AC}$$

$$8E:8C = 2:5$$

$$0 \leq \frac{9\sqrt{10} - 2x}{10} \leq \pi$$

$$0 \leq 9\sqrt{10} - 2x \leq 10\pi$$

$$-9\sqrt{10} \leq -2x \leq \pi;$$

$$-\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{9\sqrt{10}}{2};$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7
☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$\begin{aligned} x+y &\geq 21 \\ y+z &\geq 13 \\ x+z &\geq 28 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a+y &\geq 26 \\ z &\geq 13 \\ x+z &\geq 13 \\ y &= \end{aligned}$$

ab
bc
ac

$$\frac{2\pi}{6} = \frac{\pi}{3}$$

$$\frac{2\pi}{6} = \frac{\pi}{3}$$

a	b	c
2 ⁴	2 ²	2 ¹²
3 ⁹	3 ⁴	3 ¹⁷
5 ¹⁴	5 ¹	5 ¹⁴

$$\sin\left(\frac{x-2\pi}{5}\right) = \sin a; \quad -\frac{\pi}{2} \leq x \leq 4,5\pi$$

$$1) \quad \frac{x-2\pi}{5} = x + 2\pi k, k \in \mathbb{Z};$$

$$x - 2\pi = 5x + 10\pi k, k \in \mathbb{Z};$$

$$10\pi k - 2\pi = 4x, k \in \mathbb{Z}; \quad x = \frac{5\pi k - \pi}{2}; \quad \begin{matrix} k=0 \\ k=1 \\ k=2 \\ k=3 \end{matrix}$$

$$2) \quad \frac{x-2\pi}{5} = \pi - x + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$$

$$x - 2\pi = 5\pi - 5x + 10\pi k, k \in \mathbb{Z}$$

$$6x = 7\pi + 10\pi k, k \in \mathbb{Z}$$

$$\begin{aligned} ab &: (2^6 \cdot 3^{13} \cdot 5^{11}); \quad bc : (2^{14} \cdot 3^{21} \cdot 5^{13}) \\ ac &: (2^{16} \cdot 3^{25} \cdot 5^{28}); \quad abc = ? \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a &: 2^x \\ b &: 2^y \\ c &: 2^z \\ (x+y) &\geq 6 \\ y+z &\geq 14 \\ x+z &\geq 16 \\ x+y+z &\geq 18 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x+y &\geq 13 \\ y+z &\geq 21 \\ x+z &\geq 28 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x+y+z &\geq 26 \\ k=0 \\ k=1 \\ k=2 \\ k=3 \end{aligned}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

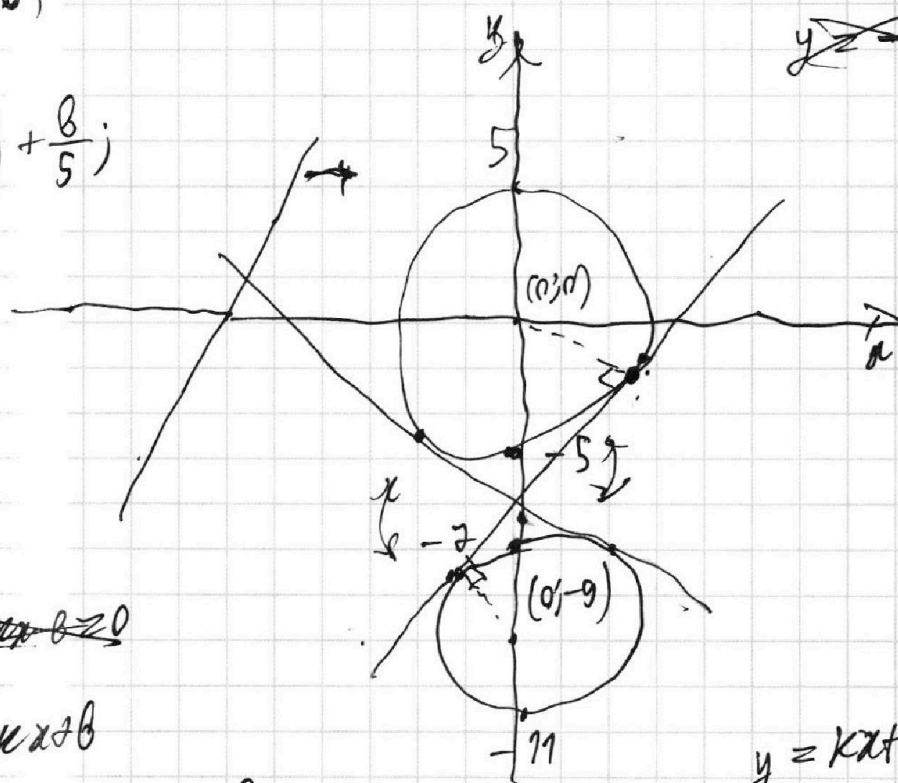
$$\begin{cases} 5x + 6ay - 8 = 0 \\ x^2 + y^2 = 25 \\ x^2 + (y+9)^2 = 4 \end{cases}$$

4 решения;
линия касалась
ме 1 и 2

1) Если $a = 0$;
2) Если $a \neq 0$;

$$y = -\frac{5x + 8}{6a}$$

$$x = y \cdot \left(\frac{6a}{5}\right) + \frac{8}{5}$$



$$y = kx + b$$

$$y = kx + b$$

$M(x_0, y_0)$

$$d = \frac{y_0 - kx_0 - b}{\sqrt{1+k^2}}$$

$$y = kx + b$$

$$d_0 = \frac{b}{\sqrt{1+k^2}} = 5;$$

$$d_{-9} = \frac{-9 + b}{\sqrt{1+k^2}} = 2;$$

$$\frac{b}{2-9} = 5;$$

$$2b = 50 - 45;$$

$$3b = 5;$$

$$b = 5/3;$$

$$k = \pm \sqrt{8}$$