



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

11 КЛАСС. Вариант 1



1. [4 балла] Натуральные числа a, b, c таковы, что ab делится на $2^9 3^{10} 5^{10}$, bc делится на $2^{14} 3^{13} 5^{13}$, ac делится на $2^{19} 3^{18} 5^{30}$. Найдите наименьшее возможное значение произведения abc .
2. [5 баллов] Дан прямоугольный треугольник ABC . Окружность, касающаяся прямой BC в точке B , пересекает высоту CD , проведённую к гипотенузе, в точке F , а катет AC – в точке E . Известно, что $AB \parallel EF$, $AD : DB = 3 : 1$. Найдите отношение площади треугольника ABC к площади треугольника CEF .
3. [4 балла] Решите уравнение $5 \arcsin(\cos x) = x + \frac{\pi}{2}$.
4. [5 баллов] Найдите все значения параметра a , для каждого из которых найдётся значение параметра b , при котором система уравнений

$$\begin{cases} ax + 2y - 3b = 0, \\ (x^2 + y^2 - 9)(x^2 + y^2 - 12x + 32) = 0 \end{cases}$$

имеет ровно 4 решения.

5. [5 баллов] Некоторые числа x и y удовлетворяют равенствам

$$\log_3^4 x + 6 \log_x 3 = \log_{x^2} 243 - 8 \quad \text{и} \quad \log_3^4(5y) + 2 \log_{5y} 3 = \log_{25y^2} (3^{11}) - 8.$$

Найдите все возможные значения произведения xy .

6. [5 баллов] На координатной плоскости дан параллелограмм с вершинами в точках $O(0;0)$, $P(-14;42)$, $Q(6;42)$ и $R(20;0)$. Найдите количество пар точек $A(x_1; y_1)$ и $B(x_2; y_2)$ с целыми координатами, лежащих в этом параллелограмме (возможно, на границе) и таких, что $3x_2 - 3x_1 + y_2 - y_1 = 33$.
7. [6 баллов] Дана треугольная пирамида $SABC$, медианы AA_1, BB_1 и CC_1 треугольника ABC пересекаются в точке M . Сфера Ω касается ребра AS в точке L и касается плоскости основания пирамиды в точке K , лежащей на отрезке AM . Сфера Ω пересекает отрезок SM в точках P и Q . Известно, что $SP = MQ$, площадь треугольника ABC равна 90, $SA = BC = 12$.
 - а) Найдите произведение длин медиан AA_1, BB_1 и CC_1 .
 - б) Найдите двугранный угол при ребре BC пирамиды, если дополнительно известно, что Ω касается грани BCS в точке N , $SN = 4$, а радиус сферы Ω равен 5.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☒	☐	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

И/1

Из условия: $abc = 2^9 \cdot 3^{10} \cdot 5^{10} \cdot n$ где $n, b, m \in \mathbb{N}$

$$(1) \begin{cases} bc = 2^{14} \cdot 3^{13} \cdot 5^{13} \cdot b \\ ac = 2^{19} \cdot 3^{18} \cdot 5^{30} \cdot m \end{cases}$$

Переходим к уравнениям: $(abc)^2 = 2^{42} \cdot 3^{41} \cdot 5^{53} \cdot n^2 b^2 m^2$
т.е. $abc \in \mathbb{N}$ и $abc \vdots 5^{30}$, то $(abc)^2 \vdots 5^{60}$ и $(abc)^2 \vdots 3^{42}$

(Значит входит в четную степень)
тогда минимально возможное $(abc)^2 = 2^{42} \cdot 3^{44} \cdot 5^{60}$
откуда мин $abc = 2^{21} \cdot 3^{22} \cdot 5^{30}$

Если положить $n = 3 \cdot 5^7$ и $m = n = 1$, то получаем

$$\text{из (1)} \quad b^2 = \frac{abc \cdot bc}{ac} = \frac{2^{29} \cdot 3^{24} \cdot 5^{30}}{2^{19} \cdot 3^{18} \cdot 5^{30}} = 2^7 \cdot 3^6 \quad \text{откуда } b = 2^3 \cdot 3^3$$

$$\Rightarrow a = 2^7 \cdot 3^7 \cdot 5^{10} \quad \text{и} \quad c = 2^{12} \cdot 3^{11} \cdot 5^{20}$$

Эти a и b полностью удовлетворяют условию
и при них достигается минимальный abc

Ответ: $2^{21} \cdot 3^{22} \cdot 5^{30}$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☒	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

✓

$$5(\arcsin(\cos x)) = x + \frac{\pi}{2} \quad - \frac{5\pi}{2} \leq 5\arcsin(\cos x) \leq \frac{5\pi}{2}$$

$$5\left(\frac{\pi}{2} - \arccos(\cos x)\right) = x + \frac{\pi}{2} \Rightarrow -\frac{5\pi}{2} \leq x + \frac{\pi}{2} \leq \frac{5\pi}{2}$$

$$-5\arccos(\cos x) = x - 2\pi \quad -2\pi \leq x \leq 2\pi \quad (1)$$

$$\arccos(\cos x) = \frac{2\pi - x}{5}$$

$$\cos x = \cos\left(\frac{2\pi - x}{5}\right)$$

$$\begin{cases} x = \frac{2\pi - x}{5} + 2\pi n \\ x = -\frac{x - 2\pi}{5} + 2\pi k \end{cases} \quad n, k \in \mathbb{Z}$$

$$\begin{cases} \frac{6x}{5} = \frac{2\pi}{5} + 2\pi n \\ \frac{4x}{5} = -\frac{2\pi}{5} + 2\pi k \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = \frac{\pi}{3} + \frac{5\pi n}{3} \\ x = -\frac{\pi}{2} + \frac{5\pi k}{2} \end{cases} \quad \text{с учётом (1)} \quad \begin{cases} x = -\frac{4\pi}{3}, \frac{\pi}{3}, 2\pi \\ x = -\frac{\pi}{2}, 2\pi \end{cases}$$

Проверка: $5\arcsin(\cos(\frac{4\pi}{3})) = 5\arcsin(-\frac{1}{2}) = -\frac{5\pi}{6} = -\frac{4\pi}{3} + \frac{\pi}{2}$

$5\arcsin(\cos \frac{\pi}{3}) = 5\arcsin \frac{1}{2} = \frac{5\pi}{6} = \frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{2}$

$5\arcsin(\cos 2\pi) = 5\arcsin 1 = \frac{5\pi}{2} = 2\pi + \frac{\pi}{2}$

$5\arcsin(\cos -\frac{\pi}{2}) = 5\arcsin 0 = 0 = -\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2}$

Ответ: $\left\{ -\frac{4\pi}{3}, -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{3}, 2\pi \right\}$

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☒ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

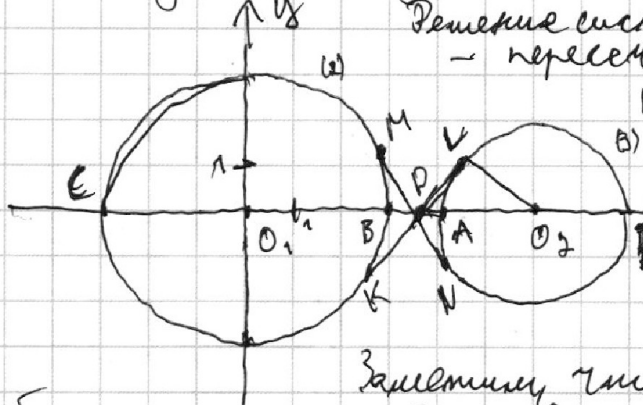
Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\text{Уч } ax + 2y + 36 = 0$$

$$\begin{cases} y = \frac{36}{2} - \frac{a}{2}x & (1) \end{cases}$$

$$\{(x^2 + y^2 - 9)(x^2 + y^2 - (2x + 32)) = 0\} \begin{cases} x^2 + y^2 = 9 & (2) \\ (x - 6)^2 + y^2 = 4 & (3) \end{cases}$$

Решение системы — пересечение прямой (1) с окружностями (2) и (3)



Требуется найти все a при которых угол наклона прямой (1) позволит при каком-то b пересекать обе окружности.

Заметим, что если наклон прямой (1) больше наклона общей внутренней касательной к (2) и (3), то пересекать обе окружности прямая не сможет. MN и KL — общие касательные, $D = MN \cap KL$, $D \in O_1O_2$; $O_1D \perp MN$, $O_2D \perp KL$. Воспользуемся тем, что D лежит на радикальной оси к окр. (2) и (3):

$$DA \cdot DE = DB \cdot DC \quad DA(DA + 4) = (1 - DA)(1 - DA + 6) \quad DA^2 + 4DA = DA^2 - 8DA + 57 \quad DA = \frac{57}{12} = \frac{19}{4}$$

$$\tan \angle O_1DM = \frac{O_1D}{DM} = \frac{\frac{19}{4}}{\frac{24}{\sqrt{385}}} = \frac{19\sqrt{385}}{96}$$

Если тангенс угла наклона прямой (1) по модулю меньше $\frac{19\sqrt{385}}{96}$, то (1) может пересекать обе окружности ($\frac{36}{2}$ можно считать т.ч. (1) будет проходить через D)

$$-\frac{19\sqrt{385}}{96} < -\frac{a}{2} < \frac{19\sqrt{385}}{96} \quad \begin{cases} a > -\frac{19\sqrt{385}}{48} \\ a < \frac{19\sqrt{385}}{48} \end{cases}$$

Ответ: $\left(-\frac{19\sqrt{385}}{48}; \frac{19\sqrt{385}}{48}\right)$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☒	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\sqrt{5} \log_3^4 x + 6 \log_3 x = \log_3 2243 - 8 \quad \log_3^4 x + 6 \log_3 x - \frac{5}{2} \log_3^3 + 8 = 0$$

$$\log_3^5 x + 6 - \frac{5}{2} + 8 \log_3 x = 0 \quad 2 \log_3^5 x + 16 \log_3 x = -7 \quad (1)$$

$$\log_3^4(5y) + 2 \log_3 3 = \log_3 2(3^{11}) - 8 \quad \log_3^4(5y) + 2 \log_3(3) - \frac{11}{2} \log_3^3(3) + 8 = 0$$

$$\log_3^5(5y) + 2 - \frac{11}{2} + 8 \log_3(5y) = 0 \quad 2 \log_3^5(5y) + 16 \log_3(5y) = 7 \quad (2)$$

Рассмотрим $f(t) = 2t^5 + 16t$ $f(t)$ — нечётная ^{и возрастает}
из (1) и (2) следует, что $\log_3 x = -\log_3 5y$, т. е.
(1) и (2) эквив. уравн. $f(\log_3 x) = 7$ и $f(\log_3 5y) = -7$
соответственно $f(\log_3 x) = 7 = f(-\log_3 5y)$ и $f(t)$ воз-
растает как функция возрастающая $2t^5$ и $16t$

$$\log_3 x = -\log_3 5y \quad \log_3(5xy) = 0 \quad 5xy = 1 \quad xy = \frac{1}{5}$$

Уравнения (1) и (2) однозначно определяют x и y
в силу возрастания $f(t)$ и логарифма, т. е.
других xy не может быть

Ответ: $\frac{1}{5}$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☒	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Уб $3x_2 - 3x_1 + y_2 - y_1 = 33$ $y_2 = 33 + y_1 + 3x_1 - 3x_2$
Пусть ~~$y_1 + 3x_1 = a$~~ $y_1 + 3x_1 = a$
Заметим, что у данного параллелограмма PQOR
параллельны прямым с коэф. наклона -3 (1)

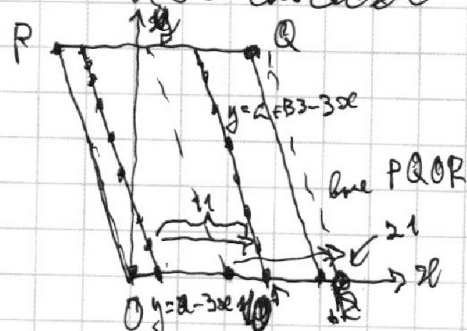
$y_2 = 33 + a - 3x_1$ Если (x_1, y_1) принадлежит
прямой $y = a - 3x_1$, то (x_2, y_2) обязательно
принадлежит прямой $y = 33 + a - 3x_1$ — параллельно
перенесённой на 11 вдоль оси Ox. Т.е. при фикс.
 (x_1, y_1) , (x_2, y_2) можно выбрать на любой ^{целой} точке
той прямой внутри параллелограмма.

Рассмотрим пересек. прямой $y = a - 3x_1$, которой при-
надлежит (x_1, y_1) с осью Ox. Координата x этого
пересечения принадлежит мн.-ву $\{0, 1, 2, \dots, 20\}$
Если она меньше 10, то прямая на которой
лежит (x_2, y_2) пересекает параллелограмм (если
пересек. при $x=9$, то эта прямая совпадает с
содержит Q R), т.е. всего 10 прямых на которых мож-
но выбрать (x_2, y_2) , чтобы существов. такая (x_2, y_2)
В силу (1) каждая прямая вида $y = a - 3x$ содержит
в квадрате 15 точек, а в точку не существует целой
точки внутри не принадл. такой прямой

Прямую, содерж. А можно выбрать 9 способами
точка А на ней 15 то и тогда т. В на анало-
гичной прямой тоже 15 то способами

Итого всего $10 \cdot 15 \cdot 15 = 2250$ способов

Ответ: 2250



*: $\frac{42}{3} + 1 = 15$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$y = \frac{3b}{2} - \frac{ax}{2}$$

$$x^2 + y^2 = 2$$

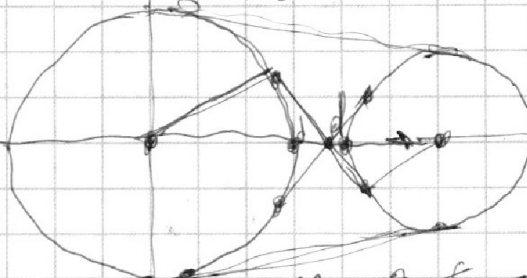
$$(x-6)^2 + y^2 = \frac{3b}{2}$$

$$d(d+4) = (4-d)(1-d) \quad (d-1)(d+1)$$

$$d^2 + 4d = d^2 - 8d + 4$$

$$12d = 4$$

$$d = \frac{1}{3}$$



$$\log_3^4 x + 6 \log_3 x = \log_3 243 - 8$$

$$\log_3^4 x + 6 \log_3 x - 5 \log_3 243 + 8 = 0$$

$$\log_3^4 x + \frac{6}{\log_3 x} - \frac{5}{2 \log_3 x} + 8 = 0$$

$$\log_3^5 x + 6 - \frac{5}{2} + 8 \log_3 x = 0$$

$$\log_3^5 x + 8 \log_3 x = -\frac{7}{2}$$

$$2 \log_3^5 x + 16 \log_3 x = -7$$

$$40 - 9 \cdot 4 = 37$$

$$d^2 - 3d = (4-d)/2 = 2$$

$$d^2 - 3d - 2 = 0$$

$$d = \frac{3 \pm \sqrt{33}}{2}$$

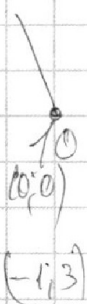
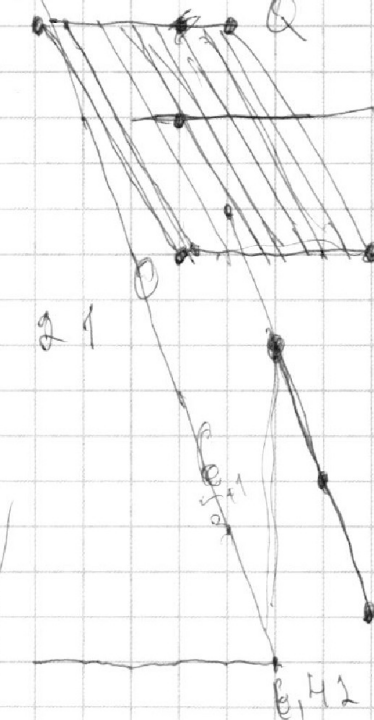
$$d(3+d) = (4-d)(4+d)$$

$$d^2 + 3d = d^2 - 16d + 16$$

$$19d = 16$$

$$d = \frac{16}{19}$$

$$2t^5 + 16t$$



$$B(x_2 - x_1) + y_2 - y_1 = 33$$

$$32x + 14y = 33$$

$$y_2 = 33 + y_1 + 3x_2 - 3x_1$$

$$y_2 = 6 - 3x_2$$

$$y_2 = 33 + y_1 + 3x_2 - 3x_1$$

$$y_1 = 33 - 3x_1$$

$$y_1 - 33 - 3x_1 \neq 0$$

$$y_1 - 33 - 3x_1 = y_2 + 3x_2$$

$$y_2 = 33 + a - 3x_2$$

$$y_1 = 33 - 3x_1$$

$$y_2 = 33 - 3x_2$$

$$y_1 = a - 3x_1$$

$$0, 3, 6, \dots, 60$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{array}{l} ab \quad 9 \quad 10 \quad 10 \\ bc \quad 2 \quad 3 \quad 5 \\ ac \quad 2 \quad 3 \quad 5 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} a \quad 5 \quad 15 \quad 3 \quad 9 \\ c \quad 5 \quad 15 \quad 3 \quad 9 \\ b \quad 2 \quad 3 \quad 4 \end{array}$$

$$\begin{aligned} ab \cdot bc \cdot ac &= (abc)^2 \\ (abc)^2 &= 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5 \\ (abc)^2 &= 2^3 \cdot 3^3 \cdot 5^3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a \cdot bc &= 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5 \\ b \cdot ac &= 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5 \\ c \cdot ab &= 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5 \end{aligned}$$

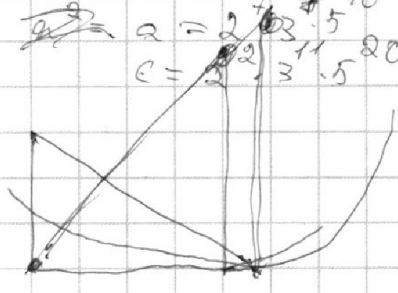
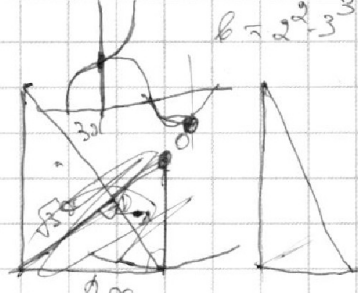
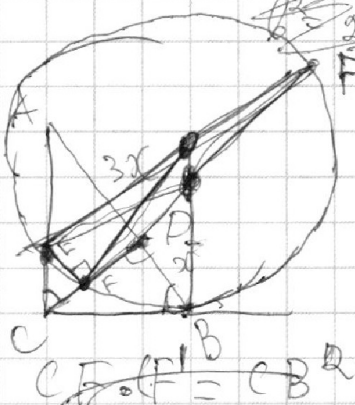
$$\begin{aligned} ab &= 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot n \\ bc &= 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot k \\ ac &= 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot m \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (abc)^2 &= 2^3 \cdot 3^3 \cdot 5^3 \\ abc &= 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot nmk = 30nmk \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} ab &= 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot n \\ bc &= 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot k \\ ac &= 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot m \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} ab &= 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot n \\ bc &= 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot k \\ ac &= 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot m \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} abc &= 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot nmk = 30nmk \\ nmk &= 3 \cdot 5 \end{aligned}$$

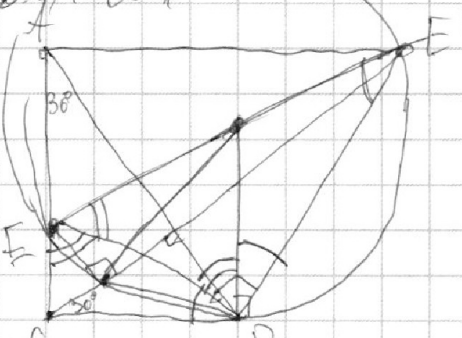
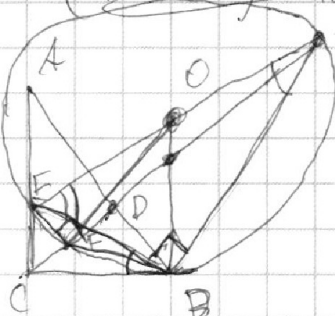


$$CF \cdot FR = CB \cdot R$$

$$CF \cdot (2R + CF) = 4x^2$$

$$DO = \frac{x}{3x} = \frac{1}{3}x$$

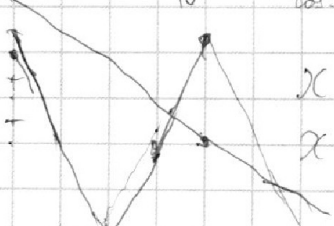
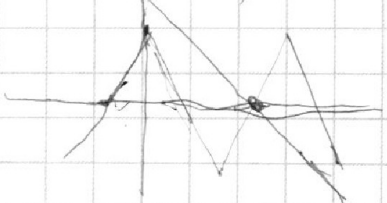
$$\sqrt{\frac{1}{3}x^2} = \frac{2}{\sqrt{3}}x$$



$$\frac{FB}{FE} = \frac{CB}{BE}$$

$$\begin{aligned} 5 \arcsin(\cos x) &= x + \frac{\pi}{2} \\ 5(\frac{\pi}{2} - \arccos(\cos x)) &= x + \frac{\pi}{2} \\ 5\pi - 5\arccos(\cos x) &= 2\pi + x = \pi C \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \cos x &= \cos\left(\frac{x + 2\pi}{5}\right) \\ x &= \frac{2\pi - x}{5} + 2\pi n \\ x &= \frac{2\pi}{5} + 2\pi k \end{aligned}$$





На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1
☐

2
☐

3
☐

4
☐

5
☐

6
☐

7
☐



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

 **МФТИ**

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

