



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

11 КЛАСС. Вариант 2



✓ 1. [4 балла] Натуральные числа a, b, c таковы, что ab делится на $2^7 3^{11} 5^{14}$, bc делится на $2^{13} 3^{15} 5^{18}$, ac делится на $2^{14} 3^{17} 5^{43}$. Найдите наименьшее возможное значение произведения abc .

2. [5 баллов] Дан прямоугольный треугольник ABC . Окружность, касающаяся прямой AC в точке A , пересекает высоту CD , проведённую к гипотенузе, в точке E , а катет BC – в точке F . Известно, что $AB \parallel EF$, $AB : BD = 1,3$. Найдите отношение площади треугольника ACD к площади треугольника CEF .

✓ 3. [4 балла] Решите уравнение $5 \arccos(\sin x) = \frac{3\pi}{2} + x$.

✓ 4. [5 баллов] Найдите все значения параметра a , для каждого из которых найдётся значение параметра b , при котором система уравнений

$$\begin{cases} x + 3ay - 7b = 0, \\ (x^2 + 14x + y^2 + 45)(x^2 + y^2 - 9) = 0 \end{cases}$$

имеет ровно 4 решения.

✚ 5. [5 баллов] Некоторые числа x и y удовлетворяют равенствам

$$\log_7^4(6x) - 2 \log_{6x} 7 = \log_{36x^2} 343 - 4, \quad \text{и} \quad \log_7^4 y + 6 \log_y 7 = \log_{y^2} (7^5) - 4.$$

Найдите все возможные значения произведения xy .

6. [5 баллов] На координатной плоскости дан параллелограмм с вершинами в точках $O(0;0)$, $P(-17;68)$, $Q(2;68)$ и $R(19;0)$. Найдите количество пар точек $A(x_1; y_1)$ и $B(x_2; y_2)$ с целыми координатами, лежащих в этом параллелограмме (возможно на границе) и таких, что $4x_2 - 4x_1 + y_2 - y_1 = 40$.

✓ 7. [6 баллов] Дана треугольная пирамида $SABC$, медианы AA_1 , BB_1 и CC_1 треугольника ABC пересекаются в точке M . Сфера Ω касается ребра AS в точке L и касается плоскости основания пирамиды в точке K , лежащей на отрезке AM . Сфера Ω пересекает отрезок SM в точках P и Q . Известно, что $SP = MQ$, площадь треугольника ABC равна 60, $SA = BC = 10$.

✓ а) Найдите произведение длин медиан AA_1 , BB_1 и CC_1 .

✓ б) Найдите двугранный угол при ребре BC пирамиды, если дополнительно известно, что Ω касается грани BCS в точке N , $SN = 3$, а радиус сферы Ω равен 4.

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☒	☐	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

№1 Пусть a при разложении на простые
им. имеет степени при 2 α_1 , при 3 β_1 , при 5 γ_1 ;
аналог. $\rightarrow a = 2^{\alpha_1} \cdot 3^{\beta_1} \cdot 5^{\gamma_1} \cdot p_1$, p_1 не дел на
аналог. $b = 2^{\alpha_2} \cdot 3^{\beta_2} \cdot 5^{\gamma_2} \cdot p_2$; $c = 2^{\alpha_3} \cdot 3^{\beta_3} \cdot 5^{\gamma_3}$
тогда $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 \geq 7$, $\beta_1 + \beta_2 + \beta_3 \geq 11$, $\gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3 \geq 14$

$$\begin{cases} \alpha_1 + \alpha_2 \geq 7 \\ \beta_1 + \beta_2 \geq 11 \\ \gamma_1 + \gamma_2 \geq 14 \end{cases}$$

аналог. $\alpha_2 + \alpha_3 \geq 13$, $\beta_2 + \beta_3 \geq 15$, $\gamma_2 + \gamma_3 \geq 18$;
тогда $\alpha_3 + \alpha_1 \geq 14$, $\beta_3 + \beta_1 \geq 14$, $\gamma_3 + \gamma_1 \geq 43$ ★

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 \geq \frac{7 + 13 + 14}{2} = 17$$

$$\beta_1 + \beta_2 + \beta_3 \geq \frac{11 + 15 + 13}{2} = 21,5, \text{ т.к. } \beta_1, \beta_2, \beta_3 \in \mathbb{N} \geq 0, \text{ то}$$

$$\beta_1 + \beta_2 + \beta_3 \geq 22$$

$$\gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3 \geq \frac{14 + 18 + 14}{2} = 33, \text{ т.к. } \gamma_1, \gamma_2, \gamma_3 \in \mathbb{N} \geq 0, \text{ то}$$

$$\gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3 \geq 34$$

$$\text{тогда } abc \geq 2^{17} \cdot 3^{22} \cdot 5^{43}$$

Пример: $a = 2^4 \cdot 3^7 \cdot 5^{14}$; $b = 2^3 \cdot 3^5$; $c = 2^{10} \cdot 3^{10} \cdot 5^{29}$

Ответ: $2^{17} \cdot 3^{22} \cdot 5^{43}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☒	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$\angle EFC \sim \angle ABE$ по
свойству

$$\angle CAE = \frac{1}{2} \angle ABE$$

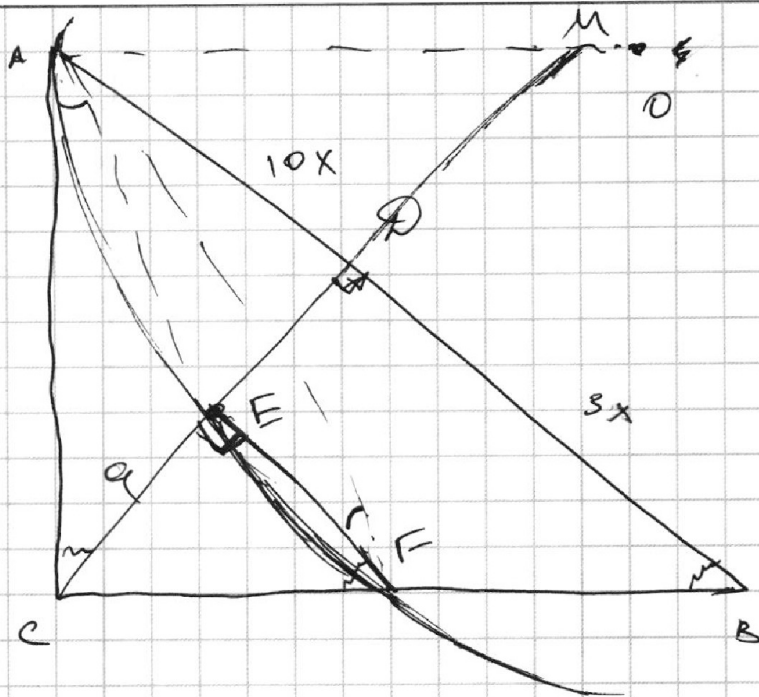
$$\angle AFE = \frac{1}{2} \angle ABE$$

$$\Rightarrow \angle CAE = \angle AFE$$

$$CD = \sqrt{30}x$$

$$AC = \sqrt{150}x$$

$$CD \cdot DM < 100x$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☒	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\text{№3 } \arccos(\sin x) = \frac{3\sqrt{11}}{2} + x$$

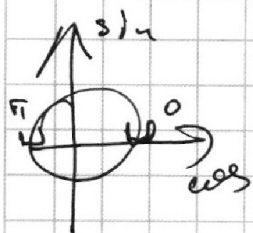
$$x \in [0; 5\sqrt{11}] \Rightarrow x + \frac{3\sqrt{11}}{2} \in [0; 5\sqrt{11}] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x - \frac{\sqrt{11}}{2} \in [-2\sqrt{11}; 3\sqrt{11}]$$

$$\arccos(\sin x) = \arccos(\sin(x - \frac{\sqrt{11}}{2} + \frac{\sqrt{11}}{2})) \sim$$

$$\sim \arccos(\cos(x - \frac{\sqrt{11}}{2}))$$

Пусть $\alpha = x - \frac{\sqrt{11}}{2}$; тогда $\arccos(\cos \alpha)$
при $\alpha \in [-2\sqrt{11}; 3\sqrt{11}]$ может принимать след'щие значения:



~~$\alpha, \alpha + 2\sqrt{11}, \alpha - 2\sqrt{11}$~~

$$\alpha + 2\sqrt{11}; -\alpha; \alpha; 2\sqrt{11} - \alpha; \alpha - 2\sqrt{11}$$

$$(I) \quad (II) \quad (III) \quad (IV) \quad (V)$$

$$I) \arccos(\sin(x + \frac{3\sqrt{11}}{2})) = \frac{3\sqrt{11}}{2} + x$$

$$5x + \frac{15\sqrt{11}}{2} = \frac{3\sqrt{11}}{2} + x \Rightarrow 4x = -12\sqrt{11}$$

Проверка $\arccos(0) = \frac{3\sqrt{11}}{2} - 3\sqrt{11}$ $x = -3\sqrt{11}$ — неверно

$$\geq 0 \quad \leq 0$$

$$II) \arccos(\sin(\frac{\sqrt{11}}{2} - x)) = \frac{3\sqrt{11}}{2} + x$$

$$\frac{\sqrt{11}}{2} - 5x = \frac{3\sqrt{11}}{2} + x$$

$$6x = -\sqrt{11} \Rightarrow x = -\frac{\sqrt{11}}{6}, \text{ Проверка: } \arccos(\frac{1}{2}) = \frac{3\sqrt{11}}{2} + \frac{\sqrt{11}}{6}$$

$$\frac{5\sqrt{11}}{3} = \frac{3\sqrt{11}}{2} + \frac{\sqrt{11}}{6}$$

$$10\sqrt{11} = 10\sqrt{11} - \text{верно}$$

$$III) \arccos(\sin(x - \frac{\sqrt{11}}{2})) = \frac{3\sqrt{11}}{2} + x$$

$$5x - \frac{5\sqrt{11}}{2} = \frac{3\sqrt{11}}{2} + x \Rightarrow 4x = 4\sqrt{11} \Rightarrow x = \sqrt{11}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☒	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Проверка: $5 \arccos(0) = \frac{3\sqrt{11}}{2} + \sqrt{11}$

$$\frac{5\sqrt{11}}{2} = \frac{5\sqrt{11}}{2} - \text{верно}$$

IV) ~~5~~ $5\left(\frac{5\sqrt{11}}{2} - x\right) = \frac{3\sqrt{11}}{2} + 1$

$$\frac{25\sqrt{11}}{2} - 5x = \frac{3\sqrt{11}}{2} + 1$$

$$6x = 11\sqrt{11} \quad x = \frac{11\sqrt{11}}{6}; \text{ Проверка:}$$

$$5 \arccos\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{3\sqrt{11}}{2} + \frac{11\sqrt{11}}{6}$$

$$5 \cdot \frac{2\sqrt{11}}{3} = \frac{5\sqrt{11}}{2} + \frac{11\sqrt{11}}{6}$$

$$\frac{10\sqrt{11}}{3} = \frac{3\sqrt{11}}{2} + \frac{11\sqrt{11}}{6}$$

$$20\sqrt{11} = 9\sqrt{11} + 11\sqrt{11} = 20\sqrt{11} - \text{верно}$$

V) ~~5~~ $5\left(x - \frac{5\sqrt{11}}{2}\right) = \frac{3\sqrt{11}}{2} + x$

$$5x - \frac{25\sqrt{11}}{2} = \frac{3\sqrt{11}}{2} + x$$

$$4x = 14\sqrt{11} \quad x = \frac{7\sqrt{11}}{2}$$

Проверка: $\arccos(-1) = \frac{3\sqrt{11}}{2} + \frac{7\sqrt{11}}{2}$

$$5\sqrt{11} = 5\sqrt{11} - \text{верно}$$

Ответ: $\frac{\sqrt{11}}{6}, \sqrt{11}, \frac{11\sqrt{11}}{6}, \frac{7\sqrt{11}}{2}$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☒ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

МФТИ

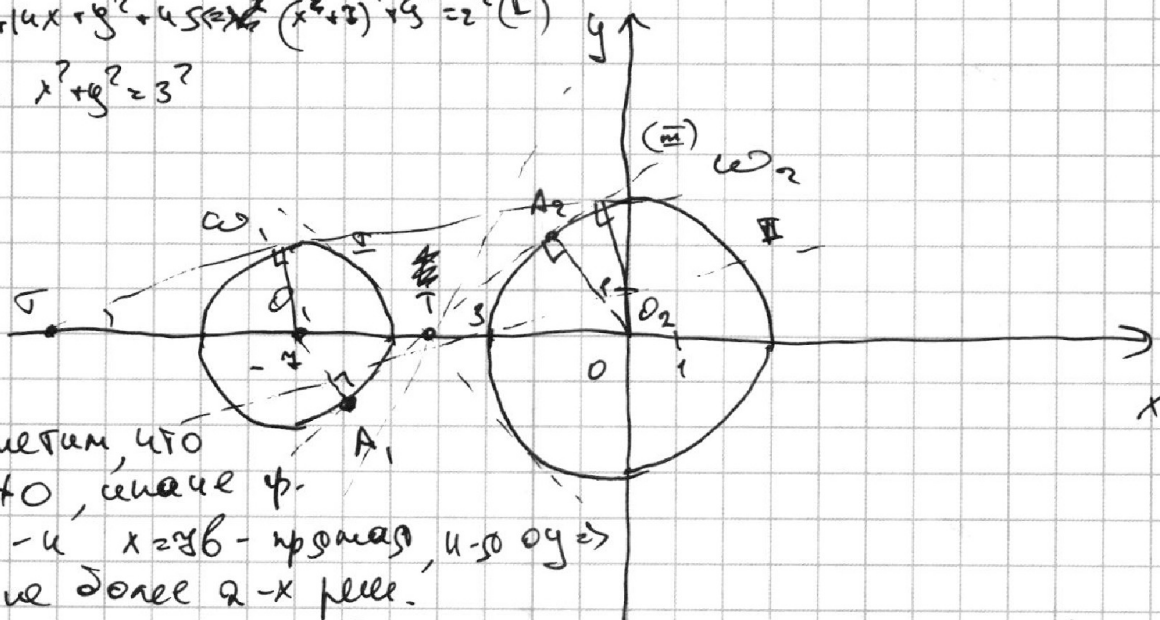
Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{cases} x + 3ay - 3b = 0 \\ (x^2 + 14x + y^2 + 45)(x^2 + y^2 - 9) = 0 \end{cases}$$

4 1 стр

$$x^2 + 14x + y^2 + 45 = 0 \Rightarrow (x^2 + 14x + 49) + y^2 = -45 - 49 = -94$$

$$(II) x^2 + y^2 = 3^2$$



Заметим, что $a \neq 0$, иначе φ -
ор-и $x = 3b$ - прямая, и-до $oy \Rightarrow$
 $\Rightarrow$ не более 2-х реш.

тогда (III): $y = \frac{yb}{3a} - \frac{x}{3a}$, найдем, тогда $a < 0$
и пр. ор. $y = \frac{3b}{3a} - \frac{x}{3a}$ может быть на ω_1, ω_2

пусть T - г. пер. (III) $\in OA$; $\angle O_1TA_1 = \angle A_2TO_2$
или верт, тогда из того $O_1A_1T \sim O_2A_2T \Rightarrow$
 $\Rightarrow \frac{3}{a} = \frac{O_2T}{O_1T}$, пусть $TO_2 = t$, тогда

$$\frac{3}{2} = \frac{t}{3-t} \Rightarrow 21 - 3t = 2t \Rightarrow t = \frac{21}{5}$$

$$\begin{aligned} A_2T &= \sqrt{TO_2^2 - A_2O_2^2} = \sqrt{\frac{441}{25} - 9} = \sqrt{\frac{441 - 225}{25}} = \frac{\sqrt{216}}{5} = \frac{6\sqrt{6}}{5} \\ &= \frac{6\sqrt{6}}{5}; \text{ и } \angle A_2TO_2 = \frac{A_2O_2}{TA_2} = \frac{3}{\frac{6\sqrt{6}}{5}} = \frac{5}{2\sqrt{6}} = \frac{5\sqrt{6}}{12} \end{aligned}$$

4 1 стр

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☒	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Тогда общ. нас при $a < 0 \Leftrightarrow -\frac{1}{3a} = \pm g < A_1, g_2 =$
 $= \frac{5\sqrt{6}}{12} \Rightarrow 3a = -\frac{12}{5\sqrt{6}} \Rightarrow a = -\frac{4}{5\sqrt{6}} = -\frac{4\sqrt{6}}{30 \cdot 15} =$

$= -\frac{2\sqrt{6}}{15}$; при $a \geq 0$ аналог. а общ. нас
 Случаи ~~$a \geq 0$~~ / случаи $a < 0$
 при $a = \frac{2\sqrt{6}}{15}$; тогда если ~~$tg < A_2, g_2$~~

угл. тогда $-\frac{1}{3a} \geq tg < A_2, g_2$ то будет
 не более 2 решений, при угл. тогда $<$
 $tg < A_2, g_2$ ~~$\&$~~ $\exists b$, при которых будет 4 реш.

$\Rightarrow \begin{cases} -\frac{1}{3a} < \frac{6}{2\sqrt{6}} \\ a < 0 \end{cases}, \text{ а также } \begin{cases} -2\sqrt{6} > 15a \\ a < 0 \end{cases} \begin{cases} -\frac{2\sqrt{6}}{15} > a \\ a < 0 \end{cases} \Rightarrow$

$\Rightarrow a \in (0; -\frac{2\sqrt{6}}{15})$ где $a \geq 0$ аналог

$a \in (\frac{2\sqrt{6}}{15}; 0)$

~~$a \in (\frac{2\sqrt{6}}{15}; 0) \cup (0; -\frac{2\sqrt{6}}{15})$~~

Продолжение с листом ~~$\&$~~

и 2 стр

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☒	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

№5 $\log_3^4(6x) - 2\log_{6x} 4 = \log_{36x^2} 343 - 4$

с.ч. $6x > 0, 6x \neq 1 \Rightarrow 36x^2 > 0, 36x^2 \neq 1$

5) $\log_3^4(6x) - \frac{2}{\log_3(6x)} = \frac{3}{2\log_3(6x)} - 4$

$$\frac{\log_3^5(6x) + 4\log_3(6x) - \frac{7}{2}}{\log_3(6x)} = 0$$

6) $\log_3^4 y + 6\log_3 y = \log_{y^2}(y^5) - 4$ аналог $y > 0, y \neq 1 \Rightarrow y > 0, y \neq 1$

$$\log_3^4 y + \frac{6}{\log_3 y} = \frac{5}{2} \log_{y^2} y - 4$$

$$\frac{\log_3^5 y + 4\log_3 y - \frac{7}{2}}{\log_3 y} = 0$$

При $y < 1$ $\log_3^5 y + 4\log_3 y - \frac{7}{2} < 0$

При $y > 1$ $\log_3^5 y + 4\log_3 y - \frac{7}{2}$ не имеет корней $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ не более 1-го решения.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☒

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$\left. \begin{aligned} SL^2 &= SP \cdot SQ \\ MK^2 &= MQ \cdot MP \\ MK &= SP \end{aligned} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow KM = SL, \text{ т.к. } AL = AK \Rightarrow$$

$$\Rightarrow SA = AM = 10$$

$$\text{т.к. } AK = 60^\circ, \angle A_1 = \frac{3}{2} AM = 15,$$

$$S = \frac{h \cdot BE}{2} \Rightarrow h = 12 = AK$$

$$AK^2 = AA_1^2 - A_1K^2 \Rightarrow A_1K = 8 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow KB = 4$$

$$\cos \angle AA_1K = \frac{8}{12} = \frac{2}{3}$$

$$BM^2 = KA_1^2 + BA_1^2 - 2 \cdot KA_1 \cdot BA_1 \cdot \cos \angle KA_1B$$

$$BM^2 = 25 + 25 - 2 \cdot 25 \cdot \frac{3}{4} = 25 \left(2 - \frac{3}{2} \right) = 25 \cdot \frac{1}{2}$$

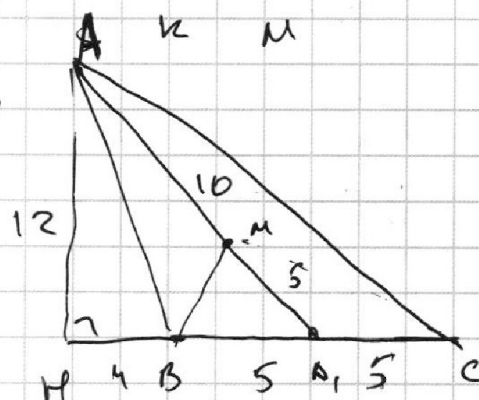
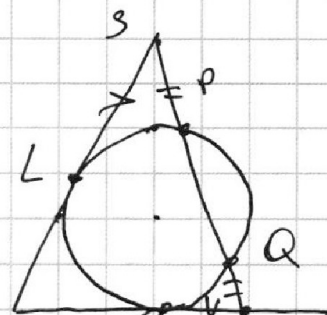
$$BM = 5 \cdot \sqrt{\frac{1}{2}} \Rightarrow BB_1 = \frac{3}{2} BM = \frac{15}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$CM^2 = 25^2 + 25^2 - 2 \cdot 25 \cdot \frac{3}{4} = 25 \left(2 + \frac{3}{2} \right) = 25 \cdot \frac{7}{2}$$

$$CM = 5 \sqrt{\frac{7}{2}}; CC_1 = \frac{3}{2} CM = \frac{15}{2} \sqrt{\frac{7}{2}}$$

$$AA_1 \cdot BB_1 \cdot CC_1 = 15 \cdot \frac{15}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{15}{2} \cdot \sqrt{\frac{7}{2}} =$$

$$= \frac{15^3 \cdot \sqrt{7}}{8} = \frac{3445 \sqrt{7}}{8} \quad \text{Ответ: } \frac{3445 \sqrt{7}}{8}$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☒

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ



б) Пусть O - центр сферы

$\vec{KO}$, $\vec{NO}$ - векторы нормалей

к (ABE) , (SBE) соотв $\Rightarrow$

$$\Rightarrow \angle(\vec{SO}, \vec{NO}) =$$

$$= \angle(NO, KO)$$

$$ON \perp (SBE) \Rightarrow ON \perp BE \quad \Rightarrow$$

$$AK \perp BE$$

$$\Rightarrow ON \parallel AK \Rightarrow \angle(SBE, A) =$$

$$= \angle(NO, KO) = \angle(AK, KO)$$

$$SO = \sqrt{ON^2 + KO^2} = 5; \quad SL = \sqrt{SO^2 - OL^2} = 3 = KM \text{ и } SO$$

Две прямые AK и KW пересекаются в K , одна перпендикулярна BE , другая нет, тогда $AK \perp KW \Rightarrow KW \perp BE \Rightarrow \angle(AK, KO) =$

$$= \angle(KW, KO) = \angle OKW, \text{ т.к. } OK \perp (ABE), \text{ тогда}$$

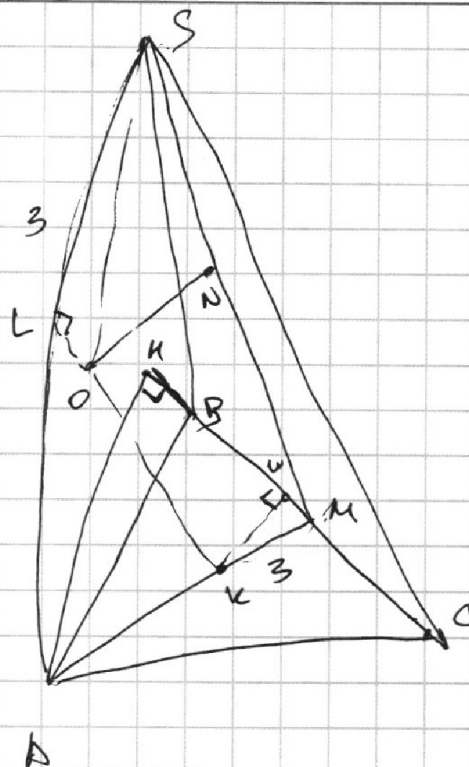
$$\triangle OKM \sim \triangle KWM \Rightarrow \frac{OK}{KW} = \frac{KM}{AM} \cdot AK = \frac{3}{15} \cdot 12 = \frac{12}{5}$$

$$OK = \frac{12}{5}$$

$$OW = \sqrt{OK^2 + KW^2} = \sqrt{\left(\frac{12}{5}\right)^2 + \left(\frac{12}{5}\right)^2} = \sqrt{\frac{144}{25} + \frac{144}{25}} =$$

$$= \frac{4}{5} \sqrt{1 + \frac{9}{25}} = \frac{4}{5} \sqrt{\frac{36}{25}} = \frac{4 \cdot 6}{5} = \frac{24}{5}$$

Ответ: $\frac{24}{5}$





На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

 **МФТИ**

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{array}{r} 432 \\ 216 \\ 108 \\ 8 \\ 54 \\ 27 \end{array} \begin{array}{l} 2 \\ 2 \\ 2 \\ \\ 2 \\ 2 \end{array}$$

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☒	☒	☒	☒

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

б) пусть O - центр сферы
 $\vec{KO}, \vec{NO}$ - векторы нормали
 $\kappa(ABE), (SBE)$ - сфер. $\rightarrow$
 $\Rightarrow \angle(S(BE)A) =$

$$= \angle(NO; KO)$$

в) пусть O - ц. сферы

$$\text{а) } \left. \begin{array}{l} AK \perp BC \\ OK \perp (ABE) \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} OK \perp BC \text{ по } \Delta \Delta \Pi \\ OK \perp (ABE) \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\text{б) } \left. \begin{array}{l} OK \perp BC \\ ON \perp (SBE) \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} NK \perp BC \text{ по } \Delta \Delta \Pi \\ NK \perp (SBE) \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \angle AKN = \angle S(BE)A$$

$$\text{а) } SO = \sqrt{SN^2 + ON^2} = 5 \Rightarrow OL = \sqrt{5^2 - 4^2} = 3,$$

$$\text{по } \Delta \Delta ALO \text{ } AL = 4, KM = 3; OA = \sqrt{3^2 + 4^2} = \sqrt{49 + 16} = \sqrt{65}; OM = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5, \text{ т.к. } OK \perp BC,$$

$$\text{то } OK = \sqrt{OM^2 - KM^2} = \sqrt{25 - 9} = \sqrt{16} = 4;$$

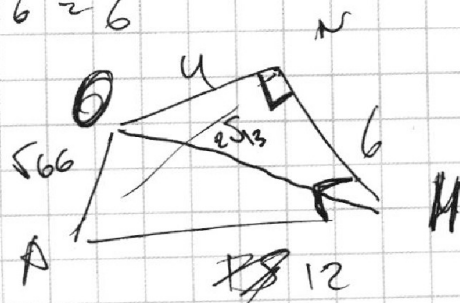
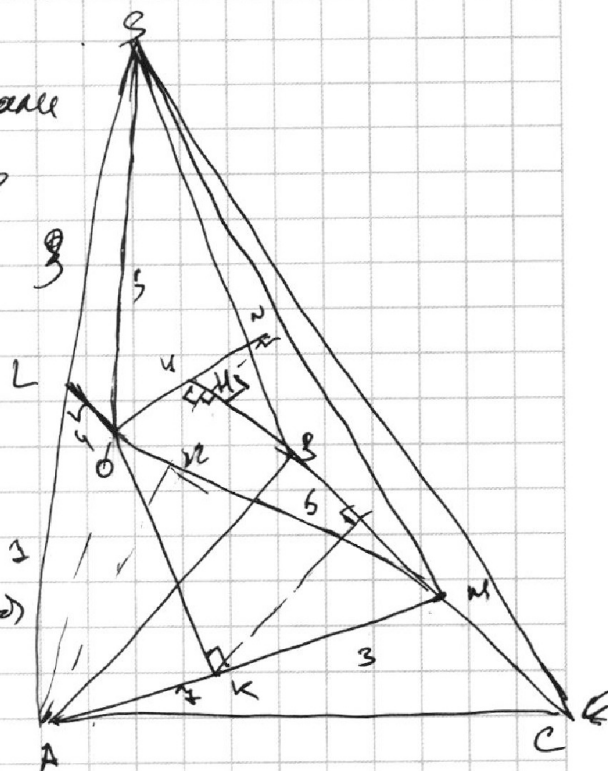
$$\text{а) } OK = 4, ON = 3 \Rightarrow \sqrt{4^2 - 3^2} = \sqrt{16 - 9} = \sqrt{7} = \sqrt{13}; NK =$$

$$\sqrt{OK^2 - ON^2} = \sqrt{16 - 9} = \sqrt{7} = \sqrt{36} = 6$$

$$ON \perp (SBE) \Rightarrow ON \perp BC \Rightarrow$$

$$AK \perp BC$$

$$\Rightarrow ON \parallel AK \Rightarrow \angle AKN =$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

$$ab: 2^8 3^4 \cdot 5^{14}, bc: 2^{15} 3^{15} 5^{18}, ac: 2^{14} 3^{17} 5^{43}$$

$$\min(abc)? \quad abc: 2^{14} 3^{17} 5^{43}$$

$$a = 2^{\alpha_1} 3^{\beta_1} 5^{\gamma_1}, b = 2^{\alpha_2} 3^{\beta_2} 5^{\gamma_2}, c = 2^{\alpha_3} 3^{\beta_3} 5^{\gamma_3}$$

$$\alpha_1 + \alpha_2 \geq 8$$

$$\beta_1 + \beta_2 \geq 11$$

$$\gamma_1 + \gamma_2 \geq 14$$

$$\alpha_2 + \alpha_3 \geq 15$$

$$\beta_2 + \beta_3 \geq 15$$

$$\gamma_2 + \gamma_3 \geq 18$$

$$\alpha_3 + \alpha_1 \geq 14$$

$$\beta_3 + \beta_1 \geq 17$$

$$\gamma_3 + \gamma_1 \geq 43$$

$$\frac{11}{12}$$

$$\frac{11}{3}$$

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 \geq \frac{8+13+14}{2} = 17$$

$$b$$

$$\frac{8}{3}$$

$$\frac{16}{32}$$

$$\frac{81}{243}$$

$$a$$

$$c = 10$$

$$b = 45$$

$$a = 4$$

$$+5 + 4 + \dots = 3 + \frac{1}{2}$$

$$648$$

$$\frac{32}{243} + \frac{8}{3} =$$

$$\frac{81}{648}$$

$$c = 10$$

$$a = 4$$

$$b = 5$$

$$\frac{43}{-14}$$

$$\frac{\pi}{2}$$

$$5 \arccos(\cos(x)) = \frac{3\pi}{2} + x$$

$$a = 14$$

$$52$$

$$5 \arccos(\cos(x - \frac{\pi}{2})) = \frac{3\pi}{2} + x$$

$$5 \arccos 0 = \frac{5\pi}{2} = \frac{12286}{3125}$$

$$5 \arccos(\cos(x - \frac{\pi}{2})) = \frac{3\pi}{2} + x$$

$$\frac{43}{-14}$$

$$5x - \frac{5\pi}{2} = \frac{3\pi}{2} + x$$

$$4x = \frac{8\pi}{2} \Rightarrow x = \pi$$

$$x = \pi$$

$$x - y = y^5 - x^5$$

$$x - y = (y - x)(y^4 + y^3x + y^2x^2 + yx^3 + x^4)$$

$$(y - x)(\dots + 1) = 0$$

$$(y - x)(y^4 + y^3x + y^2x^2 + yx^3 + x^4) + (y - x)$$

$$\log_3 y = \log_3 6x$$

$$y = 6x$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$5 \arccos(\sin x) = \frac{3\sqrt{11}}{2} + x$$

$$x \in [0; \sqrt{11}] \Rightarrow x \in \left[-\frac{3\sqrt{11}}{2}; \frac{3\sqrt{11}}{2}\right]$$

$$\frac{5\sqrt{11} - \frac{3\sqrt{11}}{2}}{10\sqrt{11} - \frac{3\sqrt{11}}{2}}$$

$$5 \arccos\left(\cos\left(x - \frac{\sqrt{11}}{2}\right)\right) = \frac{3\sqrt{11}}{2} + x$$

$$x - \frac{\sqrt{11}}{2} \in [0; \sqrt{11}]$$

$$x - \frac{\sqrt{11}}{2} \in [-2\sqrt{11}; 4\sqrt{11}]$$

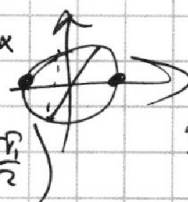
$$5x - \frac{5\sqrt{11}}{2} = \frac{3\sqrt{11}}{2} + x \Rightarrow x = \sqrt{11}$$

$$x \in [\sqrt{11}; 2\sqrt{11}]$$

$$-5x = \frac{5\sqrt{11}}{2} = \frac{3\sqrt{11}}{2} + x$$

$$-6x = -\sqrt{11}$$

$$x = \frac{\sqrt{11}}{6}$$



$$5\left(2\sqrt{11} - x + \frac{\sqrt{11}}{2}\right) = \frac{3\sqrt{11}}{2} + x$$

$$10\sqrt{11} + \frac{5\sqrt{11}}{2} - 5x - \frac{3\sqrt{11}}{2} = x$$

$$11\sqrt{11} = 6x \Rightarrow x = \frac{11\sqrt{11}}{6}$$



$$x - \frac{\sqrt{11}}{2} \in [2\sqrt{11}; 3\sqrt{11}]$$

$$5\left(x - \frac{\sqrt{11}}{2} - 2\sqrt{11}\right) = \frac{3\sqrt{11}}{2} + x$$

$$5x - \frac{5\sqrt{11}}{2} - 10\sqrt{11} = \frac{3\sqrt{11}}{2} + x$$

$$4x = 10\sqrt{11} + 4\sqrt{11} = 14\sqrt{11}$$

$$x = \frac{14\sqrt{11}}{4} = \frac{7\sqrt{11}}{2}$$

$$\frac{5\sqrt{11}}{3} = \frac{3\sqrt{11}}{2} + \frac{\sqrt{11}}{6}$$

$$10\sqrt{11} = 9\sqrt{11} + \sqrt{11}$$



$$x \in [3\sqrt{11}; 4\sqrt{11}]$$

$$\alpha + 2\sqrt{11}; -\alpha; \alpha; 2\sqrt{11} - \alpha; \alpha - 2\sqrt{11}$$

$$5\left(4\sqrt{11} - x + \frac{\sqrt{11}}{2}\right) = \frac{3\sqrt{11}}{2} + x$$

$$20\sqrt{11} - 5x + \frac{5\sqrt{11}}{2} = \frac{3\sqrt{11}}{2} + x$$

$$6x = 21\sqrt{11}$$

$$x = \frac{21\sqrt{11}}{6} = \frac{7\sqrt{11}}{2}$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

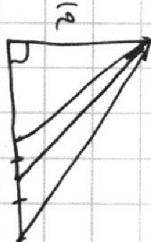
1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

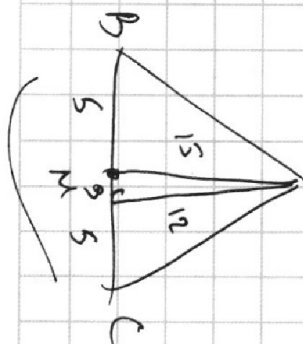
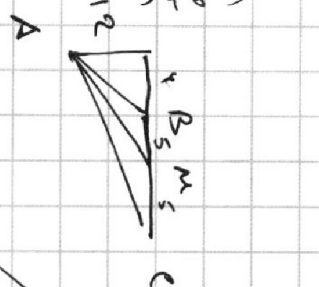
Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{array}{r} 225 \\ \times 15 \\ \hline 3375 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 225 \\ \times 15 \\ \hline \end{array}$$



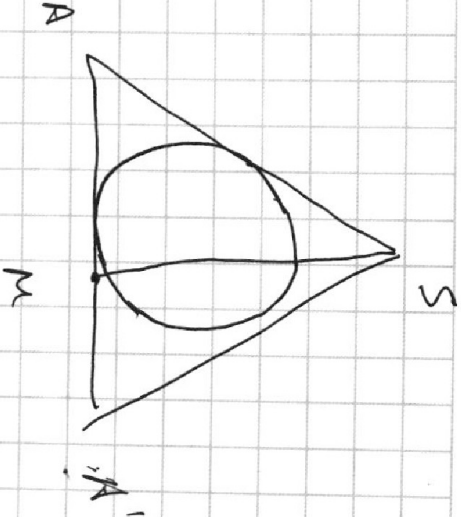
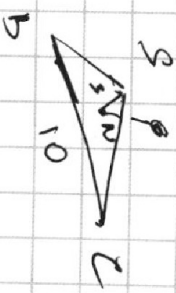
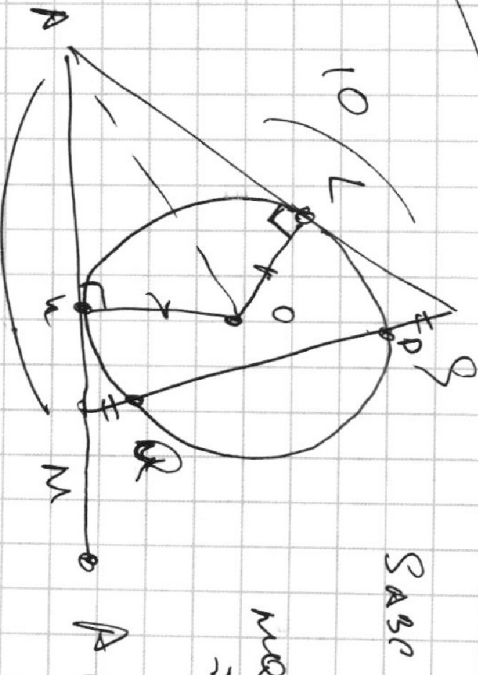
$$\begin{array}{r} 225 \\ \times 15 \\ \hline 1125 \\ 4500 \\ \hline 3375 \end{array}$$



$$\begin{array}{r} 225 \\ \times 15 \\ \hline \end{array}$$

10

10



$$S_{ABP} \approx 6$$

$$MQ \cdot PR = SP \cdot SQ \Rightarrow \\ \Rightarrow MQ = 15$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$\log_3^4(6x) - 2 \log_{6x} 3 = \log_{36x} 343 - 4$$

$$4 | \log_3(6x)) - 2 \log_{6x} 3 = \frac{3}{2} \log_{6x} 343 - 4$$

$$\frac{4}{|\log_{6x} 3|} - \frac{3}{2} \log_{6x} 3 = -4$$

$$\frac{3}{2} \log_{6x} 3 - \frac{4}{|\log_{6x} 3|} = 4 \rightarrow \log_{6x} 3 = 0$$

$$\frac{3}{2} \log_{6x} 3 - \frac{4}{\log_{6x} 3} = 4$$

$$3 \log_{6x} 3 - \frac{8}{\log_{6x} 3} = 8$$

$$\frac{3 \log_{6x}^2 3 - 8 \log_{6x} 3 - 8}{\log_{6x} 3} = 0$$

$$8 - 56$$

$$y_1 = 4, 1, 4$$

$$\frac{2}{4} = 16 +$$

$$+5 + 4 + -\frac{7}{2}$$

$$+ \left(\frac{4}{1+4} \right) = \frac{4}{5}$$

$$x, y \in \mathbb{R}$$

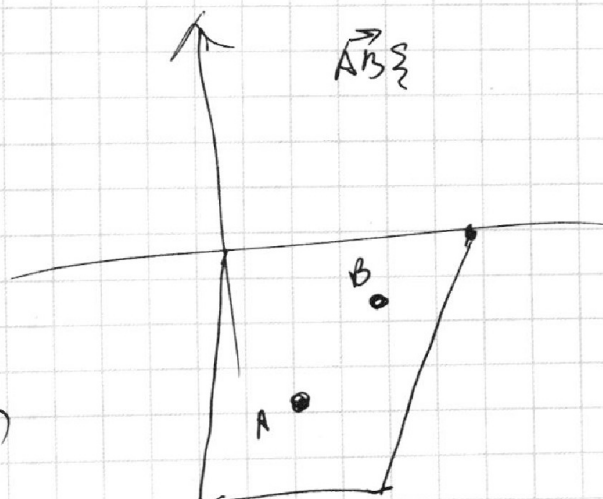
$$A(x_1, y_1)$$

$$B(x_2, y_2)$$

$$4x_2 - 4x_1$$

$$+ y_2 - y_1 = 40$$

$$4x_2 - 4x_1 + y_2 - y_1 = 40$$



$$4(x_2 - x_1) + y_2 - y_1 = 40$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

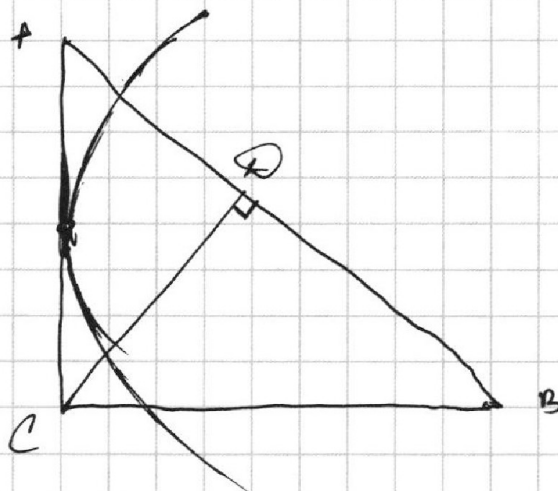
$$\log_3^4(6x) - 2 \log_3 6x^4 =$$

$$\downarrow 4 - \frac{2}{t} = \frac{3}{2t} - 4$$

$$t^5 - 2 = -\frac{3}{2} - 4t$$

$$\downarrow 5 - 4t = \frac{1}{2}$$

$$\downarrow (t^4 - 4) = \frac{1}{2}$$

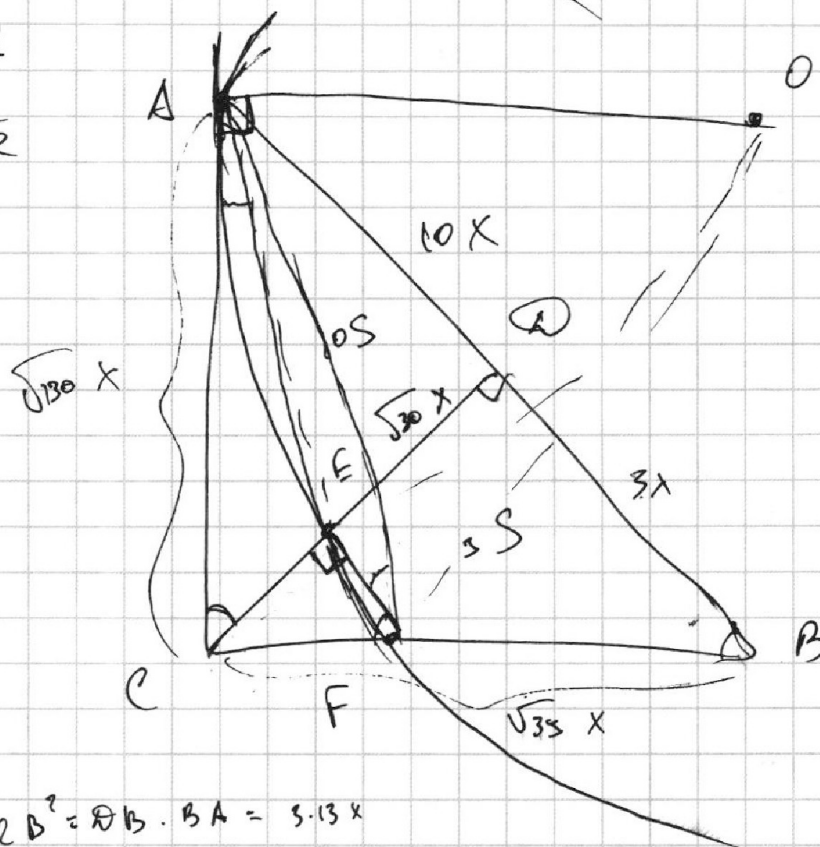


AB и EF

AB:

S_{AOC}

S_{CEF}



$$CB^2 = AB \cdot BA = 3 \cdot 13x$$

$$\sqrt{33} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{10}{3} = \sqrt{10} \cdot \sqrt{13} \cdot \frac{10}{3\sqrt{3}} \quad 100$$

$$\frac{CB}{BD} = \frac{AB}{CB}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$x + 3ay - 7b = 0$$

$$(x^2 + (4x + y^2 + 45)(x^2 + y^2 - 9)) = 0$$

$$\log_3^4 y + \log_3^6 y = \frac{5}{2} \log_3 y - 4$$

$$\log_3^5 y + 4 \log_3^4 y = \frac{5}{2} - 6 = -\frac{7}{2}$$

$$\log_3^4 6x - 2 \log_3^3 6x = \frac{3}{2}$$

$$(x^2 + 7)^2 + y^2 = 7$$

$$a \neq 0$$

$$3ay - 7b - x$$

$$y = \frac{7b}{3a} - \frac{x}{3a}$$

$$x^2 + 4x = \frac{7}{2}$$

$$\begin{array}{r|l} 216 & 6 \\ \hline 18 & 36 \\ \hline 36 & \end{array}$$

$$\log_7^5 a + \log_7^4 a - \frac{7}{2} = 0$$

$$\log_7^5 b + \log_7^4 b - \frac{7}{2} = 0$$

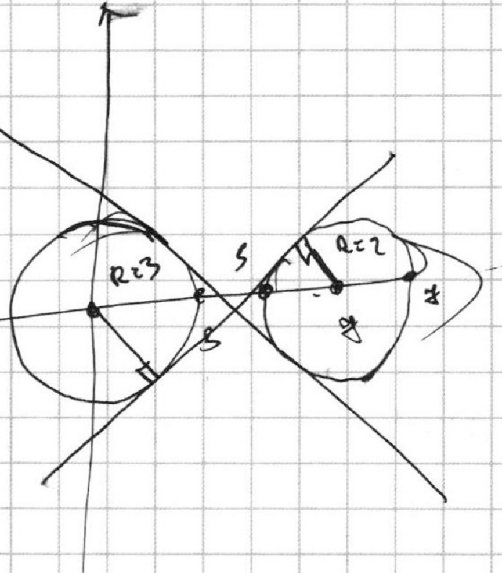
$$\log_7^5 a + \log_7^5 b + \log_7^4 a + \log_7^4 b - 7 = 0$$

$$\log_7^5 a + \log_7^4 a = \log_7^5 b + \log_7^4 b$$

$$\log_7^5 a - \log_7^5 b = \log_7^5 b - \log_7^4 a = \log_7^4$$

$$-2 - \frac{3}{2} =$$

$$= -\frac{7}{2}$$



$$\frac{2}{3} =$$

$$\frac{25}{9}$$

$$f(t) = t^5 + 1t - \frac{7}{2} = 0$$

$$f' = 5t^4 + 4$$

$$x^5 y^5 + x + y - 7 = 0$$

$$\frac{441}{216} (x+y)(x^4 - x^3 y + x^2 y^2 - x y^3 + y^4) = 0$$

$$\log_7^4(ab)$$

$$(x+y)(x^4 + x^3)$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

