



МОСКОВСКИЙ  
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ  
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"  
ПО МАТЕМАТИКЕ

11 КЛАСС. Вариант 3



1. [4 балла] Натуральные числа  $a$ ,  $b$ ,  $c$  таковы, что  $ab$  делится на  $2^8 3^{14} 5^{12}$ ,  $bc$  делится на  $2^{12} 3^{20} 5^{17}$ ,  $ac$  делится на  $2^{14} 3^{21} 5^{39}$ . Найдите наименьшее возможное значение произведения  $abc$ .
2. [5 баллов] Дан прямоугольный треугольник  $ABC$ . Окружность, касающаяся прямой  $BC$  в точке  $B$ , пересекает высоту  $CD$ , проведённую к гипотенузе, в точке  $F$ , а катет  $AC$  – в точке  $E$ . Известно, что  $AB \parallel EF$ ,  $AD : DB = 5 : 2$ . Найдите отношение площади треугольника  $ABC$  к площади треугольника  $CEF$ .

3. [4 балла] Решите уравнение  $10 \arcsin(\cos x) = \pi - 2x$ .

4. [5 баллов] Найдите все значения параметра  $a$ , для каждого из которых найдётся значение параметра  $b$ , при котором система уравнений

$$\begin{cases} ax - 3y + 4b = 0, \\ (x^2 + y^2 - 1)(x^2 + y^2 - 20y + 64) = 0 \end{cases}$$

имеет ровно 4 решения.

5. [5 баллов] Некоторые числа  $x$  и  $y$  удовлетворяют равенствам

$$\log_5^4(2x) - 3 \log_{2x} 5 = \log_{8x} 625 - 3, \quad \text{и} \quad \log_5^4 y + 4 \log_y 5 = \log_{y^3} 0,2 - 3.$$

Найдите все возможные значения произведения  $xy$ .

6. [5 баллов] На координатной плоскости дан параллелограмм с вершинами в точках  $O(0;0)$ ,  $P(-16;80)$ ,  $Q(2;80)$  и  $R(18;0)$ . Найдите количество пар точек  $A(x_1; y_1)$  и  $B(x_2; y_2)$  с целыми координатами, лежащих в этом параллелограмме (возможно, на границе) и таких, что  $5x_2 - 5x_1 + y_2 - y_1 = 45$ .

7. [6 баллов] Дана треугольная пирамида  $SABC$ , медианы  $AA_1$ ,  $BB_1$  и  $CC_1$  треугольника  $ABC$  пересекаются в точке  $M$ . Сфера  $\Omega$  касается ребра  $AS$  в точке  $L$  и касается плоскости основания пирамиды в точке  $K$ , лежащей на отрезке  $AM$ . Сфера  $\Omega$  пересекает отрезок  $SM$  в точках  $P$  и  $Q$ . Известно, что  $SP = MQ$ , площадь треугольника  $ABC$  равна 100,  $SA = BC = 16$ .

а) Найдите произведение длин медиан  $AA_1$ ,  $BB_1$  и  $CC_1$ .

б) Найдите двугранный угол при ребре  $BC$  пирамиды, если дополнительно известно, что  $\Omega$  касается грани  $BCS$  в точке  $N$ ,  $SN = 4$ , а радиус сферы  $\Omega$  равен 5.



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:

|                                     |                          |                          |                          |                          |                          |                          |
|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1                                   | 2                        | 3                        | 4                        | 5                        | 6                        | 7                        |
| <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

**МФТИ**

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

П.к.  $ab: 2^8 \cdot 3^{14} \cdot 5^{12}; bc: 2^{12} \cdot 3^{20} \cdot 5^{17}; ac: 2^{14} \cdot 3^{21} \cdot 5^{39} \Rightarrow$

$$\Rightarrow ab \cdot bc \cdot ac = (abc)^2 : 2^{34} \cdot 3^{55} \cdot 5^{68}$$

$$\Rightarrow abc : 2^{17} \cdot 3^{28} \cdot 5^{34}, \text{ но } abc : ac : 2^{14} \cdot 3^{21} \cdot 5^{39} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow abc : 2^{14} \cdot 3^{28} \cdot 5^{39} \Rightarrow \min(abc) = 2^{14} \cdot 3^{28} \cdot 5^{39}$$

Пример на  $2^{17} \cdot 3^{28} \cdot 5^{34}$

$$a = 2^5 \cdot 3^8 \cdot 5^{22}$$

$$b = 2^3 \cdot 3^7$$

$$c = 2^9 \cdot 3^{14} \cdot 5^{27}$$

$$bc = 2^{12} \cdot 3^{21} \cdot 5^{17}$$

$$ac = 2^{14} \cdot 3^{22} \cdot 5^{39}$$

$$ab = 2^8 \cdot 3^{15} \cdot 5^{22}$$

} все условия  
выполнены

|                          |                                     |                          |                          |                          |                          |                          |
|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1                        | 2                                   | 3                        | 4                        | 5                        | 6                        | 7                        |
| <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$\angle ACD = 5\alpha \Rightarrow$$

$$\Rightarrow BD = 2\alpha \Rightarrow AB = 4\alpha$$

$$1 = \cos(\angle CAB) : \cos(\angle CAD) =$$

$$= \frac{CA}{AB} : \frac{AD}{CA} = \frac{CA^2}{35\alpha^2} = 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow CA = \sqrt{35}\alpha \Rightarrow \text{по } \Delta \text{ Пифагора } BC = \sqrt{14}\alpha \Rightarrow CD = \sqrt{10}\alpha$$

$$\angle CBF = \angle FBE = \angle EBA \quad (II)$$

(каждому)

$$\left. \begin{aligned} \angle BCD &= \angle CAB \text{ (по 8 умов)} \\ \angle CAB &= \angle CEF \text{ (II)} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \Delta BFC \sim \Delta BEA \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \angle CF = y \Rightarrow \frac{CF}{EA} = \frac{BC}{AB} = \frac{\sqrt{14}}{4} \Rightarrow EA = \frac{4}{\sqrt{14}} y \sqrt{\frac{7}{2}} y$$

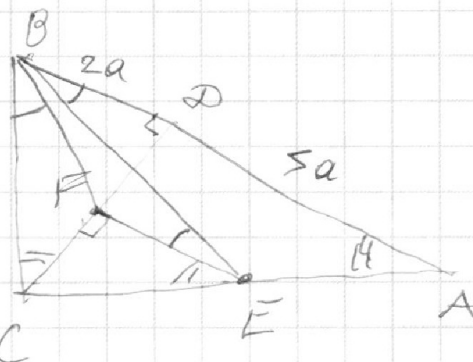
$$\Delta CFE \sim \Delta CDA \Rightarrow \frac{CE}{CF} = \frac{CA}{CD} = \sqrt{\frac{35}{10}} \Rightarrow EC = \sqrt{\frac{35}{10}} y \Rightarrow$$

$$\Rightarrow EC = EA \Rightarrow FE - \text{выс. медиан } \Delta ACD \Rightarrow$$

$$\Rightarrow S_{CEF} = \frac{1}{4} S_{CAD} = \frac{1}{4} CD \cdot AD = \frac{\sqrt{10} \cdot 5}{8} \alpha^2$$

$$S_{ABC} = \frac{1}{2} BC \cdot AC = \frac{\sqrt{14} \cdot \sqrt{35}}{2} \alpha^2 \Rightarrow \frac{S_{ABC}}{S_{CEF}} = \frac{4 \cdot 4}{5} =$$

$$= 5,6$$





На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

|                          |                          |                                     |                          |                          |                          |                          |
|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1                        | 2                        | 3                                   | 4                        | 5                        | 6                        | 7                        |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

**МФТИ**

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$10 \arcsin(\sin(x)) = 10 \arcsin\left(\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)\right) = \pi - 2x$$

$$\forall k. 10 \arcsin(\cdot) \in [-5\pi; 5\pi] \Rightarrow x \in [-2\pi; 3\pi]$$

$$\begin{cases} 10 \arcsin(\sin(\frac{\pi}{2} - x)) = 5\pi - 10x + 20\pi k_1, \\ 10 \arcsin(\sin(\frac{\pi}{2} - x)) = 5\pi + 10x + 20\pi k_2 \end{cases} \quad k \in \mathbb{Z}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 4\pi + 20\pi k_1 = 12x \\ 4\pi + 20\pi k_2 = -8x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3x = \pi + 5\pi k_1 \\ 2x = -\pi + 5\pi k_2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow x \in \left\{ \underbrace{-\frac{4}{3}\pi}_{(k=-1)}, \underbrace{\frac{\pi}{3}}_{(k=0)}, \underbrace{2\pi}_{(k=1)} \right\} \cup \left\{ \underbrace{-2\pi}_{(k=-1)}, \underbrace{-\frac{\pi}{2}}_{(k=0)}, \underbrace{3\pi}_{(k=1)} \right\} \Rightarrow$$

⊕   ⊕   ⊕   ⊕   ⊕   ⊕

$$\text{Ответ: } x \in \left\{ -3\pi, -\frac{4}{3}\pi, -\frac{1}{2}\pi, \frac{1}{3}\pi, \frac{2}{3}\pi, 2\pi, 3\pi \right\}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:

|                          |                          |                          |                                     |                          |                          |                          |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1                        | 2                        | 3                        | 4                                   | 5                        | 6                        | 7                        |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

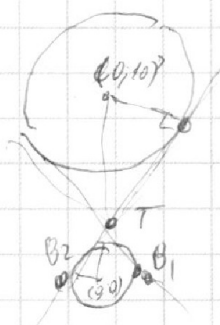
**МФТИ**

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$\begin{cases} y = \frac{a}{3}x + \frac{4b}{3} & \text{— прямая} \\ \begin{cases} x^2 + y^2 = 1 \\ x^2 + (y-10)^2 = 10^2 - 64 = 6^2 \end{cases} & \text{— две окружности} \end{cases} \Rightarrow \text{решений} \leq 4$$

центрами  $O(0;0)$  и  $O'(0;10)$  и радиусами  $r=1$  и  $R=6$ .  $\Rightarrow$  Т-точка пересеч. двух касательных  $\Rightarrow T(0; 10 \cdot \frac{r}{R+r}) = (0; \frac{10}{4}) \Rightarrow$  т.к.



Лемма: Если система

имеет ~~ровно~~ 4 корня, то  $\Leftrightarrow$

$$\text{и } \begin{cases} y = \frac{a}{3}x + \frac{10}{4} & \text{— (прямая, проходящая через T)} \\ \begin{cases} x^2 + y^2 = 1^2 \\ x^2 + (y-10)^2 = 6^2 \end{cases} & \text{, тоже 4 корня} \end{cases}$$

Док-во:

1)  $\Leftarrow$ : подставим  $b = \frac{10}{4} \cdot \frac{3}{4} \Rightarrow$  получим 4 корня

2)  $\Rightarrow$ : ] Это не так. Когда система из леммы имеет либо 2 корня (прямая будет касательной), либо 0 корней. Если  $b > \frac{10}{4} \cdot \frac{3}{4}$ , то прямая  $y = \frac{a}{3}x + \frac{4}{3}b$  не пересечет ни одну окружность! И, если  $b < \frac{10}{4} \cdot \frac{3}{4} \Rightarrow$  прямая не пересечет верхней окружности  $\Rightarrow$  X.  $\Rightarrow$  лемма доказана



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

|                          |                          |                          |                                     |                          |                          |                          |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1                        | 2                        | 3                        | 4                                   | 5                        | 6                        | 7                        |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

**МФТИ**

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$P_1, P_2$  - точки касания  $\Gamma$  с  $T \Rightarrow$

$\Rightarrow P_1$  - пересечения  $D_x$  с касательными  
из  $T$  к окр. с радиусом  $r=1$ .  $\Rightarrow$

$$P_1 \left( \frac{10}{4} \cdot \frac{7}{\sqrt{51}}; 0 \right) = P_1 \left( \frac{10}{\sqrt{51}}; 0 \right); P_2 \left( -\frac{10}{\sqrt{51}}; 0 \right) \Rightarrow$$

$\Rightarrow$  прямая  $y = \frac{a}{3}x + \frac{10}{4}$  пересекает отрезок

$$[P_1, P_2]. (\exists \text{ в точке } x_0) \Rightarrow y=0 = \frac{a}{3}x_0 + \frac{10}{4} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x_0 = \frac{-30}{4a} \quad (\text{т.к. } x_0 \text{ - окр.} \Rightarrow a \neq 0) \quad (\text{при } a=0, \text{ было}$$

$$0 \text{ корней}) \Rightarrow \frac{1}{4a} \in \left[ -\frac{1}{3\sqrt{51}}; \frac{1}{3\sqrt{51}} \right] \Rightarrow a \in (-\infty; \frac{3\sqrt{51}}{4}) \cup$$

$$\cup \left( \frac{3\sqrt{51}}{4}; +\infty \right)$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:

|                          |                          |                          |                          |                                     |                          |                          |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1                        | 2                        | 3                        | 4                        | 5                                   | 6                        | 7                        |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

**МФТИ**

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{cases} (\log_5(2x))^4 - 3\left(\frac{1}{\log_5(2x)}\right) = \frac{4}{3}\left(\frac{1}{\log_5(2x)}\right) - 3 \\ (\log_5(y))^4 + 4\left(\frac{1}{\log_5(y)}\right) = -\frac{1}{3}\left(\frac{1}{\log_5(y)}\right) - 3 \end{cases} \quad \begin{cases} 0 \neq 3; \\ x > 0 \\ y > 0 \\ x + \frac{1}{x} \\ y + \frac{1}{y} \end{cases}$$

$$\begin{cases} a = \log_5(2x) \\ b = \log_5(y) \end{cases} \Rightarrow xy = \frac{5^{(a+b)}}{2}$$

$$\begin{cases} a^5 - \frac{13}{3} + 3a = 0 \\ b^5 + \frac{13}{3} + 3b = 0 \end{cases} \Rightarrow (a+b)(3 + a^4 - a^3b + a^2b^2 - ab^3 + b^4) = 0$$

$$\downarrow$$

$$a^5 + a + b^5 + b = 0$$

$f(x) = x^5 + x$  — монотонно-возрастающая функция  
 $\Rightarrow$  корней при фиксированном  $b$  у уравнения  
 $f(a) = -b^5 - b$  не более 1. А корень у него  
 $a = -b \Rightarrow a$  всегда  $= -b \Rightarrow a + b = 0 \Rightarrow$   
 $\Rightarrow xy = \frac{5^0}{2} = \frac{1}{2}$ . (тогда  $xy$  существует, т.к.  
 $f(a) = \frac{13}{3}$  — имеет корень (между 1 и 2)  $\Rightarrow$   
 $\Rightarrow$  существуют  $x, y$ )



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

[illegible]

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

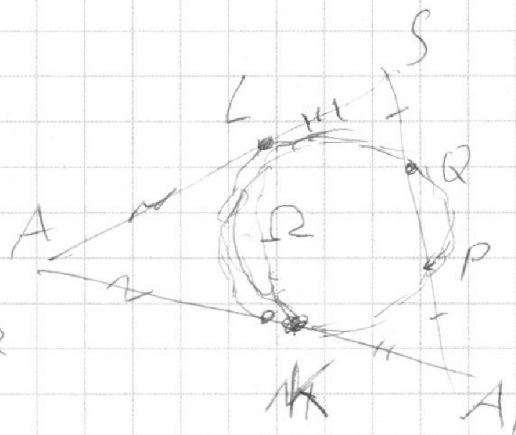
**МФТИ**

а) Разложим плоскость  $ASA_1$

Получа:

$$A, \beta = SQ$$

$$A, Q \stackrel{u}{=} P \S$$



$$A_1 P A_1 Q = S Q \cdot S P = S L^2$$

11 (continued)  
A, AX 2 more A  
on 23

(степень  
точки 9  
от 52)

$$\Rightarrow LS = MA,;$$

$$AL = A \setminus K - (\text{Komplemente von } A \text{ zu } \Omega) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow AS = AA_1 = BC = 16$$

Рассмотрим плоскость  $ABE$

$$\overline{m} = 2 \overline{AA'} \Rightarrow |\overline{m}| = 32 \quad \overline{CC'} = \frac{\overline{m} - 3\pi}{4}$$

$$\bar{n} = \overline{CB} \Rightarrow |\bar{n}| = 16 \quad \int \overline{\theta\theta'} = \frac{\bar{m} + \pi\bar{n}}{4}$$

$$S_{AOC} = \frac{1}{2} OC \cdot AA_1 \cdot \sin(\angle AA_1B) = 8.16 \sin(\angle AA_1B) = 100$$

$$\Rightarrow \cos(\angle A_1 B) = \frac{+ \sqrt{399}}{32} \Rightarrow \overline{C_1}^2 + \overline{B_1}^2 = (13.16 + \frac{3}{4} \sqrt{399})^2$$

$$\bullet (13.16 - \frac{3}{4} \sqrt{3.99}) = 9.1664 - \frac{9}{4} \cdot 3.99 =$$

$$\Rightarrow AA_1 \cdot BB_1 \cdot CC_1 = \sqrt{40^2 + 64^2 + \frac{9}{4}} \cdot 16$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

|                          |                          |                          |                          |                          |                          |                                     |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|
| 1                        | 2                        | 3                        | 4                        | 5                        | 6                        | 7                                   |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> |

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



д) Рассмотрим плоскость  $ASN$

$\Rightarrow NS = SL$  (т.к. касательная)

из мы знаем, что

$$SL = AK.$$

Тогда центр  $\Omega$

лежит на плоскости  $\perp SA$ , и проходящей

через середину (т.к. степени точек  $A$  и  $S$

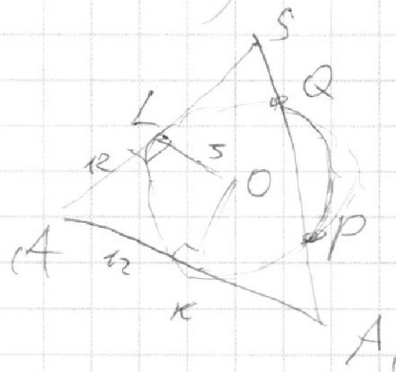
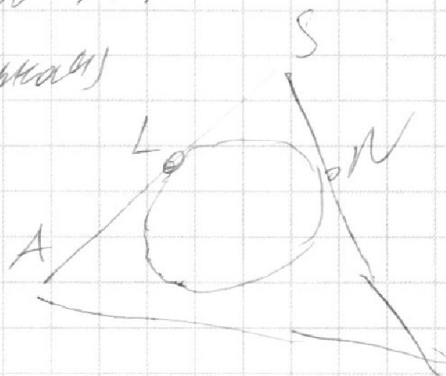
равны); лежит на  $\perp$  из  $K$  (от плоскости  $ADF$ );

~~лежит~~  $\Rightarrow O$  - центр  $\Omega \in (SAA_1)$

$$AK = AA_1 - AK = 12$$

Уч - основания вписаны

из  $A$  и  $AK$







На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

|                          |                          |                          |                          |                          |                          |                          |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1                        | 2                        | 3                        | 4                        | 5                        | 6                        | 7                        |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

**МФТИ**

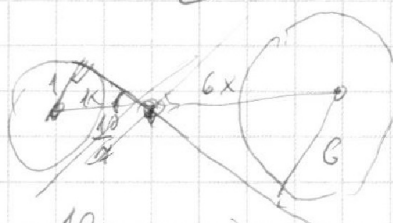
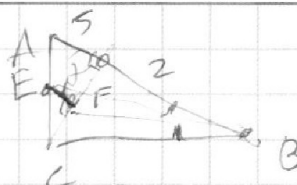
Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$ab \cdot bc \cdot ac : (2^4 \cdot 3^{35} \cdot 5^{68}) =$$

$$17 \cdot 2 \cdot 3^{28} \cdot 5^{34}$$

$$a = 2^5 \cdot 3^8 \cdot 5^{17}$$

$$b = 2^3 \cdot 3^7 \cdot 5$$



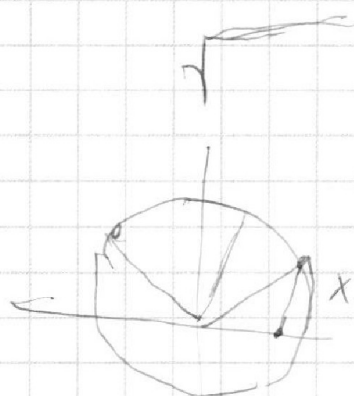
$$\frac{10}{4}$$

$$\frac{7}{10}$$

$$x \in \left[ \frac{1}{9}, \frac{3}{4} \right]$$

$$x^3(y-10)^2 = 6^2$$

$$-\frac{\pi}{2}$$



$$[1\pi + 2\pi k] = \begin{bmatrix} -12x \\ 8x \end{bmatrix}$$

$$\pi + 5\pi k = \begin{bmatrix} -3x \\ 2x \end{bmatrix}$$

$$\pi - \left(\frac{\pi}{2}x\right) =$$

$$y = kx + d$$

$$= \frac{\pi}{2} + x$$

$$\left(\frac{1}{a}\right)^4 = 3a = \frac{4}{3}a - 3 \quad \frac{10}{15\pi}$$

$$\left(\frac{1}{b}\right)^4 = 4b = \frac{1}{3}b - 3$$

$$B^5 + 3B = \frac{213}{3}$$

$$\frac{1}{a} = \frac{13}{3}a - 3$$

$$A^5 + 3A = \frac{13}{3}$$



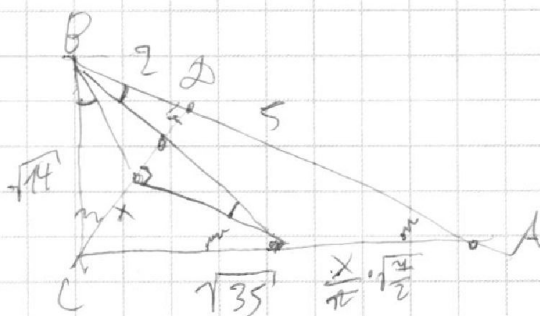
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

|                          |                          |                          |                          |                          |                          |                          |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1                        | 2                        | 3                        | 4                        | 5                        | 6                        | 7                        |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$5x + y = 43$$

$$CD = \sqrt{10} \times \sqrt{\frac{35}{2}}$$

