



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

11 КЛАСС. Вариант 4



1. [3 балла] Найдите все действительные значения x , при каждом из которых существует геометрическая прогрессия, состоящая из действительных чисел и такая, что её седьмой член равен

$\sqrt{\frac{13x-35}{(x+1)^3}}$, тринадцатый член равен $5-x$, а пятнадцатый член равен $\sqrt{(13x-35)(x+1)}$.

2. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \sqrt{x+3} - \sqrt{4-x-z} + 5 = 2\sqrt{y+x-x^2+z}, \\ |y+1| + 3|y-12| = \sqrt{169-z^2}. \end{cases}$$

3. [5 баллов] Найдите все значения параметра p , при которых уравнение

$$\cos 3x + 3 \cos 2x + 6 \cos x = p$$

имеет хотя бы одно решение. Решите это уравнение при всех таких p .

4. [5 баллов] Две окружности ω_1 и ω_2 пересекаются в точках A и B , а их общая касательная имеет с ω_1 и ω_2 общие точки C и D соответственно, причём точка B расположена ближе к прямой CD , чем точка A . Луч CB пересекает ω_2 в точках B и E . Найдите отношение $ED : CD$, если диагональ AD четырёхугольника $ACDE$ делит отрезок CE в отношении $3 : 10$, считая от вершины C .

5. [4 балла] Дан клетчатый прямоугольник 200×250 . Сколькими способами можно закрасить 8 клеток этого прямоугольника так, чтобы закрашенное множество обладало хотя бы одной из следующих симметрий: относительно центра прямоугольника, относительно любой из двух "средних линий" прямоугольника ("средней линией" прямоугольника назовём отрезок, соединяющий середины двух его противоположных сторон). Ответ дайте в виде выражения, содержащего не более трёх членов (в них могут входить факториалы, биномиальные коэффициенты).

6. [4 балла] Найдите все тройки целых чисел $(a; b; c)$ такие, что:

- $a > b$,
- число $a - b$ не кратно 3,
- число $(a - c)(b - c)$ является квадратом некоторого простого числа,
- выполняется равенство $a + b^2 = 560$.

7. [6 баллов] В основании призмы лежит равносторонний треугольник со стороной 1. Площади её боковых граней равны 4, 4 и 3. Найдите высоту призмы.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☒ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
1 из 8

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Задание 1

Пусть $\{b_n\}$ - данная геометрическая прогрессия: $b_n = b_{n-1} \cdot q$

$$b_7 = \sqrt{\frac{13x-35}{(x+1)^3}} \quad b_{13} = 5-x \quad b_{15} = \sqrt{(13x-35)(x+1)}$$

$$b_{15} = b_7 \cdot q^8 \quad \uparrow^2 \quad 0 \leq x \in (-\infty; -1) \cup \left[\frac{35}{13}; +\infty\right)$$

$$(13x-35)(x+1) = q^{16} \cdot \frac{13x-35}{(x+1)^3}$$

1) Если $x = \frac{35}{13}$, то

$$b_7 = 0 \quad b_{13} = 5 - \frac{35}{13} = \frac{30}{13} \quad b_{15} = 0$$

но геометрическая прогрессия
бывает или возрастающей, или
убывающей $b_7 = b_{15} < b_{13}$

$\Rightarrow \{b_n\}$ - не геометрическая прогрессия
Противоречие.

2) Если $x \neq \frac{35}{13}$, то

$$(x+1)^4 = q^{16} \Rightarrow x+1 = \pm q^4$$

• если $x = q^4 - 1$, то

$$b_{13} = 6 - q^4, \text{ т.к. } b_7 \geq 0 \text{ и } b_{15} \geq 0, \text{ то } b_{13} \geq 0 \Rightarrow q^4 \leq 6$$

$$b_{15} = b_{13} \cdot q^2 \quad \uparrow^2$$

$$(13x-35)(x+1) = q^4 \cdot (x^2 - 10x + 25)$$

$$(13q^4 - 48) \cdot q^4 = q^4 \cdot (q^4 - 6)^2 \quad | : q^4 \neq 0$$

$$13q^4 - 48 = q^8 - 12q^4 + 36 \quad \text{иначе } \{b_n\} \text{ - не геом. прогр.}$$

$$(q^4)^2 - 25q^4 + 84 = 0 \quad \text{по т. Виета:}$$

$$\begin{cases} q^4 = 21 \\ q^4 = 4 \end{cases} \quad \text{т.к. } q^4 \leq 6, \text{ то } q = \pm 1$$

но если $q = \pm 1$, то $\{b_n\} = \text{const} \neq 0 \Rightarrow \{b_n\}$ - не геометрическая прогрессия



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



СТРАНИЦА
2 из 8

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

• если $x = -q^4 - 1$

$$b_{13} = 6 + q^4$$

$$b_{15} = b_{13} - q^2 \quad \uparrow \downarrow$$

$$(13x - 35)(x + 1) = q^4 \cdot (x - 5)^2$$

$$(-13q^4 - 48) \cdot (-q^4) = q^4 \cdot (q^4 + 6)^2 \quad | : q^4 \neq 0$$

$$13q^4 - 48 = (q^4 + 6)^2$$

$$(q^4)^2 - q^4 + 84 = 0$$

$$D = 1 - 4 \cdot 84 < 0 \Rightarrow q \in \emptyset$$

Итого, нам подходит $q = \pm 1$

• если $q = 1$, то $x = 0$, но $x = 0 \notin \mathbb{D}$

• если $q = -1$, то $x = 0$, но $x = 0 \notin \mathbb{D}$

Ответ: $x \in \emptyset$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☒ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
4 из 8

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Задача 2

$$\sqrt{x+3} - \sqrt{4-x} + 5 = 2\sqrt{12+x-x^2} + 2 \Leftrightarrow (*)$$

$$|4+11+3|4-12| = \sqrt{169-2^2} \quad (1)$$

рассмотрим

случай (1):

$$|4+11+3|4-12| = \sqrt{169-2^2}$$

$$0 \leq \sqrt{169-2^2} \leq 13$$

$$|4+11+3|4-12| \leq 13$$

$$\begin{cases} 4+11+3(4-12) \leq 13 \\ 4 \geq 12 \\ 4+11-3(4-12) \leq 13 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4 \leq 12 \\ 4 \geq 12 \\ -1 \leq 4 \leq 12 \\ 4 \geq 14 \\ 4 \leq -1 \end{cases} \Rightarrow y=12$$

значит, $y=12 \Rightarrow z=0$

$$(*) \Leftrightarrow \begin{cases} y=12 \\ z=0 \end{cases}$$

решим (2):

$$\sqrt{x+3} + 5 = 2\sqrt{12+x-x^2} + \sqrt{4-x}$$

$$OD 3: x \in [-3, 4]$$

$$\sqrt{x+3} - \sqrt{4-x} = 2\sqrt{12+x-x^2} - 5$$

$$x+3+4-x-2\sqrt{12+x-x^2} = 4(12+x-x^2)$$

$$-20\sqrt{12+x-x^2} + 25$$

Пусть $t = \sqrt{12+x-x^2}$, тогда

$$4t^2 - 18t + 18 = 0 \quad | :2$$

$$2t^2 - 9t + 9 = 0$$

$$D = 81 - 72 = 9 = 3^2$$

$$\begin{cases} t = \frac{9+3}{4} = 3 \\ t = \frac{9-3}{4} = \frac{3}{2} \end{cases}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



СТРАНИЦА
5 из 8

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Обратная замена:

$$\begin{cases} \sqrt{12+x-x^2} = 3 \\ \sqrt{12+x-x^2} = \frac{3}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - x - 3 = 0 \quad (3) \\ 4x^2 - 4x - 39 = 0 \quad (4) \end{cases}$$

решим (3): $x^2 - x - 3 = 0$ ~~нбт~~ ~~Внета:~~

$$D = 1 + 12 = 13$$

$$\begin{cases} x = \frac{1 + \sqrt{13}}{2} \in O\partial\partial \\ x = \frac{1 - \sqrt{13}}{2} \in O\partial\partial \end{cases}$$

решим (4): $4x^2 - 4x - 39 = 0$

$$D/4 = 4 + 39 \cdot 4 = 160 = (4\sqrt{10})^2$$

$$\begin{cases} x = \frac{2 + 4\sqrt{10}}{4} = \frac{1}{2} + \sqrt{10} \in O\partial\partial \\ x = \frac{2 - 4\sqrt{10}}{4} = \frac{1}{2} - \sqrt{10} \in O\partial\partial \end{cases}$$

$$\Rightarrow (2) \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{1 + \sqrt{13}}{2} \\ x = \frac{1}{2} \pm \sqrt{10} \end{cases}$$

ОАХ

$$\text{Ответ: } \left(\frac{1 + \sqrt{13}}{2}; 12; 0 \right) \text{ и } \left(\frac{1}{2} \pm \sqrt{10}; 12; 0 \right)$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☒	☐	☐	☐	☐

СТРАНИЦА
3 из 8

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Задача 3

$$\cos^3 x + 3 \cos^2 x + 6 \cos x = p \quad (*)$$

при каких $p \in \mathbb{R}$ ≥ 1 решения?

$$4 \cos^3 x + 3 \cos x + 3(2 \cos^2 x - 1) + 6 \cos x = p$$

пусть $\cos x = t, -1 \leq t \leq 1$

$$4t^3 + 6t^2 + 3t = p + 3 \quad (*)$$

$$\begin{cases} y = 4t^3 + 6t^2 + 3t = f(t), -1 \leq t \leq 1 \\ y = p + 3 \end{cases}$$

$$f'(t) = 12t^2 + 12t + 3 = 3(2t + 1)^2 \geq 0$$

т.к. $f'(t) \geq 0, \forall t$

$f(t)$ — монотонно возрастает непрерывно.

$$f(-1) = -4 + 6 - 3 = -1$$

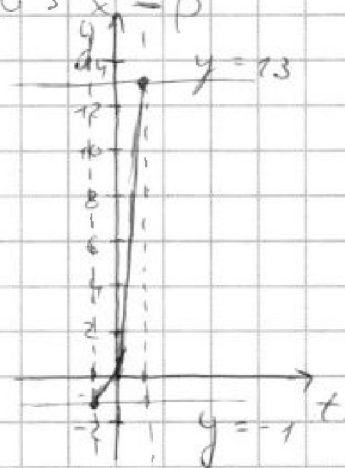
$$f(1) = 4 + 6 + 3 = 13$$

$\Rightarrow$

т.к. $t = \cos x$, то если $(*)$

имеет решение, то $(*)$

также имеет решение



значит, $(*)$ имеет
1 решение при
 $-1 \leq p + 3 \leq 13$
 $-4 \leq p \leq 10$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7
☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☒ ☐

СТРАНИЦА
7 из 8

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Задача 6

$$a, b, c \in \mathbb{Z}$$

$$a > b$$

$$(a-b) \nmid 3$$

$$(a-c)(b-c) = p^2, \text{ где } p - \text{простое}$$

$$a + b^2 = 560$$

Рассмотрим все возможные случаи:

1) Если $\begin{cases} a-c = p \\ b-c = p \end{cases}$, то $a=b$, но $a > b$ противоречие

2) Если $\begin{cases} a-c = p^2 \\ b-c = 1 \end{cases}$, то $a-b = (p-1)(p+1)$
 $\nmid 3$

т.к. среди чисел $p-1, p, p+1$ 1 делится на 3 и т.к. $p-1, p+1 \nmid 3$, то $p \nmid 3$

т.к. p - простое, то $p \neq 3$

$$\begin{cases} a-b = 8 \\ a+b^2 = 560 \end{cases} \Rightarrow b^2 + b - 552 = 0$$

$$D = 1 + 4 \cdot 552 = 2209 = 47^2$$

~~т.к. $a, b \in \mathbb{Z}$ противоречие~~

$$b = \frac{-1 \pm 47}{2} = 23 \Rightarrow a = 31$$

$$\begin{cases} 31-c = 9 \\ 23-c = 1 \end{cases} \Rightarrow c = 22$$

$$\begin{cases} -16-c = 9 \\ -24-c = 1 \end{cases} \Rightarrow c = -25$$

Подходящих: $(31; 23; 22), (-16; -24; -25)$

3) Если $\begin{cases} a-c = -p \\ b-c = -1 \end{cases}$, то $a-b = 1-p^2$ противоречие

4) Если $\begin{cases} a-c = 1 \\ b-c = p^2 \end{cases}$, то $a-b = 1-p^2$ противоречие

5) Если $\begin{cases} a-c = -1 \\ b-c = -p^2 \end{cases}$, то $a-b = p^2-1$
 $\nmid 3$
 $\Rightarrow p = 3$ (аналогично выше)



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☒	☐

СТРАНИЦА
8 из 8

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{cases} a - b = 8 \\ a + b^2 = 560 \end{cases} \Rightarrow b^2 + b - 552 = 0$$
$$\begin{cases} b = 23 \\ b = -24 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 31 \\ a = -16 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 31 - c = -1 \\ 23 - c = -9 \end{cases} \Rightarrow c = 32$$
$$\begin{cases} -16 - c = -1 \\ -24 - c = -9 \end{cases} \Rightarrow c = -15$$

Получаем: $(31; 23; 32)$ и $(-16; -24; -15)$

Мы рассмотрим все возможные случаи

т.к. $(a-c)(b-c) = p^2 \Rightarrow$

$$\begin{aligned} a-c &\in \mathbb{R} \\ b-c &\in \mathbb{R}, \text{ т.к. } a, b, c \in \mathbb{Z}. \end{aligned}$$

Ответ: $(31; 23; 32), (-16; -24; -15)$
 $(31; 23; 32), (-16; -24; -15)$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7
☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐

СТРАНИЦА
 _ ИЗ _

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$b_{n+1}^2 = b_n^2, b_{n+1} = b_{n-2} \cdot q = b_{n+2} \cdot q$$

$$b_{45} = b_7 \cdot q^8$$

$$(13x - 35)(x + 1) = q^{16} = \frac{13x - 35}{(x + 1)^3}$$

$$\text{ОДЗ: } x \in (-\infty; -1) \cup \left[\frac{35}{13}; +\infty\right)$$

$$b_{13} = b_7 \cdot q^6$$

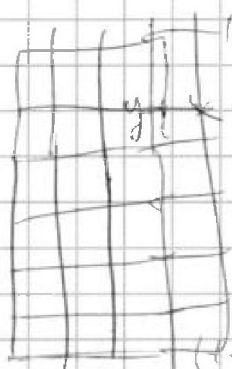
$$2y - 37 \leq 13$$

$$y \leq 25$$

$$\sqrt{x+3} - \sqrt{4-x-2} + 5 = 2\sqrt{4+x-x^2+2}$$

$$|y+1| + 3|y-12| = \sqrt{65 - 2z}$$

V'



$$14y - 351$$

$$x + \frac{z}{2} \leq 4$$

$$-3 \leq x \leq 17$$

$$-13 \leq z \leq 13$$

$$4y - 35 \leq 185$$

$$4y \leq 204$$

$$y \leq 51$$

$$4y - 35 \geq -169$$

$$4y \geq 134$$

$$y \geq 33,5$$

$$(t+1)^3 = t^3 + 3t^2 + 3t + 1$$

$$4(3+6t^2+5t) = 12+24t^2+20t$$

$$2\cos 2x + \cos x + 3\cos^2 x + 5\cos x = p$$

$$2\cos 2x(\cos x + 1) + \cos^2 x + 4\cos x = p+1$$

Замечание

$$a^2 + b^2 \geq 2ab$$

$$\frac{a+b}{2} \leq \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}$$

$$2\sqrt{\frac{4(y+2-x^2-2)+4-x-2}{2}}$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7
☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐

СТРАНИЦА
 _ ИЗ _

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\cos 3x + 3\cos 2x + 6\cos x = p$$

$$\frac{1}{12}$$

$$\frac{1}{4} = \frac{3}{12}$$

$$4\cos^3 x - 3\cos x + 6(\cos^2 x - 3 + 6\cos x) = p$$

$$4\cos^3 x + 6\cos^2 x + 3\cos x - 3 - p = 0$$

$$\cos \frac{x}{2} = \frac{1 + \cos x}{2}$$

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cdot \cos \beta - \sin \alpha \cdot \sin \beta$$

$$\cos(\alpha - \beta) = \cos \alpha \cdot \cos \beta + \sin \alpha \cdot \sin \beta$$

$$\cos x + \cos y = 2 \cos \frac{x+y}{2} \cdot \cos \frac{x-y}{2}$$

$$2\cos 2x = \cos x + 6 \cdot \cos^3 \frac{3x}{2} + \cos x + 2\cos x = p$$

$$2\cos x (2\cos 2x + 3\cos \frac{3x}{2} + \cos x) = p$$

$$t = \cos x, -1 \leq t \leq 1$$

$$4t^3 + 6t^2 + 3t - (p+3) = 0$$

$$y = 4t^3 + 6t^2 + 3t, -1 \leq t \leq 1$$

$$y = p+3$$

$$4t^2 + 4t + 1 = 0$$

$$D = 16 - 16 = 0$$

$$(2t+1)^2 = 0$$

$$y' = 12t^2 + 12t + 3 =$$

$$= 3(4t^2 + 4t + 1) =$$

$$= 3(2t+1)^2 \geq 0$$

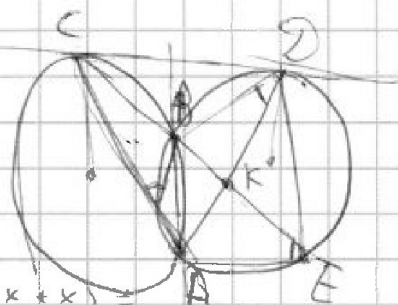
$$t = -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2} + \frac{6}{4} - \frac{3}{2} = \frac{3}{2} - 2 = -\frac{1}{2}$$

$$t = -1: -4 + 6 - 3 = -1$$

$$t = 1: 13$$

$$-1 \leq p+3 \leq 13$$

$$-4 \leq p \leq 10$$



$$\frac{EK}{KE} = ?$$

$$\frac{EK}{KE} = \frac{3}{10}$$



$$2(\cos^2 x - 1)$$



$$\cos 3x = \cos(2x+x) =$$

$$= \cos 2x \cdot \cos x - \sin 2x \cdot \sin x =$$

$$= (2\cos^2 x - 1) \cdot \cos x - 2\sin^2 x \cdot \cos x =$$

$$= \cos x (2\cos^2 x - 2 + 1 - 2\sin^2 x) =$$

$$= \cos x (4\cos^2 x - 3)$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7
☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐

СТРАНИЦА
из

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\sqrt{x+3} + \sqrt{4-x-2} + 5 = 2\sqrt{y+x-x^2+2}$$
$$|y+1| + 3|y-12| = \sqrt{165-2x}$$
$$(x+3)(4-x-2) = 4x - x^2 - 3x - 32 = \frac{y-3}{2} = \frac{25}{2}$$
$$= x - x^2 - 32$$
$$x+3 + (4-x-2) - 2\sqrt{x+3} \cdot \sqrt{4-x-2} =$$
$$= 4(y+x-x^2+2) + 25$$
$$- 20\sqrt{y+x-x^2+2}$$
$$\sqrt{x+3} + 5 \geq 5$$
$$2\sqrt{y+x-x^2+2} + \sqrt{4-x-2}$$
$$11$$
$$2\sqrt{4(y+x-x^2+2) + 4-x-2} =$$
$$= 2\sqrt{4y + 3x - 4x^2 + 32} \leq$$
$$\leq 2\sqrt{4y + 3(x+2)} \leq$$
$$\leq 2\sqrt{\frac{y+3}{2}}$$
$$|y+1| + 3|y-12| \leq 13$$
$$4y \leq 35 + 13 = 48$$
$$y \leq 12 \quad y > 12 \Rightarrow xy = 12$$
$$y+1 - 3y + 36 \leq 13$$
$$2y \geq 37 - 13 = 24 \quad y \geq 12$$
$$4y - y - 1 - 3y + 36 \leq 13$$
$$4y \geq 35 - 13 = 22$$
$$y \geq \frac{11}{2} \text{ - против.}$$

$y = 12$

