



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

11 КЛАСС. Вариант 1



1. [3 балла] Найдите все действительные значения x , при каждом из которых существует геометрическая прогрессия, состоящая из действительных чисел и такая, что её седьмой член равен

$$\sqrt{(25x - 9)(x - 6)}, \text{ девятый член равен } x + 3, \text{ а пятнадцатый член равен } \sqrt{\frac{25x - 9}{(x - 6)^3}}.$$

2. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \sqrt{x+5} - \sqrt{1-x-4z} + 4 = 2\sqrt{y-4x-x^2+z}, \\ |y+4| + 4|y-5| = \sqrt{81-z^2}. \end{cases}$$

3. [5 баллов] Найдите все значения параметра p , при которых уравнение

$$p \cos 3x + 3(p+4) \cos x = 6 \cos 2x + 10$$

имеет хотя бы одно решение. Решите это уравнение при всех таких p .

4. [5 баллов] Две окружности ω_1 и ω_2 пересекаются в точках A и B , а их общая касательная имеет с ω_1 и ω_2 общие точки C и D соответственно, причём точка B расположена ближе к прямой CD , чем точка A . Луч CB пересекает ω_2 в точках B и E . Найдите отношение $ED : CD$, если диагональ AD четырёхугольника $ACDE$ делит отрезок CE в отношении $2 : 5$, считая от вершины C .

5. [4 балла] Дан клетчатый прямоугольник 100×400 . Сколькими способами можно закрасить 8 клеток этого прямоугольника так, чтобы закрашенное множество обладало хотя бы одной из следующих симметрий: относительно центра прямоугольника, относительно любой из двух "средних линий" прямоугольника ("средней линией" прямоугольника назовём отрезок, соединяющий середины двух его противоположных сторон). Ответ дайте в виде выражения, содержащего не более трёх членов (в них могут входить факториалы, биномиальные коэффициенты).

6. [4 балла] Найдите все тройки целых чисел $(a; b; c)$ такие, что:

- $a < b$,
- число $b - a$ не кратно 3,
- число $(a - c)(b - c)$ является квадратом некоторого простого числа,
- выполняется равенство $a^2 + b = 710$.

7. [6 баллов] В основании призмы лежит равносторонний треугольник площади 1. Площади её боковых граней равны 3, 3 и 2. Найдите объём призмы.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☒ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
1 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

2

~~Важно! Чтобы она существовала, если шаг прогрессии y , то $\sqrt{(25x-9)(x-6)} \cdot y^2 = (x+3)$; $(x+3) \cdot y^6 = \sqrt{\frac{25x-9}{(x-6)^3}}$ где все числа должны быть действительными, $y^2 = \frac{\sqrt{(25x-9)(x-6)}}{x+3}$; $y^6 = \left(\frac{\sqrt{(25x-9)(x-6)}}{x+3}\right)^3 = \frac{\sqrt{25x-9}}{(x-6)^3}$; $x \cdot (2y-1) = 4-y$
 $x = \frac{4-y}{2y-1}$~~

~~$\frac{(25x-9)^{\frac{3}{2}} \cdot (x-6)^{\frac{3}{2}}}{(x+3)^3} = \frac{(25x-9)^{\frac{1}{2}}}{(x-6)^3}$; $25x-9 \neq 0$, иначе вся прогрессия
 $x=0$
должна быть нулями, а $x+3$ будет не 0 $y = 3$ так как $x-6 \neq 0$
 $\sqrt{25x-9} = \sqrt{25 \cdot 0 - 9} = 3$
 $x = -3$
 $1-x = x+5$
 $2x = 4$
 $x = 2$
 $y = -2$~~

Важно! Чтобы она существовала должны быть такой y -шаг прогрессии, что $\sqrt{(25x-9)(x-6)} \cdot y^2 = (x+3)$; $(x+3) \cdot y^6 = \sqrt{\frac{25x-9}{(x-6)^3}}$;
 $y^2 = \frac{x+3}{\sqrt{(25x-9)(x-6)}}$; $y^6 = \frac{(x+3)^3}{(25x-9)^{\frac{1}{2}}(x-6)^{\frac{3}{2}}} = \frac{\sqrt{25x-9}}{\sqrt{(x-6)^3} \cdot (x+3)} = \frac{(25x-9)^{\frac{1}{2}}}{(x-6)^{\frac{3}{2}} \cdot (x+3)}$;
 $25x-9 \neq 0$, иначе вся прогрессия нули, $x+3 \neq 0$, а так как $x-6 \neq 0$ и $x+3 \neq 0$, тогда можем сократить; $\frac{(x+3)^4}{(25x-9)^2} = 1 \Rightarrow (x+3)^2 = \pm(25x-9)$;
то есть $x^2+6x+9 = 25x-9$; $x^2-19x+18 = (x-1)(x-18) = 0 \Rightarrow x=1$ или $x=18$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



СТРАНИЦА
2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

и второй случай $(x+3)^2 = -25x+9$; $x^2+6x+9 = -25x+9$;

$x^2+31x=0$; $x=0$ или $x=31$, имеет 4 случая:

0, 1, 18, 31, в случае с 0 все числа действительные,

в случае с 1 нет $(25x-9) > 0$; $(x-6) < 0$; 18 и 31 подходят.

Ответ: 0, 18, 31



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Чтобы она существовала, если шаг прогрессии y ,
то $\sqrt{25x-9}(x-6) \cdot y^2 = (x+3); (x+3) \cdot y^6 = \sqrt{25x-9}$;

$$y^2 = \frac{(x+3) \cdot \sqrt{25x-9} \cdot x+3}{\sqrt{25x-9}(x-6)} \cdot y^6 = \frac{(x+3) \sqrt{25x-9}(x-6)}{x+3} = \frac{\sqrt{25x-9}}{(x-6)^{\frac{3}{2}} \cdot (x+3)}$$

$$\frac{(25x-9)^{\frac{3}{2}} \cdot (x-6)^{\frac{3}{2}}}{(x+3)^3} = \frac{(25x-9)^{\frac{1}{2}}}{(x-6)^{\frac{3}{2}} \cdot (x+3)}; 25x-9 \neq 0, \text{ иначе все последов.}$$

темброско - это нули, но $x+3$ тогда $\neq 0$, значит $(25x-9)^{\frac{1}{2}}$ можно
сократить, а также y на $(x-6)^{\frac{3}{2}}$ и $(x+3)^{-1}$, we get

$$\frac{(25x-9) \cdot (x-6)^3}{(x+3)^2} = 1$$

$$\sqrt{45} - \sqrt{1-x-4x^2} = 2\sqrt{y^4 x^2 + 2}$$
$$|y+4| + 4|y-5| = \sqrt{81-2x}$$





На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☒ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{cases} \sqrt{x+5} - \sqrt{1-x} + 4 = 2\sqrt{y-4x-x^2} \\ |y+4| + 4/|y-5| = \sqrt{81-z^2} \end{cases}$$

Найдём $\min(|y+4| + 4/|y-5|)$, при $x \geq 5$, ср-а строго растёт, т.е. $\min$ в $y=5$, при $y \in [-4; 5]$ при убывании y одна часть растёт, т.к. $4/|y-5|$ растёт быстрее чем $|y+4|$ который растёт как $|y|$ и при $y \leq -4$ тоже аналогично, и при $\min = \min(f(5), f(-4)) = (9, 36) = 9 \Rightarrow$ так как в п.2 $\sqrt{81-z^2}$, максимум которой $= 9$ при $z=0$, то $z=0$, $y=5$, и наше решение верно.

$$\sqrt{x+5} - \sqrt{1-x} + 4 = 2\sqrt{5-4x-x^2} = 2\sqrt{-(x+1)(x+5)}$$

$$2\sqrt{-(x+1)(x+5)} = \sqrt{x+5} - \sqrt{1-x} + 4, \text{ то если } x \geq -5$$

$x \geq -5$; $x \leq 1$ из ограничений следует, что число делится

$$\text{на 6, то } 2\sqrt{-(x+1)(x+5)} = \sqrt{x+5} - \sqrt{1-x} + 4, \text{ то если } x \geq -5$$

$$\text{если } \sqrt{1-x} = a, \sqrt{x+5} = b, \text{ то } 2ab = a - b + 4, (a+2b-1) = a - b \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a = \frac{4-b}{2b-1}, \text{ то если } \sqrt{x+5} = y(1-x)(x+5) = x+5 + 1-x + 6$$

$$4 \cdot (1-x)(x+5) - 18\sqrt{-(x)(x+5)} + 0 = 0 \Rightarrow 4(1-x)(x+5) - 18\sqrt{-(x)(x+5)} = 0$$

$$4 \cdot (1-x)(x+5) - 18\sqrt{-(x)(x+5)} + 10 = 0, \text{ и } a^2 - 14a + 10 = 0, a = 1 \text{ и } 14$$

$$a = 12,5, \text{ если } a = 1, (1-x)(x+5) = 1, -x^2 - 4x + 5 = 1, -x^2 - 4x + 4 = 0, x = 2;$$

$$\text{и } a = 12,5, -x^2 - 4x + 5 = 12,5, x^2 + 4x - 2,5 = 0, \text{ Ответ: } 2.$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1
☐2
☐3
☒4
☒5
☐6
☐7
☐СТРАНИЦА
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$p \cos 3x + 3(p+4) \cos x = 6 \cos 2x + 10; \quad \cos 3x = 4 \cos^3 x - 3 \cos x;$$

$$\cos 2x = 2 \cos^2 x - 1, \text{ тогда}$$

$$p(4 \cos^3 x - 3 \cos x) + 3(p+4) \cos x = 6(2 \cos^2 x - 1) + 10;$$

$$4p \cos^3 x - 12 \cos^2 x + 12 \cos x - 4 = 0; \quad /4 \quad p \cos^3 x - 4 \cos^2 x + 4 \cos x - 1 = 0;$$

$$x = t, t \in [-1; 1] \quad p t^3 - 4 t^2 + 4 t - 1 = 0, \quad \Delta = -1 < 0 \Rightarrow \text{должна}$$

быть еще точка на $[-1; 1]$ где $p-2 \geq 0$, тогда будет
корень, ~~максимум достигается в 0~~ заметим, что при
увеличении p ~~увеличивается~~ ^{в. ч. 1} ~~уменьшается~~ ^{в. ч. 2} некоторое число t ~~и оно~~
не увеличивается, т.е. надо найти такое p ^{т.е. 1} ~~где~~ ^{где} ~~где~~
теперь корень на отрезке $[0; 1]$ ~~при $p=1$ получим $t^3 - 4t^2 + 4t - 1 = 0$~~
 ~~$= (t-1)(t^2 - 3t + 1)$~~
 ~~$p \geq 0, \quad \Delta \geq 0, \text{ т.е. корень есть, если искать его так.}$~~
~~на $[-1; 1]$, то не мод. в. ч. 1 производной мод. на конусах~~
~~ка $(p t^3 - 4 t^2 + 4 t - 1)' = 3 p t^2 - 8 t + 4 = \left(\sqrt{3p} t - \frac{4}{\sqrt{3p}} \right)^2 + 4 - \frac{16}{12p}$, при~~
 ~~$p \geq 1$ имеет корни~~



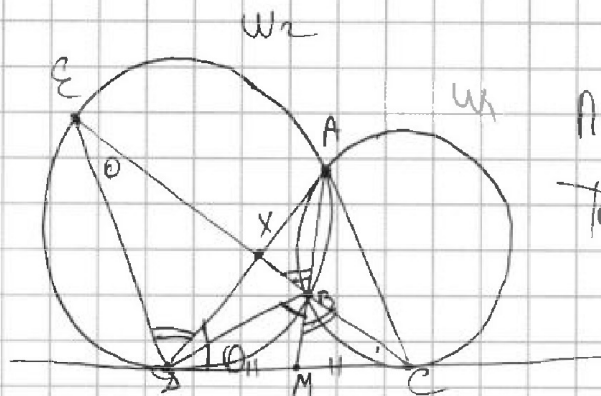
На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



СТРАНИЦА

1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☒	☐	☐

СТРАНИЦА
2 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

например в левой ^{верхней} ~~долой~~ клетку, строит 2 симметрии, оставшуюся для симметрии аналогично $BAC = C_{10000}^2$, и $ABAC$, по сути тоже C_{10000}^2 , так как все они являются способами пересечения 2 симметрий, поэтому $ABAC - 2(AB + AC + BC) + 3ABAC =$
 $= 3C_{20000}^4 - 2 \cdot 3 \cdot C_{10000}^2 + 3 \cdot C_{10000}^2 = 3 \cdot C_{20000}^4 - 3 \cdot C_{10000}^2$
 Ответ: $3 \cdot C_{20000}^4 - 3 \cdot C_{10000}^2$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7
☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\sqrt{4t^2} - \sqrt{4t^2 + 4} = 2\sqrt{y_4 t^2 + 2}$$

$$|y_4 t + 4| y_4 - 5| = \sqrt{81 - 2t}$$

$3pt^2 - 8t + 4$ имеет корни на $[-1; 1]$

$$p \geq 1$$
$$p = 0,8$$

$$2,4t^2 - 8t + 4$$

$$3pt^2 - 8t + 4$$

$$\left(\sqrt{3p}t - \frac{8}{2\sqrt{3p}}\right)^2 + 4 = \frac{64}{12p}$$

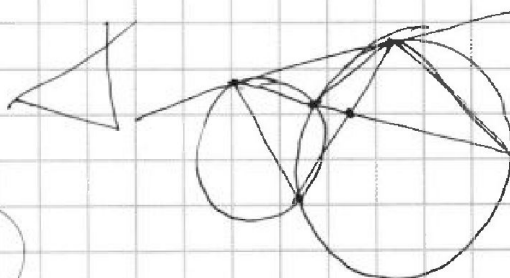
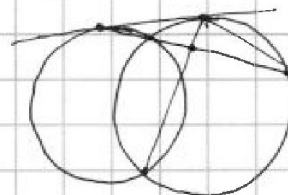
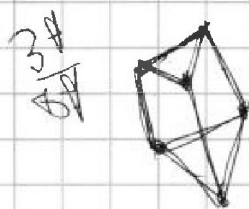
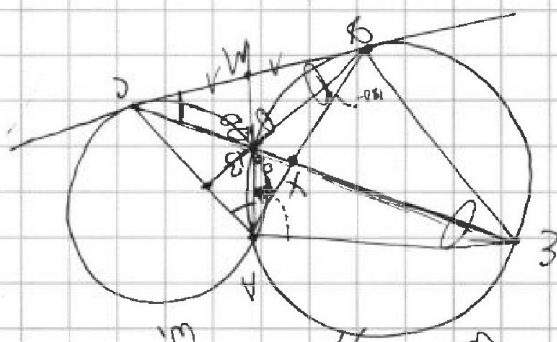
$$\sqrt{3p}t = \frac{4}{\sqrt{3p}}$$

$$t = \frac{4}{3p}$$

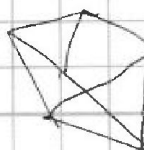
$$4px^3$$

$$px^3 - 4x^2 + 4x - 1 = 0$$

$$\frac{1}{p^2} - \frac{4}{p^2} + \frac{4}{p} - 1$$



$$x = \frac{1}{p}$$





На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1
☐

2
☐

3
☐

4
☐

5
☐

6
☒

7
☐

СТРАНИЦА

1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$(a-c)(b-c)=p^2 \Rightarrow \text{т.к. } p^2 \text{ имеет только делители } \pm p, p^2,$$

то то то из $a-c$, $b-c$ равно ± 1 , оставшееся $\pm p^2$ или

то то $\pm p$, оставшееся $\pm p$, при этом $a < b \Rightarrow$

$\Rightarrow b-c > a-c \Rightarrow$ остаются только случаи $b-c=p^2$;

$a-c=1$ и $b-c=-1$; $a-c=-p^2$, в первом

случае, у нас $b-a=p^2-1=(p-1)(p+1)$, если p не равно 3, то

$p \equiv 1$ или $\equiv 2 \pmod 3$, так как p -простое делится только на

1 и на себя $\Rightarrow (p-1)(p+1):3 \Rightarrow b-a:3$, что неверно

по условию $\Rightarrow p=3 \Rightarrow b-a=3^2-1=8$; $b=a+8$, тогда

$$a^2+b=a^2+(a+8)=710; \quad a^2+a-702=0; \quad (a+27)(a-26)=0;$$

получается $a=-27$ или $a=26$, если $a=26$, то $b=34$,

$c=25$, если $a=-27$, то $b=-19$, $c=-28$, если

же $b-c=-1$, $a-c=-p^2$, то $b-a=p^2-1=(p-1)(p+1)$, аналогично

$p=3$, то есть $b-a=8$; $a^2+b=710$, $a=-27$ или 26 , $b=$

$=34$, $c=35$, в случае с 26, $b=-19$, $c=-18$, в

случае с -27. Ответ: $(26, 34, 25)$; $(-27, -19, -28)$;

$(26, 34, 35)$; $(-27, -19, -18)$

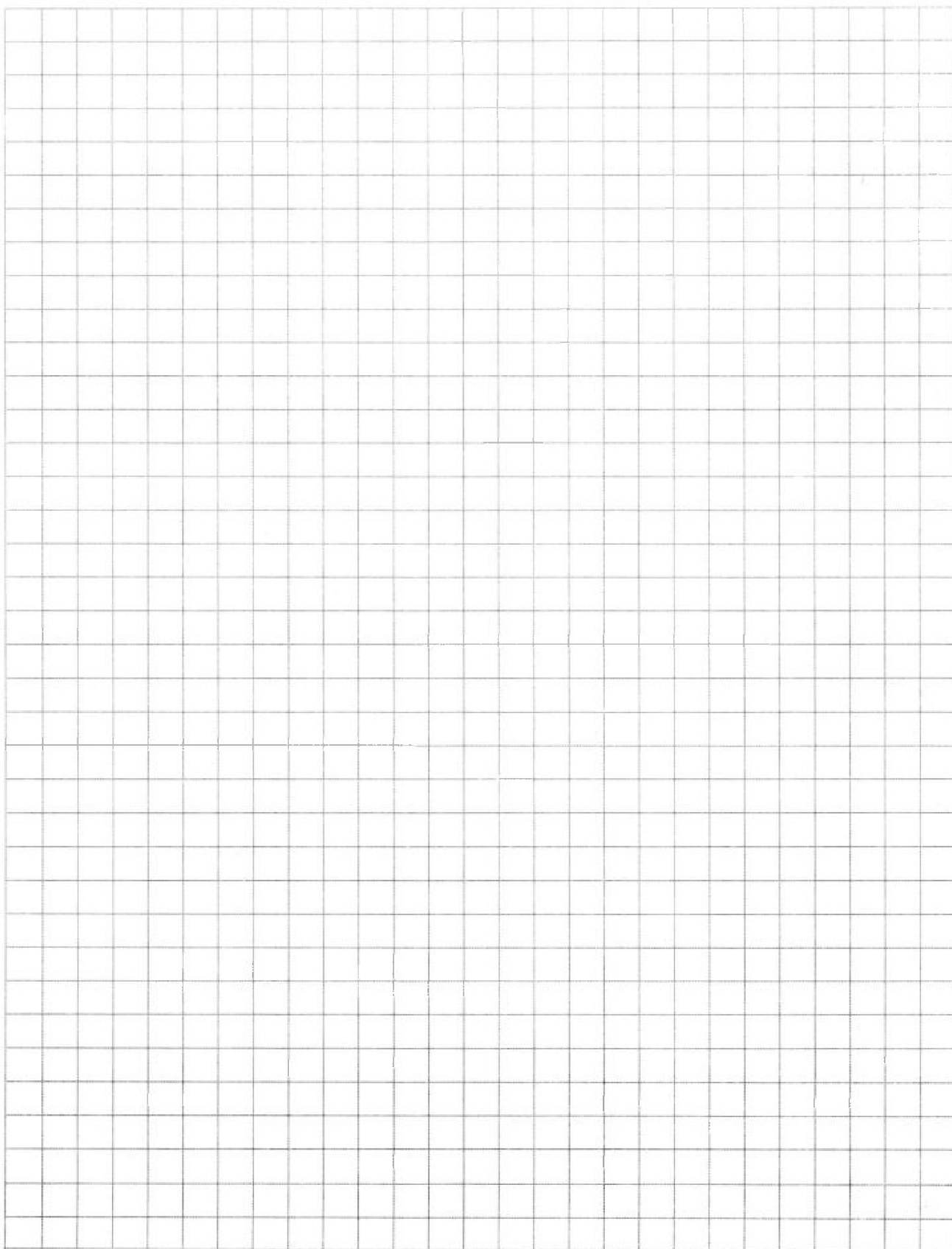


На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



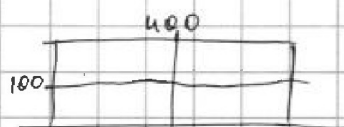


На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☒ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
1 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



Сначала перечисляет те способы, когда он симметричен относительно одной из средних линий, относительно большей: C_{20000}^4 , так как мы выбираем 4 из верхней части и затем симметрично, аналогично C_{20000}^4 относительно меньшей средней линии, но есть способы, где углено что и другое, это когда фигура симметрична относительно

Пусть A - способы, когда он симметричен относительно меньшей сред. линии, B - относительно большей, C - относительно центра, тогда ответ - это $A \cup B \cup C =$

$$= A + B + C - 2(A \cap B + A \cap C + B \cap C) + 3(A \cap B \cap C) = \text{способы}$$

$|A| = C_{20000}^4$, так как мы выбираем 4 клетки в одной

половине и симметризуем их, $|B| = C_{20000}^4$, аналогично, и

$$|C| = \frac{C_{20000}^4}{2} = \frac{10000 \cdot 9999 \cdot 9998 \cdot 9997}{24} \approx 39996 \cdot 39994$$

мы выбираем по 4 клетки, и затем ее симметризуем и вводим

далее $A \cap B$ - способы когда клетки симметричны относительно обеих ср. линий, их C_{10000}^2 , так как мы в $\frac{1}{4}$ части

выбираем 2 и симметризуем, $A \cap C =$ так как мы выбираем 4 клетки



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7
☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐

СТРАНИЦА
 ИЗ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$p \cos(3x) + 3(p+4) \cos x = 6 \cos 2x + 10 \quad \begin{matrix} 1-2+1 \\ -3p+3p \end{matrix}$$

$$p(4 \cos^3 x - 3 \cos x) + (3p+12) \cos x = 6(2 \cos^2 x - 1) + 10$$

$$\begin{matrix} -4t^3+4t-1 & 4t^3-4t+1 \\ 12 \cos^3 x + 4 \end{matrix}$$

$$4p \cos^3 x - 12 \cos^2 x + 12 \cos x - 4 = 0 \quad \begin{matrix} \cos x = x \\ x = \frac{\pi}{2} \end{matrix}$$

$$px^3 - 3x^2 + 3x - 1 = 0$$

$$x \in [-1; 1]$$

$$p \geq 1$$

$$x \in [-1; 1]$$

$$\max(px^3 - 3x^2 + 3x)$$

$$3px^2 - 6x + 3$$

$$\begin{matrix} 1 \\ 0 \end{matrix}$$

$$\begin{matrix} -1+2-1 \\ -4x=0 \\ -4x+3=0 \end{matrix} \quad \begin{matrix} x=-1 \\ \cos x=1 \\ x=0 \end{matrix}$$

$$36 - 12 \cdot 3 \cdot p$$

$$36 - 36p$$

$$x^3 - 3x^2 + 3x - 1$$

$$2p+4=16$$

$$p \leq 1$$

$$4p+4=16$$

$$0.1902$$

$$-t^3 - 4t^2 + 4t - 1 = 0$$

$$p \cdot \left(\frac{1}{p}\right)^3 - 3 \cdot \left(\frac{1}{p}\right)^2 + 3 \cdot \frac{1}{p} - 1 \neq 0$$

$$4p+12=16$$

$$p \geq 1$$

$$4t^3 - 4t + 1 \geq 0$$

$$\frac{1}{p^2} - \frac{3}{p^2} + 3 \cdot \frac{1}{p} - 1 \neq 0$$

$$-\frac{2}{p^2} + 3 \cdot \frac{1}{p} - 1 \neq 0$$

$$-2x^3 + 3x - 1 \neq 0$$

$$2x^3 - 3x + 1$$

$$0.5 \quad 0.5 \quad 1$$

$$p+3p+12$$

$$4p+12$$