



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

11 КЛАСС. Вариант 4



- ✓ 1. [3 балла] Найдите все действительные значения x , при каждом из которых существует геометрическая прогрессия, состоящая из действительных чисел и такая, что её седьмой член равен $\sqrt{\frac{13x-35}{(x+1)^3}}$, тринадцатый член равен $5-x$, а пятнадцатый член равен $\sqrt{(13x-35)(x+1)}$.

2. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \sqrt{x+3} - \sqrt{4-x-z} + 5 = 2\sqrt{y+x-x^2+z}, \\ |y+1| + 3|y-12| = \sqrt{169-z^2}. \end{cases}$$

- ✦ 3. [5 баллов] Найдите все значения параметра p , при которых уравнение

$$\cos 3x + 3 \cos 2x + 6 \cos x = p$$

имеет хотя бы одно решение. Решите это уравнение при всех таких p .

- ✓ 4. [5 баллов] Две окружности ω_1 и ω_2 пересекаются в точках A и B , а их общая касательная имеет с ω_1 и ω_2 общие точки C и D соответственно, причём точка B расположена ближе к прямой CD , чем точка A . Луч CB пересекает ω_2 в точках B и E . Найдите отношение $ED : CD$, если диагональ AD четырёхугольника $ACDE$ делит отрезок CE в отношении $3 : 10$, считая от вершины C .

- ✓ 5. [4 балла] Дан клетчатый прямоугольник 200×250 . Сколькими способами можно закрасить 8 клеток этого прямоугольника так, чтобы закрашенное множество обладало хотя бы одной из следующих симметрий: относительно центра прямоугольника, относительно любой из двух "средних линий" прямоугольника ("средней линией" прямоугольника назовём отрезок, соединяющий середины двух его противоположных сторон). Ответ дайте в виде выражения, содержащего не более трёх членов (в них могут входить факториалы, биномиальные коэффициенты).

- ✓ 6. [4 балла] Найдите все тройки целых чисел $(a; b; c)$ такие, что:

- $a > b$,
- число $a - b$ не кратно 3,
- число $(a - c)(b - c)$ является квадратом некоторого простого числа,
- выполняется равенство $a + b^2 = 560$.

7. [6 баллов] В основании призмы лежит равносторонний треугольник со стороной 1. Площади её боковых граней равны 4, 4 и 3. Найдите высоту призмы.



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☒ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$ab^6 = \sqrt{\frac{13x-35}{(x+1)^3}}$$

$$ab^{12} = 5-x$$

$$ab^{14} = \sqrt{(13x-35)(x+1)}$$

~~Реш:~~

$$13x-35=20$$

$$\frac{ab^{14}}{ab^{12}} = b^2 = \frac{\sqrt{(13x-35)(x+1)}}{5-x}$$

$$\frac{ab^{12}}{ab^6} = b^6 = \frac{(5-x) \cdot \sqrt{(x+1)^3}}{\sqrt{13x-35}}$$

$$\Rightarrow b^6 = (b^2)^3 = \frac{\left(\frac{\sqrt{(13x-35)(x+1)}}{5-x}\right)^3}{(5-x)^3} = \frac{(5-x) \sqrt{(x+1)^3}}{\sqrt{13x-35}}$$

$$\frac{(13x-35)^5 \cdot \sqrt{(x+1)^3}}{(5-x)^3} = \frac{(5-x) \sqrt{(x+1)^3}}{\sqrt{13x-35}}$$

$$(13x-35)^2 \cdot \sqrt{(x+1)^3} = (x+1)^3 \cdot (5-x)^4$$

$$(13x-35)^2 = (5-x)^4$$

$$13x-35 = (5-x)^2$$

$$x^2 - 10x + 25 - 13x + 35 = 0$$

$$x^2 - 23x + 60 = 0$$

$$x_1 = 3$$

$$x_2 = 20 - \text{не подходит т.к. тогда } b^2 = \frac{\sqrt{(13 \cdot 20 - 35)(20+1)}}{5-20}$$

$\Rightarrow$ Ответ: 3.

$$5-20$$

$\uparrow$

$\circ$

$\sqrt{13x-35}$
 $\div \sqrt{(x+1)^3}$ т.к.
 $\neq 0$
 иначе какойто
 мен чем
 прогрессии = 0,
 что быть не может



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1
☐

2
☐

3
☒

4
☐

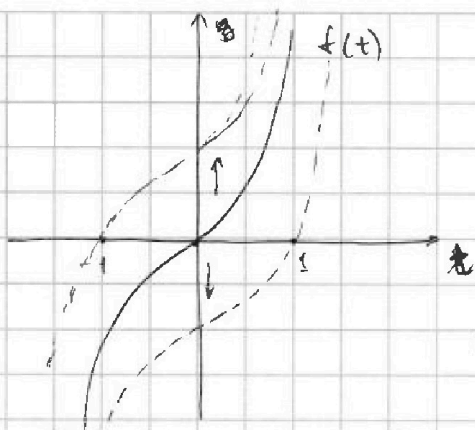
5
☐

6
☐

7
☐

СТРАНИЦА
2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



Наша искоемая
функция $g(t)$
получается с помощью
функции $f(t)$ вдоль
оси ординат

П.к. функция монотонно
возрастает, а нам

необходимо найти, когда $g(t)=0$ и $t \in [-1; 1]$
Необходимо рассмотреть два крайних случая
к 1) когда $g(t)$ проходит через точку $[-1; 0]$

$$\begin{aligned} 4 \cdot (-1)^3 + 6 \cdot (-1)^2 + 3(-1) - 3 - p &= 0 \\ -4 + 6 - 3 - 3 - p &= 0 \\ p &= -4 \end{aligned}$$

2) когда $g(t)$ проходит через точку $[1; 0]$

$$4 + 6 + 3 - 3 - p = 0$$

$$p = 10$$

$$\Rightarrow p \in [-4; 10]$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☒ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\cos 3x + 3\cos 2x + 6\cos x = p$$

$$\begin{aligned}\cos 3x &= \cos(x+2x) = \cos x \cos 2x - \sin x \sin 2x = \\ &= \cos x (2\cos^2 x - 1) - 2\sin^2 x \cos x =\end{aligned}$$

$$= 2\cos^3 x - \cos x - 2\cos x(1 - \cos^2 x) = 4\cos^3 x - 3\cos x$$

Вернемся к изначальному уравнению:

$$4\cos^3 x - 3\cos x + 3(2\cos^2 x - 1) + 6\cos x = p$$

$$4\cos^3 x + 6\cos^2 x + 3\cos x + 3 - p = 0$$

$$t \in [-1; 1] \quad t = \cos x$$

$$4t^3 + 6t^2 + 3t + 3 - p = g(t)$$

рассмотрим функцию $f(t) = 4t^3 + 6t^2 + 3t$

$f'(t) = 12t^2 + 12t + 3$ - найдем, как будет выглядеть график функции

$$\begin{aligned}f'(t) = 0 : \quad t(4t^2 + 6t + 3) &= 0 \\ t = 0 \quad 4t^2 + 6t + 3 &= 0 \\ D &= 36 - 48 < 0\end{aligned}$$

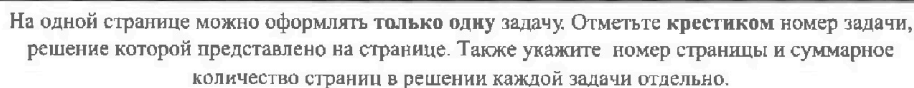
$$\begin{aligned}f'(t) = 0 : \quad 12t^2 + 12t + 3 &= 0 \\ D &= 144 - 4 \cdot 3 \cdot 12 = 144 - 144 = 0\end{aligned}$$

$$t = \frac{-12}{24} = -0,5$$

$$\Rightarrow 12t^2 + 12t + 3 = 12(t + 0,5)^2 \geq 0 \Rightarrow t = -0,5 \text{ точка перегиба}$$

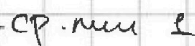
" $f(t)$ всегда возрастает " "проходит через (0;0)"

$$\frac{AD}{AE} = \sqrt{0,3}$$



СТРАНИЦА
1 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Почка OR-кода недопустима!



2) Рассмотрим кон-во
множество, симметричного
и ~~относительно~~ относительно
центр: поймем, что
можем выбирать точки
только из областей 1, 4
в сумме из этих областей
выберем 4 точки

$$\Rightarrow \text{кал. вкл. множеств} = 2C_{12500}^1 \cdot C_{12500}^3 + 2C_{12500}^2 \cdot C_{12500}^2 + 2C_{12500}^0 \cdot C_{12500}^4 = C_{25000}^4 \quad (\text{М1})$$

2) Какое количество симметрич. относ. ср. и инд.

3) Кол-во множеств сими. относ. ср. или 2
= C_{25000}^4 (МЗ)

4) как во множестве, симм относительно всего (центра и диаг. ср. линии) Если мысленно пометим местот скачала по ср. лин 2, потом по ср. лин 1, получимся одна область в которой мы можем водраать 2 клетки и закрасить их и все те клетки которые совпали с линией или линией, тогда развернув местот мысленно закрасим клетот будет симм относительно ср. линии и центра $\rightarrow$ как во соседств = C_{12500}^2

5) Посчитаем кол-во множеств, ~~каждое~~ ^{каждое} из которых ^(мн) симметрично только относительно одного из осей. Заметим, что ~~всю~~ ^{каждую} ~~доску~~ ^{доску} ~~можно~~ ^{можно} разбить на 12500 прямоугольничков, центр которых ~~будет~~ ^{находится} в точке O . ~~Каждая~~ ^{Каждая} ~~вершина~~ ^{вершина} ~~будет~~ ^{будет} принадлежать ~~разным~~ ^{разным} областям, ~~тогда~~ ^{тогда} если два ~~квадрата~~ ^{квадрата} клетки симметричны относительно одного из осей, то при ~~выборе~~ ^{выборе} ~~одного~~ ^{одного} из описанных ~~прямоугольничков~~ ^{прямоугольничков} у ~~одного~~ ^{одного} описанного ~~прямоугольничка~~ ^{прямоугольничка} можно закрасить ≤ 2 в



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

☐☐☐☐☒☐☐

СТРАНИЦА

2 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

умовые крестиком, такие образом как-во
способ закрасить крестик так, чтобы это
множ-во было мин. относительно этого
одно: $C_{12500}^4 \cdot C_4^2$ (M5)

↑
выбор принимаю.

↑
выбор закрашивающей
клетки в эти x
принимаю.

⇒ Всего множеств: $(M1 + M2 + M3 - M5 - M4) +$

$+ M4 + M5 \Leftrightarrow 3C_{25000}^4 - C_4^2 \cdot C_{12500}^4 -$

$\Leftrightarrow \frac{M1 + M2 + M3 + M4 + M5}{2} = \frac{3C_{25000}^4 + C_{12500}^4 + C_4^2 \cdot C_{12500}^4}{2} =$

$= \frac{3}{2} \cdot C_{25000}^4 + \frac{7}{2} \cdot C_{12500}^4$

Ответ: $1,5 C_{25000}^4 + 3,5 C_{12500}^4$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7
☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☒ ☐

СТРАНИЦА
 1 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$(a-c)(b-c) = p^2$$

т.к. $a, b, c \in \mathbb{Z}$, $a > b$, то

$$\textcircled{1} \begin{cases} a-c = p^2 \\ b-c = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = p^2 + c \\ b = 1 + c \end{cases}$$

$$a-b = p^2 + c - 1 - c = p^2 - 1 \vdots 3$$

$$\begin{array}{r|l} p & p^2 \\ 0 & 0 \\ 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{array}$$

Получим, что $p \vdots 3$, а т.к. p простое
 $p = 3$

$$\Rightarrow \begin{cases} a = 9 + c \\ b = 1 + c \end{cases}$$

$$a + b^2 = 560$$

$$9 + c + 1 + 2c + c^2 = 560$$

$$c^2 + 3c - 550 = 0$$

по теор. Виета

$$c_1 = -25$$

$$c_2 = 22$$

$$\begin{cases} c = -25 \\ a = -16 \\ b = -24 \end{cases} \quad \begin{cases} c = 22 \\ a = 31 \\ b = 23 \end{cases}$$

$$\textcircled{2} \begin{cases} a-c = -1 \\ b-c = -p^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = c-1 \\ b = c-p^2 \end{cases}$$

$$a-b = c-1 - c + p^2 = p^2 - 1 \vdots 3 \quad \text{аналогично } p=3$$

$$\begin{cases} a = c-1 \\ b = c-9 \end{cases}$$

$$a + b^2 = 560$$

$$c-1 + c^2 - 18c + 81 = 560$$

$$c^2 - 17c + 80 - 560 = 0$$

$$c^2 - 17c - 480 = 0$$

по теор. Виета

$$c_1 = 15$$

$$c_2 = -32$$



На одной странице можно оформлять **только одну задачу**. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☒	☐

СТРАНИЦА
2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{cases} c = 15 \\ a = 14 \\ b = 6 \end{cases}$$

$$\begin{cases} c = -32 \\ a = -33 \\ b = -41 \end{cases}$$

Ответ: $(-33; -41; -32)$ $(14; 6; 15)$ $(-16; -24; -25)$
 $(31; 23; 22)$

$$\begin{cases} a - c = \pm p \\ b - c = \pm p \end{cases} \quad \text{— не может быть такого случая т.к. } a > b$$

$$\begin{cases} a - c = -p^2 \\ b - c = -1 \end{cases} \quad \text{— не может быть такого случая т.к. } -p^2 < -1, \text{ а } a > b$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$a b^6 = \sqrt[3]{\frac{13x-35}{(x+1)^3}}$$

$$b^6 = \frac{\sqrt[3]{(13x-35)(x+1)^3}}{5-x}$$

$$b^6 = \frac{(5-x)\sqrt[3]{(x+1)^5}}{\sqrt[3]{13x-35}}$$

$$a b^{12} = 5-x$$

$$a b^{14} = \sqrt{(13x-35)(x+1)}$$

$$\frac{(13x-35)(x+1)\sqrt{(13x-35)(x+1)}}{(5-x)^3\sqrt[3]{(x+1)^5}} = (5-x)\sqrt[3]{(x+1)^3}$$

$$(13x-35)^2(x+1)\sqrt{x+1} = \sqrt[3]{(x+1)^3} \cdot \sqrt[3]{(13x-35)^4}$$

$$13x+2, (13x-35)^2 = (5-x)^4$$

$$(13x-35) = (5-x)^2$$

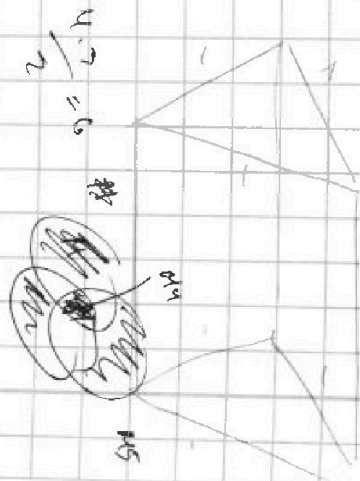
$$25 - 10x + x^2 - 13x + 35 = 0$$

$$x^2 - 23x + 60 = 0$$

$$x_1 = 3$$

Скорее (3)

$$x_2 = 20 \quad \emptyset$$



$$4t^3 + 6t^2 + 3t - 3 - p = 0$$

$$t^2(4t + 6) + 3t - 3 - p = 0$$

$$4t^2 + 6t$$

$$6t^2 + 13t - 3$$

$$3(2t^2 + 3t - 1)$$

$$3(2t^2 + 3t - 1)$$

$$4t^3 + 6t^2$$

$$4 \cdot 2t^2(2t+3) + (2t+3) + t - 6 = p$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

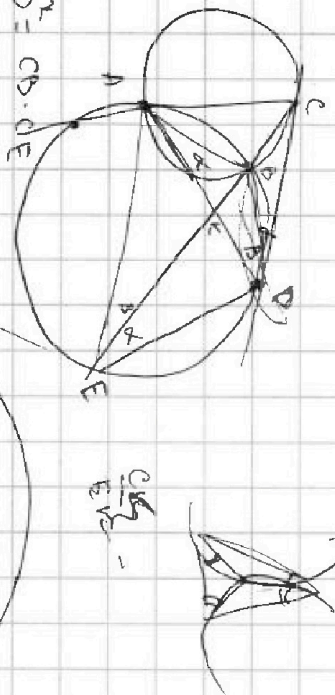
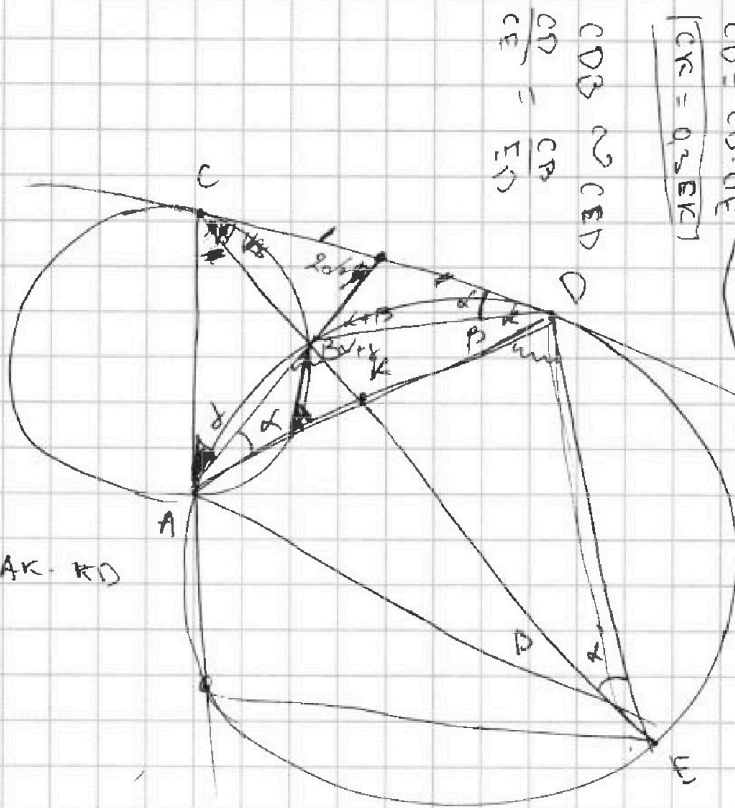
Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$4x^3 + 6x^2 + 3x - 3 - 2 = 0$$

$$CD^2 = (CK - DK)(CK + DK)$$

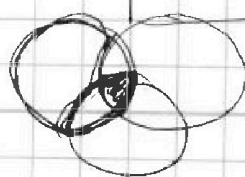
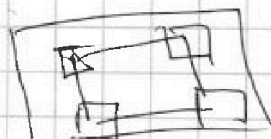
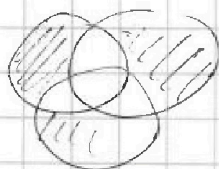
$$CD^2 = (CK - DK)$$

$$BK \cdot KE = AK \cdot KD$$



125	1	125
100	2	100
2	1	100
125	125	

Всего



☐	☐	☐
☐	☐	☐

☐	☐
☐	☐

Только одна точка центра
(1,3) (2,4)

Только одна ср. мин 1
(1,2) (4,3)

Только одна ср. мин 2
(2,5) (1,1)

относительно всего
используя 2 точки
43 (4)



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7
☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐

СТРАНИЦА
 _ ИЗ _

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\cos 3x + 3\cos 2x + 6\cos x = p$$

$$4\cos^3 x + 6\cos^2 x + 3\cos x - 3 - p = 0$$

$$\cos(x+2x) = \cos x \cos 2x - \sin x \sin 2x$$

$$\cos x (2\cos^2 x - 1) - 2\sin^2 x \cos x$$

$$\sin^2 x = 1 - \cos^2 x$$

$$2(1 - \cos^2 x) \cos x$$

$$2\cos^3 x - \cos x + 2\cos x - 2\cos^3 x + 6\cos^2 x - 3 + 6\cos x = p$$

$$6\cos^2 x + 7\cos x - 3 = p$$

$$6t^2 + 7t - 3 - p = 0$$

$$D > 0 \quad D = 49 + 24(3 - p) =$$

$$t_1 \in [-1; 1] \quad D = 121 + 24p$$

$$t_1 = \frac{-7 + \sqrt{121 + 24p}}{12} \leq 1$$

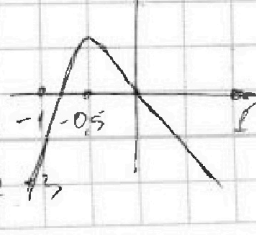
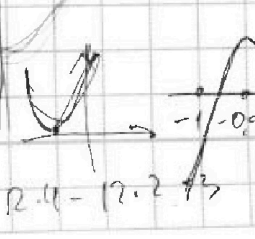
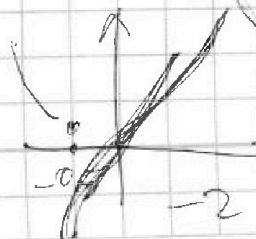
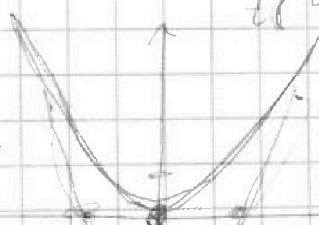
$$t_2 = \frac{-7 - \sqrt{121 + 24p}}{12} \geq -1$$

$$\frac{-7 + \sqrt{121 + 24p}}{12} \leq 12$$

$$\sqrt{121 + 24p} \leq 19$$

$$4t^2 + 6t + 3 = 0$$

$$D = 36 - 48 = -12 < 0$$



$$4t^3 + 6t^2 + 3t - 3 - p = 0$$

$$y = 4t^3 + 6t^2 + 3t - 3 - p$$

$$t(4t^2 + 6t + 3) = 0$$

$$p > 3$$

$$p = 3$$

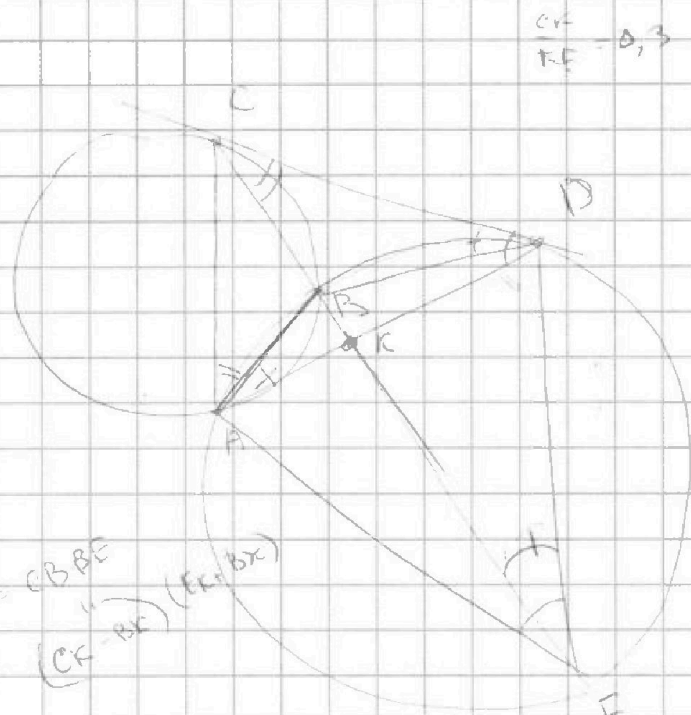


На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



$$CF = 0,3$$

$$CF = 0,3 \cdot CF$$

$$CD^2 = CB \cdot CE$$

$$(CF - BK) \cdot (CF + BK)$$

$$CD^2 = CK \cdot EK - BK \cdot EK + CK \cdot BK - BK^2$$

32
15

$$2^5 \cdot 3 \cdot 5$$

$$(a-c)(b-c) = p^2$$

$$\Rightarrow a-c = p^2$$

$$b-c = 1$$

$$a-c = -1$$

$$b-c = -p^2$$

$$480 \mid 2 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 8$$

$$\begin{array}{r} 2 \\ 550 \\ \times 4 \\ \hline 2200 \end{array}$$

$$b = 1+c$$

$$a = p^2 + c$$

$$a-b = p^2 - 1$$

$$p^2 : 3 \Rightarrow p = 3$$

$$a+b \leq 560$$

$$a = c-1$$

$$b = c-p^2$$

$$a-b = p^2-1$$

$$g = 4$$

$$2209$$

$$550/5$$

$$110/2.5$$

$$\begin{array}{r} x \mid x^2 \\ 0 \mid 0 \\ 2 \mid 1 \end{array}$$

$$b = 1+c$$

$$a = 3+c$$

$$3+c + 1+2c + c^2 = 560$$

$$c^2 + 3c + 10 = 560$$

$$c = -5 \quad c = 2$$

$$2 \cdot 5^2 \cdot 11$$

$$c = -25$$

$$c = 22$$

$$480$$