



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

11 КЛАСС. Вариант 3



1. [3 балла] Найдите все действительные значения x , при каждом из которых существует геометрическая прогрессия, состоящая из действительных чисел и такая, что её десятый член равен $\sqrt{(25x + 34)(3x + 2)}$, двенадцатый член равен $2 - x$, а восемнадцатый член равен $\sqrt{\frac{25x + 34}{(3x + 2)^3}}$.

2. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \sqrt{x+6} - \sqrt{3-x-2z} + 7 = 2\sqrt{y-3x-x^2+z}, \\ |y+2| + 2|y-18| = \sqrt{400-z^2}. \end{cases}$$

3. [5 баллов] Найдите все значения параметра p , при которых уравнение

$$p \cos 3x + 6 \cos 2x + 3(p+4) \cos x + 10 = 0$$

имеет хотя бы одно решение. Решите это уравнение при всех таких p .

4. [5 баллов] Две окружности ω_1 и ω_2 пересекаются в точках A и B , а их общая касательная имеет с ω_1 и ω_2 общие точки C и D соответственно, причём точка B расположена ближе к прямой CD , чем точка A . Луч CB пересекает ω_2 в точках B и E . Найдите отношение $ED : CD$, если диагональ AD четырёхугольника $ACDE$ делит отрезок CE в отношении $7 : 20$, считая от вершины C .

5. [4 балла] Дан клетчатый прямоугольник 500×120 . Сколькими способами можно закрасить 8 клеток этого прямоугольника так, чтобы закрашенное множество обладало хотя бы одной из следующих симметрий: относительно центра прямоугольника, относительно любой из двух "средних линий" прямоугольника ("средней линией" прямоугольника назовём отрезок, соединяющий середины двух его противоположных сторон). Ответ дайте в виде выражения, содержащего не более трёх членов (в них могут входить факториалы, биномиальные коэффициенты).

6. [4 балла] Найдите все тройки целых чисел $(a; b; c)$ такие, что:

- $a < b$,
- число $b - a$ не кратно 3,
- число $(a - c)(b - c)$ является квадратом некоторого простого числа,
- выполняется равенство $a^2 + b = 1000$.

7. [6 баллов] В основании призмы лежит равносторонний треугольник площади 4. Площади её боковых граней равны 6, 6 и 5. Найдите объём призмы.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☒ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

~1.

$$\sqrt{(25x+34)(3x+2)} = d_{10}$$

$$2-x = d_{10} \cdot 9^2$$

$$\sqrt{\frac{25x+34}{(3x+2)^3}} = d_{10} \cdot 9^2 \Rightarrow 9^2 \sqrt{(25x+34)(3x+2)} = \sqrt{\frac{25x+34}{(3x+2)^3}}$$

$$9^2 = \frac{1}{(3x+2)^2} \Rightarrow \frac{1}{(3x+2)^2} = \frac{1}{(3x+2)^2} \Rightarrow 9^2 = \frac{1}{(3x+2)^2} \Rightarrow 9^4 = \frac{1}{(3x+2)^4}$$

$$x = 2 - (25x+34)(3x+2) = \frac{1}{3x+2} \Rightarrow \frac{1}{3x+2} = \frac{1}{3x+2}$$

$$x = 2 - (25x+34) \cdot \frac{1}{3x+2} \Rightarrow \frac{2-x}{25x+34} = \frac{1}{3x+2}$$

$$9^4 = \frac{(2-x)^2}{(25x+34)(3x+2)} = \frac{1}{(3x+2)^2} \Rightarrow \frac{(2-x)^2}{(25x+34)(3x+2)} = \frac{1}{(3x+2)^2}$$

$$9^5 = \sqrt{\frac{25x+34}{3x+2}} \cdot \frac{1}{(3x+2)(2-x)} \Rightarrow 9^{10} = \frac{25x+34}{(3x+2)^2(2-x)^2}$$

$$\frac{25x+34}{(3x+2)^3} = \frac{1}{(2-x)^2}$$

Отв: корней x не существует.



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☒ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$p \cos 3x + 6 \cos 2x + 3(p+4) \cos x + 10 = 0$$

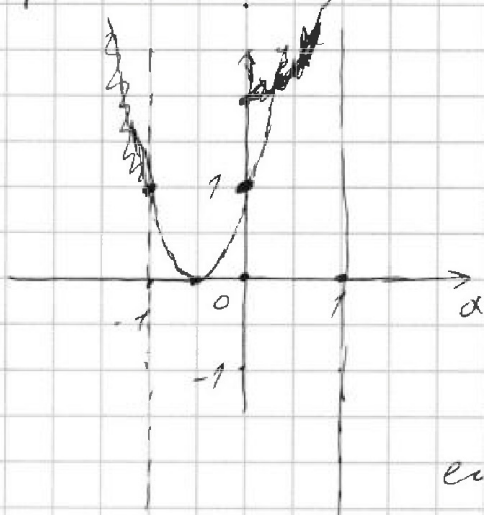
$$\cos 3x = 4 \cos^3 x - 3 \cos x; \quad \cos 2x = 2 \cos^2 x - 1 \quad \text{т.е.}$$

$$4p \cos^3 x - 3p \cos x + 12 \cos^2 x - 6 + 3(p+4) \cos x + 10 = 0 \quad \text{т.е.}$$

$$4p \cos^3 x + 12 \cos^2 x + 12 \cos x + 4 = 0 \Rightarrow$$

$$p \cos^3 x + 4 \cos^2 x + 4 \cos x + 1 = 0 \quad \text{поскольку } \cos x = a, \text{ то } a \in [-1; 1]$$

$$p a^3 + (2a+1)^2 = 0 \Rightarrow -p a^3 = (2a+1)^2$$



или $p \leq 0$, то решение будет

т.к. $a \in [-1; 1]$, то $a^3 \leq a^2$ всегда

т.е. если $-p a^3$ всегда меньше $(2a+1)^2$,

если $p > -9$ то при $p \geq 9$

$p \leq -9$ решение будет

если $p > 0$, то решение будет

т.е. всегда будет решение

$$\text{Отв: } p \in (-\infty; -9] \cup (0; +\infty)$$





На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☒ 7 ☐

СТРАНИЦА
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

~ 6.

$(d-c)(b-c) = p^2$, где p - простое число т.е. $d, b, c \in \mathbb{Z}$, то

так как p простое p^2 не делится на p следовательно произведение

~~каждого~~ $\pm p$ и $\pm p$ или ± 1 и $\pm p^2$ не и все

$d-c = \pm p \Rightarrow d-c = b-c$ т.е. $d=b$, чего не может быть

1) $d-c = 1 \Rightarrow b-c = p^2$ который не может быть т.к. $b > d$

2) $d-c = -p^2 \Rightarrow b-c = -1$ который не может быть т.к. $b > d$

и 1. $b-d = p^2 - 1 = (p-1)(p+1) \div 3$ число

$p \equiv 0 \pmod{3}$ т.е. $p \div 3$, $p \equiv 1 \pmod{3}$ т.е. $p-1 \div 3$ - число $\div 3$, $p \equiv 2 \pmod{3}$ т.е. $p+1 \div 3$

значит $p \div 3 \Rightarrow p=3$ т.е.

$d = c+1$, а $b = c+9 \Rightarrow b = d+8$ т.е.

$d^2 + d + 8 = 1000 \Rightarrow d^2 + d - 992 = 0$

$D = 1 + 4 \cdot 992 = 3969 = 63^2$

$d = \frac{-1 \pm 63}{2}$; $d = 31$ или $d = -32$

Всё

$b = 39$ или $b = -24$

$c = 30$ или $c = -33$

и 2. $b-d = -1 + p^2 = p^2 - 1$ аналогично $p=3$ т.е.

$d = c-9$; $b = c-1$ т.е. $b = d+8 \Rightarrow$

$d = 31$ или $d = -32$
 $b = 39$ или $b = -24$
 $c = 40$ или $c = -33$

Отв. $(31; 39; 30)$ или $(-32; -24; -33)$

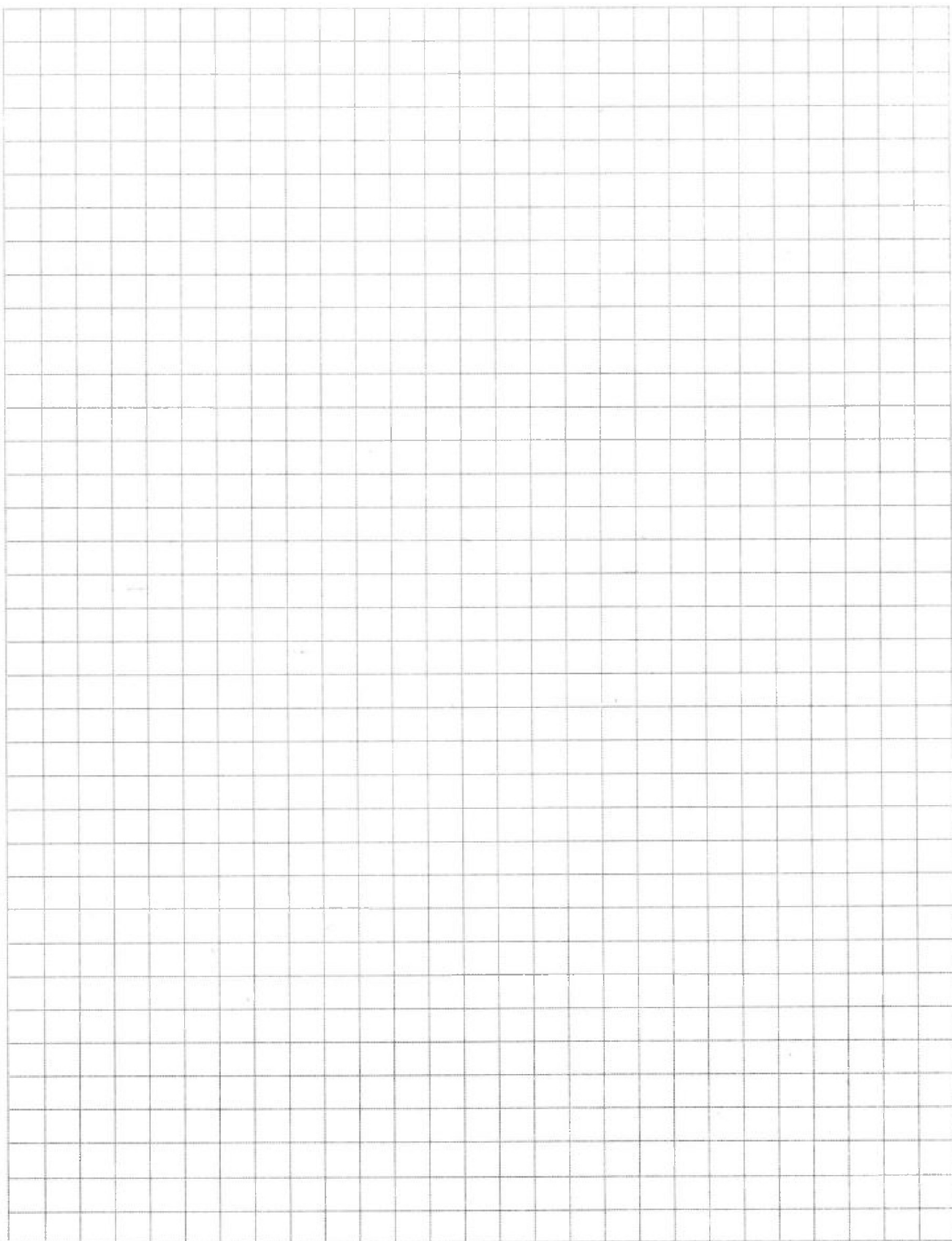


На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!





На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1
☐2
☐3
☐4
☐5
☐6
☐7
☐СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\sqrt{(25x+34)(3x+2)} = d_{10}$$

$$2-x = d_{10} \cdot 9^2$$

$$\sqrt{\frac{25x+34}{(3x+2)^3}} = d_{10} \cdot 9^7$$

$$\sqrt{d_8} = d_{10}$$

$$\sqrt{\frac{d_1}{e^5}} = d_{10} \cdot 9^7$$

$$d_{10}^2 \cdot 9^7 = \frac{d}{d^4}$$

$$d_{10}^2 \cdot 9^7 = \frac{25x+34}{3x+2}; \quad 9^7 = \frac{1}{3x+2}$$

$$\cancel{x=2-d_{10} \cdot 9^2} \quad (2-x)^2 \cdot 9^3 = \frac{25x+34}{3x+2}$$

$$\frac{(2-x)^2 \cdot 2-x}{\sqrt{(25x+34)(3x+2)^3}} \cdot 9 = \frac{25x+34}{3x+2}$$

$$(2-x)^3 \cdot 9 = \frac{(25x+34) \cdot \sqrt{25x+34}}{\sqrt{3x+2}}$$

$$x = -\frac{1}{3}$$

$$\frac{2 + \frac{1}{3}}{-25 + \frac{1}{3} + 34} = 1$$

$$\frac{6+1}{-25+302} = 1$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7
☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐

СТРАНИЦА
 _ ИЗ _

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

~3.

$$p \cos^3 x + 6 \cos^2 x + 3(p+4) \cos x + 10 = 0$$

$$\cos(2x+x) =$$

$$p \cos^3 x + 3 \cos^2 x + 3 \cos x + 1 = 0$$

$$p d^3 + 3 d^2 + 3 d + 1 = 0;$$

$$\cos(2x+x) = \cos 2x \cdot \cos x - \sin 2x \cdot \sin x =$$

$$= (2 \cos^2 x - 1) \cos x - 2 \sin^2 x \cdot \cos x =$$

$$= 2 \cos^3 x - \cos x - 2(1 - \cos^2 x) \cos x =$$

$$= 2 \cos^3 x - \cos x - 2 \cos x + 2 \cos^3 x = 4 \cos^3 x - 3 \cos x$$

$$\cos 2x = 2 \cos^2 x - 1$$

$$4p \cos^3 x - 3p \cos x + 12 \cos^2 x - 6 + 3(p+4) \cos x + 10 = 0$$

$$4p \cos^3 x + 12 \cos^2 x + 12 \cos x + 4 = 0$$

$$p d^3 + 4 d^2 + 4 d + 1 = 0$$

$$p d^3 + (2d+1)^2 = 0$$





На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

~ 4.

$$A + B + C$$

$$A \cup B = x$$

$$A \cup C = x$$

$$B \cup C = x$$

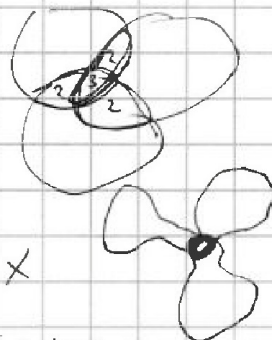
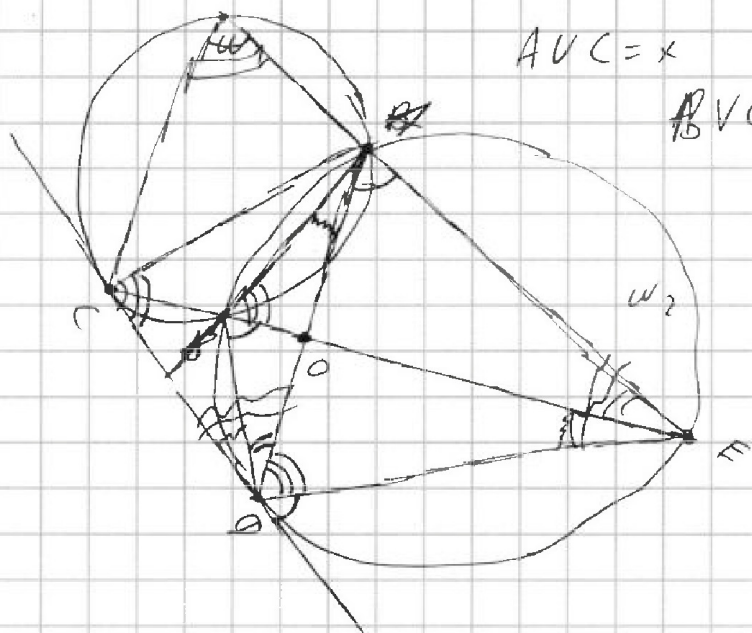
$$CO \neq x$$

$$OE = 20x$$

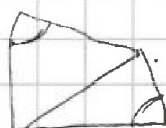
$$\frac{CE}{AE} =$$

$$\frac{AD}{EK} = \frac{20K}{AD}$$

$$AD^2 = 140K^2$$



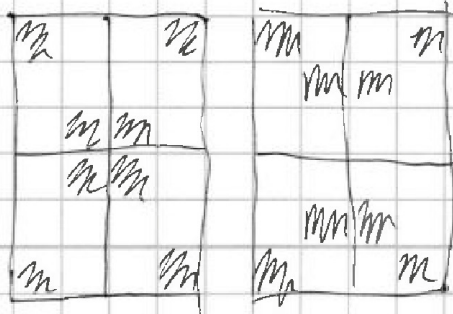
~ 5.



$$500 \cdot 120 = 500 \cdot 60$$



$$C^4_{500 \cdot 60} + C^4_{500 \cdot 60} =$$



$$60 \cdot 250 \cdot C^2_{50}$$

$$7ED^2 - 5780K^2 = 20CD^2 - 3470$$

$$7ED^2 - 20CD^2 = 60K^2$$

ED



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

~ 1.

$$\sqrt{25x+34}/(3x+2)^3 = 0,10$$

$$2-x = 0,10 \cdot 9^2$$

$$\sqrt{25x+34}/(3x+2)^3 = 0,10 \cdot 9^7 = (2-x) \cdot 9^5$$

$$\sqrt{25x+34} \cdot 0,10^2 \cdot 9^7 = \frac{25x+34}{3x+2} = (2-x)^2 \cdot 9^3$$

$$9^3 = \frac{25x+34}{(3x+2)(2-x)^2} ; 9^2 = \frac{(2-x)^2}{(25x+34)/(3x+2)}$$

$$9^5 = \frac{1}{\sqrt{3x+2}}$$

~ 2.

$$\text{Если } y \geq 18, \text{ то } 3y+2-36 = \sqrt{400-z^2}$$

$$3y+z^2=434$$

$$3y-34 = \sqrt{400-z^2}$$



$$9y^2 - 204y + 1156 = 400 - z^2$$

$$x+6 + 3 - x - 2z - 2\sqrt{x+6} \cdot \sqrt{3-x-2z} = 4y - 12x - 4x^2 - 4z + 99$$

$$- 18 \sqrt{y-3x-x^2+z}$$

$$- 40 - 6z - 4y + 12x + 4x^2 = + 2 \sqrt{3x-x^2-2zx+18-6x+12z-78}$$

$$\sqrt{\dots}$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1
☐2
☐3
☐4
☐5
☐6
☐7
☐СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

-6.

 $(d; e; c)$

$$d < e$$

$$(e - d) \div 3$$

$$(d - c)(e - c) = p^2 \Rightarrow d - c = p \text{ и } e - c = p \text{ или } d - c = 1 \text{ и } e - c = p^2$$

$$d^2 + e = 1000$$

$$\text{или } \begin{cases} d = c + 1 \\ e - c = p^2 \end{cases} \text{ или } \begin{cases} d = c - 1 \\ e - c = -p^2 \end{cases}$$

или 1.

$$c^2 + 2c + 1 + p^2 + c = 1000 \quad e - d = p^2 + c - c - 1 = p^2 - 1$$

$$(p - 1)(p + 1) \div 3$$

$$p \equiv 1 \pmod{3} \Rightarrow p - 1 \div 3; \quad p \equiv 2 \pmod{3} \Rightarrow p + 1 \div 3$$

$$p \equiv 0 \pmod{3} \Rightarrow p = 3$$

или 1. $d = c + 1$

$$e = c + 9$$

$$\text{или } e = e - 8$$

$$e^2 - 16e + 64 + e = 1000$$

$$ED^2 = 140k^2 + 400k^2 - 2 \cdot \sqrt{140} \cdot 20 \cdot k^2 \cdot \cos$$

$$CD^2 = 49k^2 + 140k^2 - 2 \cdot \sqrt{140} \cdot 7k^2 \cdot \cos; \quad ED^2 = 540k^2 = \frac{20}{7}$$

$$d - c = -p$$

$$\begin{array}{r} 1 \\ 63 \\ \times 63 \\ \hline 189 \\ 378 \\ \hline 3969 \end{array}$$

$$d - e = 1 - p^2$$

$$1000 - 32 = 968$$

$$AD^2 = \sqrt{140} \cdot k$$

$$AC = 7k$$

$$AE = 20k$$

$$\frac{ED^2 - 540k^2}{CD^2 - 149k^2} = \frac{20}{7}$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐

СТРАНИЦА
из

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



- 1.

$$\sqrt{(25x+34)} \cdot \sqrt{(3x+2)} = d_1$$

$$\sqrt{(25x+34)} \cdot \sqrt{(3x+2)} \cdot q^x = 2-x$$

$$(2-x)q^5 =$$

$$\sqrt{(25x+34)} \cdot \sqrt{(3x+2)} = d_1 \cdot q^9$$

$$2-x = d_1 \cdot q^{11}$$

$$\frac{\sqrt{(25x+34)}}{(3x+2)^3} = d_1 \cdot q^{17}$$

$$\sqrt{(25x+34)} \cdot \frac{2-x}{\sqrt{(25x+34)} \cdot \sqrt{(3x+2)}} = q^2$$

$$\frac{(25x+34) \cdot (3x+2)}{\sqrt{(25x+34)} \cdot (3x+2)^3} = d_1 \cdot q$$

$$S = d_1 \cdot h_1$$



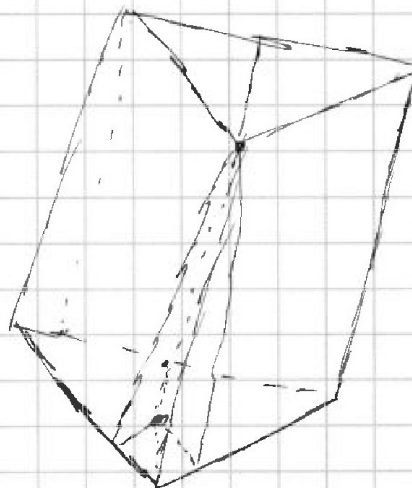
$$\frac{\sqrt{3}}{4} d^2$$

$$\frac{1}{2} \cdot d^2 \cdot \sin 60 = \frac{\sqrt{3}}{4} d^2 = 4$$

$$d^2 = \frac{16}{\sqrt{3}}$$

$$d = \frac{4}{\sqrt[4]{3}}$$

$$V = S_{\text{осн}} \cdot h$$





На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1
☐2
☐3
☐4
☐5
☐6
☐7
☐СТРАНИЦА
ИЗ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

~2.

$$\begin{cases} \sqrt{x+8} - \sqrt{3-x-2z} + 7 = 2\sqrt{y-3x-x^2+z} \\ |y+2| + 2|y-18| = \sqrt{400-z^2} \end{cases}$$

$$\begin{array}{r} 3 \\ \times 16 \\ \hline 48 \\ \times 96 \\ \hline 288 \end{array}$$

$$\text{так как } y \geq 18, \text{ то } y+2+2y-18 = \sqrt{400-z^2} \text{ так как}$$

$$3y-16 = \sqrt{400-z^2}$$

$$9y^2 - 96y + 256 = 400 - z^2$$

$$9y^2 + z^2 - 96y$$

$$\begin{aligned} \cos 2x &= \cos^2 x - \sin^2 x \\ &= 1 - 2\sin^2 x \end{aligned}$$

~3.

$$p \cos 3x + 6 \cos 2x + 3(p+4) \cos x + 10 = 0$$

$$\cos 3x = \cos(2x+x) = \cos 2x \cdot \cos x - \sin 2x \cdot \sin x =$$

$$= (1-2\sin^2 x) \cdot \cos x - 2\sin^2 x \cdot \cos x = \cos x - 2\sin^2 x \cdot \cos x - 2\sin^2 x \cdot \cos x$$

$$= \cos x - 4 \sin^2 x \cdot \cos x$$

$$\cos 2x = 1 - 2\sin^2 x \text{ так как}$$

$$p \cos x - 4p \cos x \cdot \sin^2 x + 6 - 12 \sin^2 x + 3p \cos x + 12 \cos x + 10 =$$

$$= (4p \cos x + 12) \sin^2 x + (4p+12) \cos x + 16 = 0$$

$$(p \cos x + 3) \sin^2 x + (p+3) \cos x + 4 = 0 \quad p \cos$$

$$(p \cos x + 3) \cdot (1 - \cos^2 x) + (p+3) \cos x + 4 = 0; \quad p \cos x - p \cos^3 x + 3$$

$$- 3 \cos^3 x - (p+3) \cos x + 4 = 0$$

$$p \cos^3 x + 3 \cos^3 x + 3 \cos x + 1 = 0$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

- 1.

$$\sqrt{(25x+34)/(3x+2)} = a_{10}$$

$$2-x = a_{10} \cdot 9^2$$

мысли $25x+34=0$, т.е.

$$\sqrt{\frac{25x+34}{(3x+2)^3}} = a_{10} = a_{10} \cdot 9^7$$

$$\frac{1}{\sqrt{(3x+2)^3}} = \sqrt{3x+2} \cdot 9^7 \Rightarrow 1 = (3x+2)^2 \cdot 9^7$$

$$9^7 = \frac{1}{(3x+2)^2}$$

$$2-x = \dots$$

$$9^2 = \frac{2-x}{a_{10}} \Rightarrow \sqrt{\frac{25x+34}{(3x+2)^3}} = 9^5 (2-x) \Rightarrow 9^{10} = \frac{25x+34}{(3x+2)^3 (2-x)^2}$$

$$\text{т.е. } 9^3 = \frac{(25x+34)}{(3x+2)(2-x)^2} \Rightarrow 9^4 = \frac{(2-x)^2}{(25x+34)(3x+2)}$$

$$9^7 =$$

$$9^2 = \frac{(3x+2)^2}{\sqrt{\frac{25x+34}{(3x+2)^3}}} = \sqrt{3x+2}$$

$$9^2 =$$