



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

11 КЛАСС. Вариант 1



- 1. [3 балла] Найдите все действительные значения x , при каждом из которых существует геометрическая прогрессия, состоящая из действительных чисел и такая, что её седьмой член равен

$$\sqrt{(25x-9)(x-6)}, \text{ девятый член равен } x+3, \text{ а пятнадцатый член равен } \sqrt{\frac{25x-9}{(x-6)^3}}.$$

- 2. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \sqrt{x+5} - \sqrt{1-x-4z} + 4 = 2\sqrt{y-4x-x^2+z}, \\ |y+4| + 4|y-5| = \sqrt{81-z^2}. \end{cases}$$

- 3. [5 баллов] Найдите все значения параметра p , при которых уравнение

$$p \cos 3x + 3(p+4) \cos x = 6 \cos 2x + 10$$

имеет хотя бы одно решение. Решите это уравнение при всех таких p .

4. [5 баллов] Две окружности ω_1 и ω_2 пересекаются в точках A и B , а их общая касательная имеет с ω_1 и ω_2 общие точки C и D соответственно, причём точка B расположена ближе к прямой CD , чем точка A . Луч CB пересекает ω_2 в точках B и E . Найдите отношение $ED : CD$, если диагональ AD четырёхугольника $ACDE$ делит отрезок CE в отношении $2 : 5$, считая от вершины C .
- 5. [4 балла] Дан клетчатый прямоугольник 100×400 . Сколькими способами можно закрасить 8 клеток этого прямоугольника так, чтобы закрашенное множество обладало хотя бы одной из следующих симметрий: относительно центра прямоугольника, относительно любой из двух "средних линий" прямоугольника ("средней линией" прямоугольника назовём отрезок, соединяющий середины двух его противоположных сторон). Ответ дайте в виде выражения, содержащего не более трёх членов (в них могут входить факториалы, биномиальные коэффициенты).
- 6. [4 балла] Найдите все тройки целых чисел $(a; b; c)$ такие, что:
- $a < b$,
 - число $b - a$ не кратно 3,
 - число $(a - c)(b - c)$ является квадратом некоторого простого числа,
 - выполняется равенство $a^2 + b = 710$.
- 7. [6 баллов] В основании призмы лежит равносторонний треугольник площади 1. Площади её боковых граней равны 3, 3 и 2. Найдите объём призмы.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



СТРАНИЦА

2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$2. \quad \Rightarrow \quad x \in (-\infty; 9/25] \cup [6; +\infty) \setminus \{5; 6; 7; -3; 9/25\}$$

$$x \in (-\infty; -3) \cup (-3; 9/25) \cup (6; 7) \cup (7; +\infty)$$

$$\text{Ответ: } x \in (-\infty; -3) \cup (-3; 9/25) \cup (6; 7) \cup (7; +\infty)$$



1 ☒ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
1 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

1. Геометрическая прогрессия $b, qb, q^2b, \dots, q^{n-1}b, \dots$

$$\sqrt{(25x-9)(x-6)} = q^6 b \quad (1)$$

$$x+3 = q^8 b \quad (2)$$

$$\sqrt{\frac{25x-9}{(x-6)^3}} = q^{14} b \quad (3)$$

$$(3) : (1) \Rightarrow q^8 = \frac{1}{\sqrt{(x-6)^7}} = \frac{1}{(x-6)^2} \text{ , т.к. } b \neq 0$$

$$(2) \Rightarrow x+3 = q^8 b = \frac{b}{(x-6)^2}$$

$$(x+3)(x-6)^2 = b$$

$$ODZ: (25x-9)(x-6) \geq 0$$

и интервалов

$$\begin{array}{c} + \quad - \quad + \\ \hline 9/25 \quad 6 \end{array} \quad x$$

$$\begin{cases} x \in (-\infty; 9/25] \cup [6; +\infty) \\ x-6 \neq 0 \end{cases}$$

2. Заметим, что геометрическая прогрессия существует, если существует q, b и при этом они не равны 0, а так же q не равно 1 и все члены не равны 0

$$q = \frac{1}{\sqrt[4]{|x-6|}} \notin \{0, 1\} \Rightarrow x \neq 6$$

$$|x-6| \neq 1$$

$$x-6 \neq \pm 1$$

$$x \notin \{5; 7\}$$

$$b = (x+3)(x-6)^2 \neq 0 \Rightarrow x \neq -3$$

$$x \neq 6$$

$$\sqrt{(25x-9)(x-6)}; x+3; \sqrt{\frac{25x-9}{(x-6)^3}} \neq 0 \Rightarrow x \neq \frac{9}{25}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1
☐

2
☒

3
☐

4
☐

5
☐

6
☐

7
☐

СТРАНИЦА
4 ИЗ 4

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

5. по п. 2, 4. ~~по~~ подпадают ответом

$$y = 5$$

$$z = 0$$

$$x \in \{-2 \pm \sqrt{8}; \frac{4 - \sqrt{11}}{2}\}$$

Ответ : $x \in \{\frac{4 - \sqrt{11}}{2}; -2 \pm \sqrt{8}\}$

$$y = 5$$

$$z = 0$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☒	☐	☐	☐	☐	☐

СТРАНИЦА
1 ИЗ 4

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$1. \begin{cases} \sqrt{x+5} - \sqrt{1-x-4z} + 4 = 2\sqrt{y-4x-x^2+z} \\ |y+4| + 4|y-5| = \sqrt{81-z^2} \end{cases}$$

ОДЗ:

$$\begin{aligned} x+5 &\geq 0 \\ 1-x-4z &\geq 0 \\ y-4x-x^2+z &\geq 0 \\ 81-z^2 &\geq 0 \end{aligned}$$

~~не надо~~

но н. 2 $y \geq 5, z \geq 0$:

$$\begin{aligned} x+5 &\geq 0 \\ 1-x &\geq 0 \end{aligned}$$

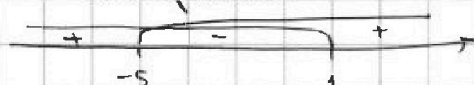
$$5-4x-x^2 \geq 0$$

$$9-(x+2)^2 \geq 0$$

~~$$(5+x)(x-1) \leq 0$$~~

$$(5+x)(x-1) \leq 0$$

и интервалы



$$x \in [-5; 1]$$

$$4. \sqrt{(x+5)(1-x)} \in [1; 5/2]$$

$$1) (x+5)(1-x) = 1$$

$$5-4x-x^2 = 1$$

$$4-4x-x^2 = 0$$

$$x^2+4x+4 = 8$$

$$x+2 = \pm\sqrt{8}$$

$$x = -2 \pm \sqrt{8}$$

$$3) 4 < 8 < 9 \Rightarrow 2 < \sqrt{8} < 3$$

$$0 < -2 + \sqrt{8} < 1$$

$$-5 < -2 - \sqrt{8} < -4$$

но не подходит

$$9 < 11 < 16 \Rightarrow 3 < \sqrt{11} < 4 \Rightarrow \frac{7}{2} < \frac{4 + \sqrt{11}}{2} < 24 - \text{не подходит}$$

$$0 < \frac{4 - \sqrt{11}}{2} < \frac{1}{2} - \text{не подходит}$$

$$2) (x+5)(1-x) = \frac{25}{4}$$

$$5-4x-x^2 = \frac{25}{4}$$

$$x^2-4x+\frac{5}{4} = 0$$

~~$$4x^2-16x+5 = 0$$~~

$$D = 16 - 5 = 11$$

$$x = \frac{4 \pm \sqrt{11}}{2}$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☒ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА

3 из 4

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

3. $\begin{cases} y = 5 \\ z = 0 \end{cases}$

$$\sqrt{x+5} - \sqrt{1-x-4z} + 4 = \sqrt{x+5} + -\sqrt{1-x} + 4 =$$

$$= 2\sqrt{4-4x-x^2+z^2} = 2\sqrt{4-4x-x^2}$$

$$\sqrt{x+5} - \sqrt{1-x} + 4 = 2\sqrt{4-(x+2)^2}$$

$$\sqrt{x+5} - \sqrt{1-x} = 2\sqrt{(x+5)(1-x)} - 4$$

~~$$\begin{aligned} a &= \sqrt{x+5} & b &= \sqrt{1-x} \\ a-b &= 2ab-4 & \Rightarrow & a+4 = (2a+1)b \\ a^2-b^2 &= 6 \\ \left(\frac{a+4}{2a+1}\right)^2 + a^2 &= 6 \\ a^2 + 8a + 16 + 4a^2 + 4a + 1 &= 6 \\ a^2 + 8a + 16 + 4a^2 + 4a + 1 &= 6 \end{aligned}$$~~

$$a = \sqrt{(x+5)(1-x)}$$

$$x+5 + 1-x - 2\sqrt{(x+5)(1-x)} = 4(x+5)(1-x) -$$

$$- 16\sqrt{(x+5)(1-x)} + 16$$

$$4a^2 - 14a + 10 = 0$$

$$2a^2 - 7a + 5 = 0$$

$$a \in \left\{1; \frac{5}{2}\right\}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☒ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА

2 ИЗ 4

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$2 \quad |y+4| + 4|y-5| = \sqrt{81-z^2}, \quad a \in [0; 9]$$

$$\bullet \quad y \in (-\infty; -4)$$

$$-y-4 + -4y+20 = -5y+16 \quad \text{и} \quad z = a$$

$$0 \leq -5y+16 \leq 9$$

$$-16 \leq -5y \leq -7$$

$$\cancel{3,2 \geq y \geq 1,4}$$

$$3,2 \geq y \geq 1,4 \Rightarrow \text{н.к. } y < 4$$

$$\bullet \quad y \in [-4; 5]$$

$$+y+4 + 20 - 4y = 24 - 3y = a \in$$

$$0 \leq 24-3y \leq 9$$

$$24 \geq 3y \geq 15$$

$$\begin{array}{l} 8 \geq y \geq 5 \\ -4 \leq y \leq 5 \end{array} \quad \left| \begin{array}{l} \rightarrow \text{н.к.} \\ \bullet \quad y=5: \quad 9 = \sqrt{81-z^2} \\ \quad \quad \quad z=0 \end{array} \right.$$

$$\bullet \quad y \in (5; +\infty)$$

$$y+4 + 4y+20 = 5y+16 = 0$$

$$0 \leq 5y+16 \leq 9$$

$$16 \leq 5y \leq 25$$

$$\frac{16}{5} \leq y \leq 5 \Rightarrow \text{н.к. } y > 5$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

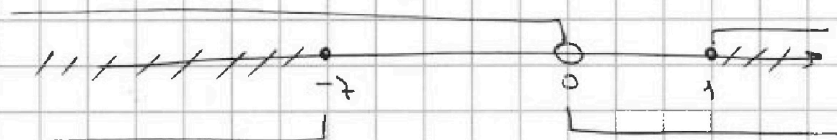
1 ☐ 2 ☐ 3 ☒ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА

5 ИЗ 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

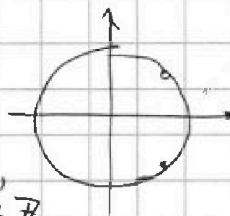
3. Найдите пересечение множеств из п. 3.1, 3.2, 3.3 для этого изобразим их на коор. прямой



$$\Rightarrow p \in (-\infty; -7] \cup [1; +\infty)$$

4. $\cos x = \frac{1}{\sqrt[3]{p-1} + 1}$

$$x = \pm \arccos\left(\frac{1}{\sqrt[3]{p-1} + 1}\right) + 2\pi k, \quad k \in \mathbb{Z}$$



Ответ: $p \in (-\infty; -7] \cup [1; +\infty)$

$$x = \pm \arccos\left(\frac{1}{\sqrt[3]{p-1} + 1}\right) + 2\pi k, \quad k \in \mathbb{Z}$$



1 ☐ 2 ☐ 3 ☒ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
2 ИЗ 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

3.



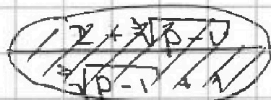
$$1) \quad \sqrt[3]{p-1} + 1 \neq 0$$

$$\sqrt[3]{p-1} \neq -1$$

$$p-1 \neq -1$$

$$p \neq 0$$

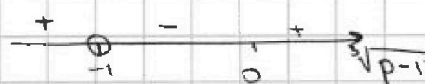
$$2) \quad \frac{1}{\sqrt[3]{p-1} + 1} \leq +1$$



$$\frac{1}{\sqrt[3]{p-1} + 1} - 1 \leq 0$$

$$\frac{\sqrt[3]{p-1}}{\sqrt[3]{p-1} + 1} \geq 0$$

и интервалов



$$\begin{cases} \sqrt[3]{p-1} < -1 \\ \sqrt[3]{p-1} \geq 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} p-1 < -1 \\ p-1 \geq 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} p < 0 \\ p \geq 1 \end{cases}$$

$$3) \quad \frac{1}{\sqrt[3]{p-1} + 1} \geq -1$$

$$\frac{2 + \sqrt[3]{p-1}}{\sqrt[3]{p-1} + 1} \geq 0$$

и интервалов



$$\begin{cases} \sqrt[3]{p-1} \leq -2 \\ \sqrt[3]{p-1} > -1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} p-1 \leq -8 \\ p-1 > -1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} p \leq -7 \\ p > 0 \end{cases}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☒ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
1 ИЗ 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$1. \quad p \cos 3x + 3(p+1) \cos x = p(4 \cos^3 x - 3 \cos x) + 3p \cos x + 4 \cdot 3 \cos x = 6 \cos^2 x + 10 = 6(2 \cos^2 x - 1) + 10$$

$$4p \cos^3 x + 12 \cos x - 12 \cos^2 x - 4 = 0$$

$$p \cos^3 x - 3 \cos^2 x + 3 \cos x - 1 = 0$$

$$(p-1) \cos^3 x + \cos^3 x - 3 \cos^2 x + 3 \cos x - 1 = 0$$

$$(\cos x - 1)^3 = (p-1) \cos^3 x$$

2. Заметим, что $\cos x \in [-1; 1] \Rightarrow \cos x - 1 \in [-2; 0]$
 $(\cos x - 1)^3 \in [-8; 0]$

$$(1 - \cos x)^3 = (p-1) \cos^3 x$$

2. Заметим, что $\cos x \in [-1; 1]$
 $\cos x \in [-1; 1] \Rightarrow 1 - \cos x \in [0; 2]$
 $\cos^3 x \in [-1; 1] \Rightarrow (1 - \cos x)^3 \in [0; 8]$
 $(p-1) \cos^3 x \in [1-p; p-1]$

$$(1 - \cos x)^3 = 0$$

$$2. \quad 1 - \cos x = \sqrt[3]{p-1} \cos x$$

$$\cos x (\sqrt[3]{p-1} + 1) = 1 \quad | : (\sqrt[3]{p-1} + 1) \neq 0, \text{ т.к. } p-1 \neq -1$$

$$\cos x = \frac{1}{\sqrt[3]{p-1} + 1} \in [-1; 1]$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

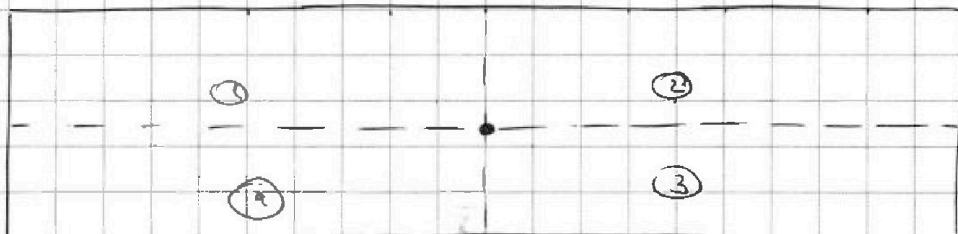
1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☒ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА

1 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

1.



Замечание, что когда я выбираю клетку
второе выбирается автоматически
(м.к. сим-на)

Также, замечание что когда объединение
точек сим-но относительно обеих
средних точек, оно сим-но относительно
центральной точки и при повороте
их нулево возвести

2. Сим-но относительно центра:

~~Всего вариантов 100.400 = 20000~~
~~и выбрать можно 4 точки~~
тогда 1 сим-на 3, 2 - сим-на 4

только рас-но только пара 1, 2
и выбрать можно 4 точки
Всего вариантов $\frac{100 \cdot 400}{2} = 20000$

и 4 клетки можно выбрать ~~Всего 20000~~
~~20000 19999 19998 19997~~

3. Сим-но относительно "ср. линии":

аналог. и 2, только сим-но 1-4, 2-3
или 1-2, 4-3

и 2 варианта $2 \cdot 20000$
→ м.к. 2 ср. линии



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☒ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

4. Сила - нм отн. обеих ср. точек

⇒ все части сила - нм ⇒
нужно вычитать 2 точки в одной части.
Всего точек $\frac{200 \cdot 100}{10} = 10000$

⇒ Вариантов C_{10000}^2

5. по н. 1, 2, 3, 4 ⇒ всего вариантов $3C_{10000}^4 - C_{10000}^2$

Ответ: $3C_{10000}^4 - C_{10000}^2$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☒ 7 ☐

СТРАНИЦА
2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$3. \quad a^2 + b^2 = (c+1)^2 + p^2 + c = c^2 + 3c + 1 + p^2 = 710$$

$$p = 3$$

$$\Rightarrow c^2 + 3c + 1 + 9 = 710$$

$$c^2 + 3c = -700 - 9$$

$$D = 9 + 700 \cdot 4 = 2809 = 53^2$$

$$c = \frac{-3 \pm 53}{2} \in \{25; -28\}$$

$$4. \quad 1) \quad c = 25$$

$$a = c+1 = 26$$

$$b = c+p^2 = 25+9 = 34$$

$$\bullet \quad a < b : 26 < 34 \text{ - верно}$$

$$\bullet \quad b-a = 34-26 = 8 = 1 \cdot 8 \neq 3$$

$$\bullet \quad (a-c)(b-c) = 1 \cdot 9 = 3^2$$

$$\bullet \quad a^2 + b^2 = 26^2 + 34^2 = 100 +$$

$$+ 36 + 26 \cdot 6 \cdot 2 + 34 = 470 + 240 = 710$$

$$2) \quad c = -28$$

$$a = -27 = c+1$$

$$b = c+p^2 = c+9 = -19$$

$$\bullet \quad a < b : -27 < -19$$

$$\bullet \quad b-a = 8 \neq 3$$

$$\bullet \quad (a-b)(b-c) = 9 = 3^2$$

$$\bullet \quad a^2 + b^2 = 400 + 49 + 720 \cdot 2 - 19 = 430 + 280 = 710$$

2) Нашим решением тройки $(a; b; c)$:

$$(26; 34; 25); (-27; -19; -28)$$

Ответ: $(26; 34; 25); (-27; -19; -28)$

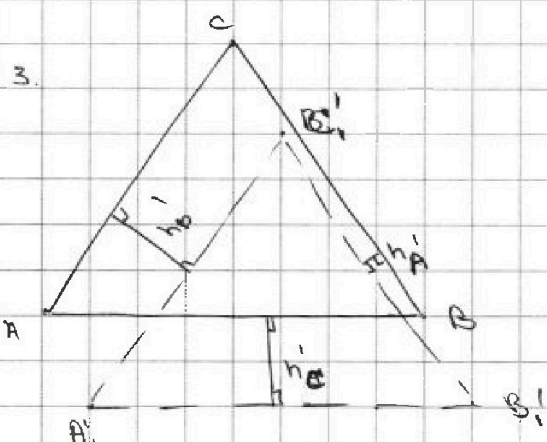


На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☒

СТРАНИЦА
3 ИЗ 4

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



$$h_A^2 - h_A'^2 = h^2$$

$$h_B^2 - h_B'^2 = h^2$$

$$h_C^2 - h_C'^2 = h^2$$

по н. 1 $h_A = h_B$
 $\Rightarrow h_A' = h_B'$

~~$\Rightarrow A'B'C' \text{ - равносторонний}$~~

4. Прямые пер-ры из C на AC и CB

$\Rightarrow$ они равны $\Rightarrow CC' - \text{выс.} - \text{ср. в } \angle ABC, \angle ACB$

$\Rightarrow (CC') \perp (AB) \perp (A'B')$ ~~и т.д.~~

$\Rightarrow$ высота, медиана

~~$AA' \perp AB, BB' \perp AB, CC' \perp AB$~~

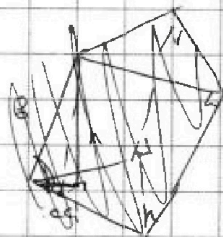
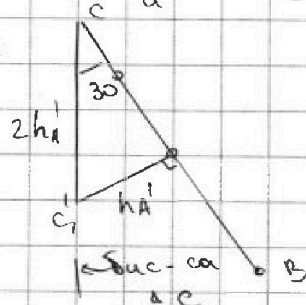
$\Rightarrow A'B'BA$ - ч-к

$\Rightarrow$ по н. 2 ~~$A'B'BA$~~ - ч-к

$$\Rightarrow A'B = b = hc = \frac{2}{a} = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$\Rightarrow h_A = \frac{8}{a} = \frac{3\sqrt{3}}{2}$$

5. $\triangle CC'H_A$



$$\triangle CC'C_1$$

$$b^2 = h^2 + 4h_A^2 = \sqrt{3}$$

н.к. $(CC') \perp (ABC)$

$$h^2 + h_A'^2 = h_A^2 = \frac{9\sqrt{3}}{4} \text{ (н. 3)}$$

$$\Rightarrow h^2 = \frac{8\sqrt{3}}{3} = \frac{8}{\sqrt{3}} \quad V = S_{ABC} h = \sqrt{81\sqrt{3}}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1
☐

2
☐

3
☐

4
☐

5
☐

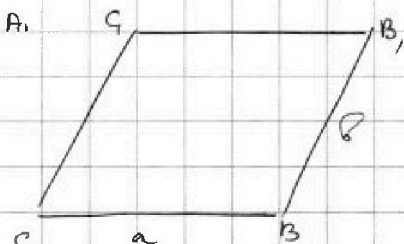
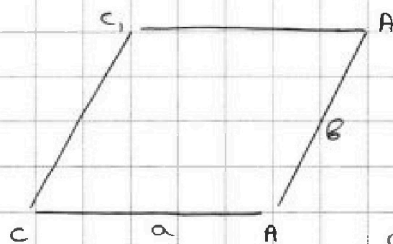
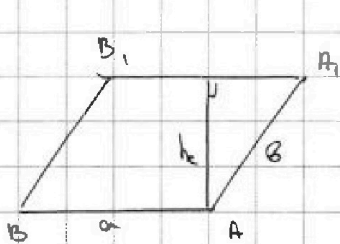
6
☐

7
☒

СТРАНИЦА
2 ИЗ 4

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

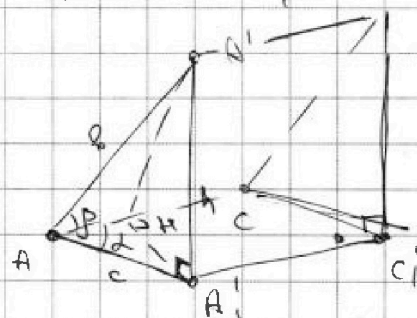
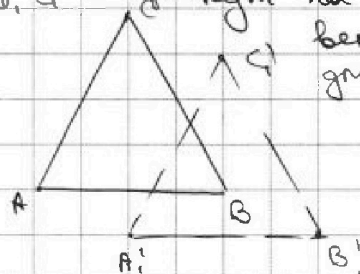
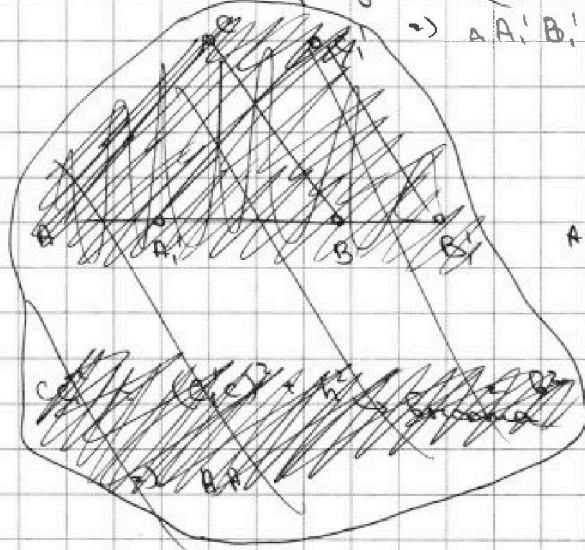
2.



Рассмотрим проек. $\Delta A_1B_1C_1$ на (ABC)

т.е. проекция $(A_1B_1C_1)$ и (ABC)

$\Rightarrow \Delta A_1B_1C_1$ - сдвинут на какой-то вектор
длиной c



* $(A_1H) \perp (AC)$ - проекция
 (A_1H) - высота $\Rightarrow (A_1H) \perp (AC)$

$\Rightarrow c \cdot \sin \alpha = A_1H$

$b \cdot \sin \beta = A_1H$

~~$(A_1H)^2 - (c \sin \alpha)^2 = h^2$~~

$(A_1H)^2 - (A_1'H)^2 = h^2$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☒

СТРАНИЦА
1 ИЗ 4

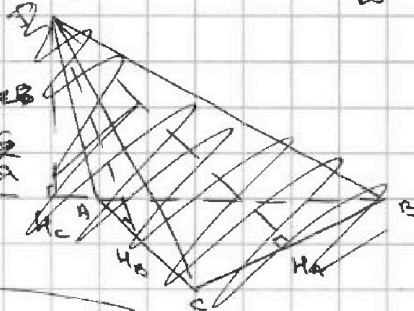
Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

1. В основании равнобокого треугольника со стороной $a \Rightarrow S_{\text{осн}} = \frac{\sqrt{3}a^2}{4} = 1 \Rightarrow a^2 = \frac{4}{\sqrt{3}}$

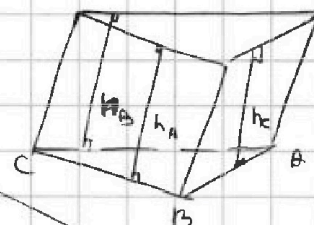
$$S_{\text{бок.гран}} = \frac{1}{2} a h_i$$

$$3 = \frac{h_A}{2} a = \frac{h_B}{2} a = \frac{h_C}{2} a \Rightarrow h_A = h_B = h_C = \frac{2}{a}$$

$$2 = \frac{h_C}{2} a \Rightarrow S_{\text{бок}} = \frac{4}{a}$$



2. Проекция S на ABC - это O
 $(SH_A) \perp (BC)$ - макс. $\Rightarrow (OH_A) \perp (BC)$
 (OH_A) - проекция
окружности $(OH_A) \perp (AB)$
 $(OH_B) \perp (AC)$



Также замечание, что $(SO) \perp (ABC) \Rightarrow$
 $(SO) \perp (OH_A) \Rightarrow (SH_A)^2 = (OH_A)^2 + (OS)^2$

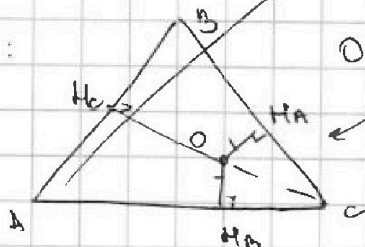
$$\Rightarrow (OH_A)^2 + (OS)^2 = \left(\frac{2}{a}\right)^2 = \frac{36\sqrt{3}}{4} = 9\sqrt{3}$$

$$(OH_B)^2 + (OS)^2 = 9\sqrt{3}$$

$$OS^2 + (OH_C)^2 = \left(\frac{4}{a}\right)^2 = \frac{16\sqrt{3}}{4} = 4\sqrt{3}$$

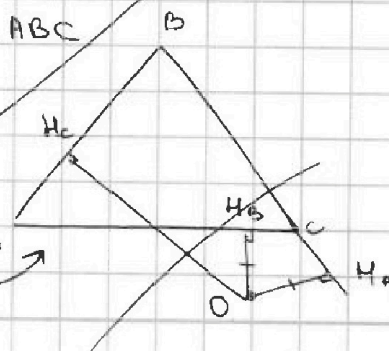
$$\Rightarrow OH_A = OH_B = OH_C = \frac{2}{a}$$

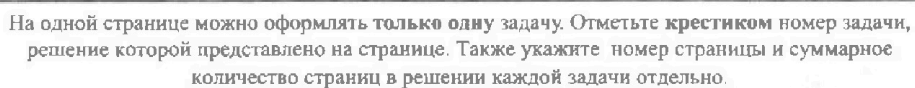
3. (ABC) :



O - внутри $\triangle ABC$

O - вне $\triangle ABC$

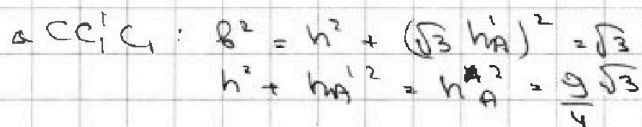




СТРАНИЦА

4 ИЗ 4

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



$$h^2 = \frac{23\sqrt{3}}{8}$$

Orbiter: $V \in \left\{ \sqrt{\frac{23}{8}} \sqrt{3}, \frac{\sqrt{8}}{\sqrt{3}} \right\}$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



СТРАНИЦА
из

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

5. O - вне $\triangle ABC$, $\angle OCB = \angle ABB + \angle OCA =$
 $= \angle ACB + 180^\circ - \angle ACB = 180^\circ + \angle ACB = 90^\circ + 30^\circ$
 $\hookrightarrow$ т.к. $\angle$ вне-са $\angle$ внеш. $\angle$ угла

$$\angle OCB + \angle ABC = 90^\circ + 90^\circ = 180^\circ$$

(т.к. $\triangle ABC$ - рб)

а) $OC \parallel AB$ б) $OK_c = p(AB; OC) = h_c$

$$OK_c = \frac{\sqrt{3}a}{2} = \sqrt{3}$$

Высота $\triangle ABC$
из т.с

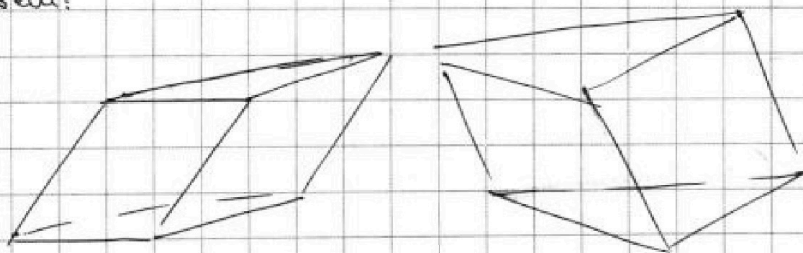
$$\rightarrow (OS)^2 + \sqrt{3} = 4\sqrt{3}$$

$$OS^2 = 3\sqrt{3}$$

$$OS = \sqrt{3}\sqrt{3}$$

$$V = \frac{1}{3} OS \cdot S_{ABC} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

Ответ:





На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1
☐

2
☐

3
☐

4
☐

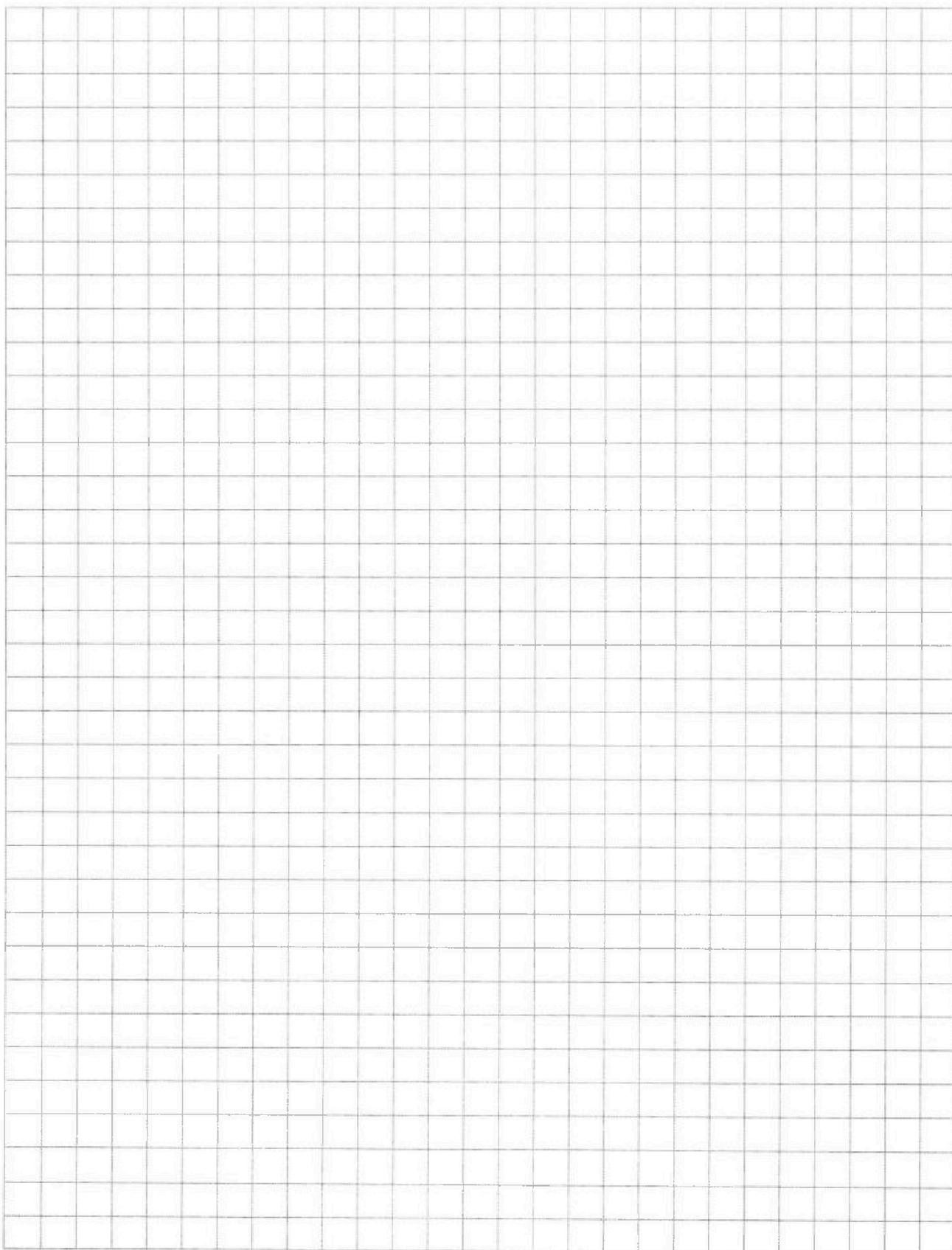
5
☐

6
☐

7
☐

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!





На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☒ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☒

СТРАНИЦА
из

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

3. Заметим, что т.к. $OM_A = OM_B$

⇒ OC - бис-са $\angle C$ (если O внут. Δ , то внут., иначе внеш.).

1) OC - внут. бис-са

т.к. $OM_C \perp AB$, ΔABC - равн. ⇒ $CM_C \perp AB$
 $O \in (CM_C)$

2) $\angle M_ACO = \angle M_BCA = 30^\circ$ (т.к. ABC - равн.)

$$\Rightarrow CO = 2 OM_A$$

$$OM_C = \overline{CO} - OM_A = CM_C - OM_A = \frac{\sqrt{3}a}{2} - 2OM_A$$

↳ высота
равн. ΔABC

$$\Rightarrow (OM_A)^2 + (OS)^2 = 9\sqrt{3}$$

$$\Rightarrow OM_A = \sqrt{9\sqrt{3} - OS^2}$$

$$\left(\frac{\sqrt{3}a}{2} - 2OM_A\right)^2 + (OS)^2 = 4\sqrt{3}$$

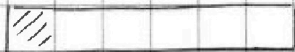
$$(9\sqrt{3} - 2\sqrt{9\sqrt{3} - OS^2})^2 + (OS)^2 = 4\sqrt{3}$$

$$\sqrt{3} + 4(9\sqrt{3} - OS^2) - 4\sqrt{27 - \sqrt{3}(OS)^2} + (OS)^2 = 4\sqrt{3}$$

$$-36OS^2 + 36\sqrt{3} + \sqrt{3} - 4\sqrt{3} - 4\sqrt{27 - \sqrt{3}(OS)^2} = 0$$

$$3(11\sqrt{3} - (OS)^2) = 4\sqrt{27 - \sqrt{3}(OS)^2} \quad | OS^2 < 11\sqrt{3}$$

$$9(11\sqrt{3})^2 - 22\sqrt{3}(OS)^2 + (OS)^4 = 16 \cdot 27 - 16\sqrt{3}(OS)^2$$



3.2.1



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1
☐2
☐3
☐4
☐5
☐6
☐7
☐СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

4 & @ - вытупи $\triangle ABC$

$OH_c \perp AB$

OC - бис-са

$\triangle ABC$ - равнобед.

$\Rightarrow$ ~~CH_c~~ CH_c - бис-са, высота
 $\triangle ABC$

т.к. OC - бис-са $\Rightarrow \triangle COH_c : \angle C = 30^\circ$
 $\angle H_c = 90^\circ$

$\Rightarrow OC = 2H_cO$

$$(OH_c)^2 + (OS)^2 = (OC)^2 + (OS)^2 = 9\sqrt{3}$$

$$OC = 2\sqrt{9\sqrt{3} - OS^2}$$

$$OH_c = \sqrt{4\sqrt{3} - OS^2}$$

$$\Rightarrow 2\sqrt{9\sqrt{3} - OS^2} + \sqrt{4\sqrt{3} - OS^2} = CH_c = \frac{\sqrt{3} \cdot 2}{2\sqrt{3}} = \sqrt{3}$$

$$4(9\sqrt{3} - OS^2) + 4\sqrt{3} - OS^2 =$$

$$+ 2\sqrt{(9\sqrt{3} - OS^2)(4\sqrt{3} - OS^2)} = \sqrt{3}$$

$$40\sqrt{3} - 2OS^2 + 2\sqrt{36\sqrt{3} - 13\sqrt{3}OS^2 + OS^4} = \sqrt{3}$$

$$4(36\sqrt{3} - 13\sqrt{3}OS^2 + OS^4) = 4OS^4 - 39 \cdot 4OS^2 + (39\sqrt{3})^2$$

$$OS^2 \cdot 4 \cdot 13(13 - \sqrt{3}) = 39^2 \cdot 3 - 36\sqrt{3} \cdot 4$$

$$OS^2 = \frac{\sqrt{39^2 \cdot 3 - 36\sqrt{3} \cdot 4}}{4 \cdot 13(13 - \sqrt{3})} = \frac{3}{2} \sqrt{\frac{39 - 16\sqrt{3}}{13(13 - \sqrt{3})}}$$

$$V = \frac{1}{3} OS \cdot S_{ABC} = \frac{1}{3} \cdot \frac{3}{2} \sqrt{\frac{39 - 16\sqrt{3}}{13(13 - \sqrt{3})}} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{39 - 16\sqrt{3}}{13(13 - \sqrt{3})}}$$