



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

11 КЛАСС. Вариант 4



1. [3 балла] Найдите все действительные значения x , при каждом из которых существует геометрическая прогрессия, состоящая из действительных чисел и такая, что её седьмой член равен

$\sqrt{\frac{13x-35}{(x+1)^3}}$, тринадцатый член равен $5-x$, а пятнадцатый член равен $\sqrt{(13x-35)(x+1)}$.

2. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \sqrt{x+3} - \sqrt{4-x-z} + 5 = 2\sqrt{y+x-x^2+z}, \\ |y+1| + 3|y-12| = \sqrt{169-z^2}. \end{cases}$$

3. [5 баллов] Найдите все значения параметра p , при которых уравнение

$$\cos 3x + 3 \cos 2x + 6 \cos x = p$$

имеет хотя бы одно решение. Решите это уравнение при всех таких p .

4. [5 баллов] Две окружности ω_1 и ω_2 пересекаются в точках A и B , а их общая касательная имеет с ω_1 и ω_2 общие точки C и D соответственно, причём точка B расположена ближе к прямой CD , чем точка A . Луч CB пересекает ω_2 в точках B и E . Найдите отношение $ED : CD$, если диагональ AD четырёхугольника $ACDE$ делит отрезок CE в отношении $3 : 10$, считая от вершины C .

5. [4 балла] Дан клетчатый прямоугольник 200×250 . Сколькими способами можно закрасить 8 клеток этого прямоугольника так, чтобы закрашенное множество обладало хотя бы одной из следующих симметрий: относительно центра прямоугольника, относительно любой из двух "средних линий" прямоугольника ("средней линией" прямоугольника назовём отрезок, соединяющий середины двух его противоположных сторон). Ответ дайте в виде выражения, содержащего не более трёх членов (в них могут входить факториалы, биномиальные коэффициенты).

6. [4 балла] Найдите все тройки целых чисел $(a; b; c)$ такие, что:

- $a > b$,
- число $a - b$ не кратно 3,
- число $(a - c)(b - c)$ является квадратом некоторого простого числа,
- выполняется равенство $a + b^2 = 560$.

7. [6 баллов] В основании призмы лежит равносторонний треугольник со стороной 1. Площади её боковых граней равны 4, 4 и 3. Найдите высоту призмы.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
☒	☐	☐	☐	☐	☐	☐

СТРАНИЦА
1 из 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Пусть 1 член этой геом прогрессии = b_1 , а знамен q
т.е. $b_n = b_1 \cdot q^{n-1}$

тогда по усл $b_2 = \sqrt{\frac{13x-35}{(x+1)^3}} = b_1 \cdot q^1$

$$b_{13} = 5-x = b_1 \cdot q^{12}$$

$$b_{15} = \sqrt{(13x-35)(x+1)} = b_1 \cdot q^{14}$$

тогда $q^2 = \frac{b_{15}}{b_2} = \sqrt{(x+1)^4} = (x+1)^2$

$$q^2 = \pm \sqrt{(x+1)^4}$$

тогда $b_{13} = b_1 \cdot (q^2)^6 = b_1 \cdot (x+1)^3 = 5-x$

$$b_1 = \frac{5-x}{(x+1)^3}$$

а с другой стороны

$$q^2 = \frac{b_{15}}{b_{13}} = \frac{\sqrt{(13x-35)(x+1)}}{5-x}$$

$$\pm \sqrt{(x+1)^4}$$

т.е. $|x+1| = \frac{(13x-35)(x+1)}{(5-x)^2}$

2) ~~$x+1 \neq 0$~~ $x+1 \neq 0$ тк в b_2 находится в знамен

1) $x+1 \geq 0$, тогда $|x+1| = x+1$

$$(5-x)^2 = (13x-35)$$

$$x^2 - 10x + 25 = 13x - 35$$

$$x^2 - 23x + 60 = 0$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☒ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
2 из 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{cases} x=3 \\ x=20 \end{cases} \text{ (подбор по Виету)}$$

Проверка $x=3$: $b_7 = \sqrt{\frac{13 \cdot 3 - 35}{(3+1)^3}} = \sqrt{\frac{4}{4^3}} = \frac{1}{4}$

$$b_{13} = 5 - 3 = 2$$

$$b_{15} = \sqrt{(13 \cdot 3 - 35)(3+1)} = 4$$

$$q = \sqrt{1x+1} = \sqrt{4} = \sqrt{2}$$

$$b_1 = \frac{5-x}{(x+1)^3} = \frac{5-3}{(3+1)^3} = \frac{2}{4^3} = \frac{1}{32}$$

но $x=20$:

$$b_1 = \frac{5-20}{21^3} = \frac{-15}{21^3} = \frac{-5}{7^3} < 0$$

нет противоречия
все гут

или заметим, что b_7 , b_{13} и b_{15} имеют один знак тк все-однобогогои номер $\text{sgn}(b_1 \cdot q^{2k}) = \text{sgn} b_1$ тк $q^{2k} > 0$.
тогда, тк b_7 и $b_{15} > 0$, то $b_{13} > 0 \Rightarrow x \leq 5$

$x=20$ не подх

2) $x+1 < 0$.

$$(5-x)^2 = 35 - 13x$$

$$x^2 - 10x + 25 = 35 - 13x$$

$$x^2 + 3x - 10 = 0$$

$$\begin{cases} x=2 \\ x=-5 \end{cases}$$

Проверка $x=2$: $b_7 = \sqrt{\frac{13 \cdot 2 - 35}{(2+1)^3}} = \sqrt{\frac{-9}{8}}$ - неопр. т.е.
 $x=2$ не подх



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



СТРАНИЦА
3 из 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$x = -5 : b_1 = \frac{5+5}{4^3} = \frac{10}{64}$$

$$q_1 = \pm \sqrt[4]{1-5+11} = \pm \sqrt{2} = -\sqrt{2}$$

т.к. $b_1 < 0$, итак не будет

$$b_2 = \sqrt{\frac{13-(-5)-35}{(-5+1)^3}} = \sqrt{\frac{100}{4^3}} = \frac{10}{8} \neq \frac{10}{64} \cdot (-\sqrt{2})^6 \quad b_1 > 0, \quad b_2 > 0.$$

$$b_3 = 5+5=10 = \frac{10}{64} \cdot (+\sqrt{2}) \quad \text{т.е. } x \neq -5$$

Ответ: $x = 3$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☒ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
1 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$I_{ca}) \sqrt{x+3} - \sqrt{4-x} = -2$$

$$Ooy: \begin{cases} 4-x \geq 0 \\ x+3 \geq 0 \end{cases} \quad -3 \leq x \leq 4$$

$$x+3+4-x-2\sqrt{x+3}\sqrt{4-x} = 4$$

$$3 = 2\sqrt{12+x-x^2}$$

$$9 = 48 + 4x - 4x^2$$

$$4x^2 - 4x + 1 = 40$$

$$(2x-1)^2 = 40$$

$$x = \frac{1 \pm \sqrt{40}}{2} = \frac{1}{2} \pm \sqrt{10}$$

$$3,5^2 = 9 + \frac{1}{4} + 3 = 12,5$$

$$3 < \sqrt{10} < 3,5$$

$$3,5 < \frac{1}{2} \pm \sqrt{10} < 4$$

$$-3 < \frac{1}{2} - \sqrt{10} < -2,5$$

$\rightarrow$ оба подходят

~~II ca) $\sqrt{x+3} - \sqrt{4-x} = 1$ и при этом еще~~

$$3+x < 4-x \quad \text{тк. иначе } \sqrt{x+3} - \sqrt{4-x} > 0$$

$$\boxed{x < \frac{1}{2}}$$

тк $f(x) = \sqrt{x}$ возр.

$$II_{ca}) \sqrt{x+3} - \sqrt{4-x} = 1$$

$$Ooy: \begin{cases} x+3 \geq 0 \\ 4-x \geq 0 \end{cases} \quad -3 \leq x \leq 4$$

$$6 = 2\sqrt{12+x-x^2}$$

$$-x^2 + x + 12 = 3^2$$

$$x^2 - x - 3 = 0$$

$$x = \frac{1 \pm \sqrt{1+12}}{2} = \frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{13}}{2}$$

$$Ooy: \begin{cases} x+3 > 4-x \\ x > \frac{1}{2} \end{cases} \quad \text{тк. иначе } 1 = \sqrt{x+3} - \sqrt{4-x} < 0$$

$$\text{тк } f(x) = \sqrt{x} \text{ возр.}$$

$$\text{тк } x > \frac{1}{2} \text{ то } x = \frac{1 + \sqrt{13}}{2} = \frac{1}{2} + \sqrt{3\frac{1}{4}}$$

$$\text{Ответ: } \begin{cases} x = \frac{1 + \sqrt{13}}{2} \\ x = \frac{1}{2} - \sqrt{10} \\ y = 12 \\ z = 0 \end{cases}$$

велико



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☒ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$(1) \sqrt{x+3} - \sqrt{4-x-z} + 5 = 2\sqrt{y+x-x^2+z}$$

$$(2) |y+1| + 3|y-12| = \sqrt{169-z^2}$$

$$(2): |y+1| + 3|y-12| = \sqrt{169-z^2}$$

$$y < -1$$

$$-1 \leq y \leq 12$$

$$y > 12$$

$$-y-1-3y+36 = \sqrt{169-z^2}$$

$$y+1-3y+36 = \sqrt{169-z^2}$$

$$y+1+3y-36$$

$$35-4y = \sqrt{169-z^2}$$

$$37-2y = \sqrt{169-z^2}$$

$$4y-35$$

$$\text{при } y = -1$$

$$37-2y \leq 13$$

$$\text{при } y = 12:$$

$$35+4 > 13 = \sqrt{169-z^2}$$

$$2y \geq 24$$

$$12 \cdot 4 - 35 = 11$$

$$y \geq 12$$

$$y \geq 12$$

$$4y-35 \leq 13$$

$$y \leq \frac{48}{4} = 12$$

$$y \leq 12$$

$$y \leq 12$$

т.е. может подходить при $\emptyset$ только

$$\text{случай } y = 12$$

$$(z=0 \text{ тк тогда } |y+1| + 3|y-12| = 13)$$

тогда подставим в (1)

$$\sqrt{x+3} - \sqrt{4-x} + 5 = 2\sqrt{12+x-x^2}$$

$$a = \sqrt{x+3} \geq 0$$

$$b = \sqrt{4-x} \geq 0$$

$$\sqrt{12+x-x^2} = \sqrt{(3+x)(4-x)} = \sqrt{a^2 b^2} = ab$$

$$\begin{cases} a-b+5=2ab \\ a^2+b^2=7 \end{cases}$$

$$x+3+4-x+25+10\sqrt{x+3}-10\sqrt{4-x}+$$

$$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2 = 7 - 5 + b - a$$

$$(a-b)^2 + (a-b) - 2 = 0$$

$$\begin{cases} a-b = -2 \\ a-b = 1 \end{cases}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



СТРАНИЦА

1 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{aligned}\cos 3x &= \cos 2x \cos x - \sin 2x \sin x = (2\cos^2 x - 1)\cos x - 2\sin^2 x \cos x = \\ &= 2\cos^3 x - \cos x - 2\cos x + 2\cos^3 x = \\ &= 4\cos^3 x - 3\cos x.\end{aligned}$$

$$4\cos^3 x - 3\cos x + 6\cos^2 x - 3 + 6\cos x = p$$

$$4\cos^3 x + 6\cos^2 x + 3\cos x - 3 = p$$

$$t = \cos x \quad -1 \leq t \leq 1$$

$$f(t) = 4t^3 + 6t^2 + 3t - 3$$

т.к. $\cos x$ непрерывна, то $f(t)$ непрерывна

тогда нам понадобятся все $\min_{t \in [-1; 1]} f(t) \leq p \leq \max_{t \in [-1; 1]} f(t)$

$$f'(t) = 12t^2 + 12t + 3 = 3(2t+1)^2$$

$$f'(t) = 0$$

$$4t^2 + 4t + 1 = 0$$

$$(2t+1)^2 = 0$$

$$t = -\frac{1}{2}$$

т.е. $f'(t) \geq 0$ на $[-1; 1]$

т.е. $f(t)$ возрастает, тогда

$$\min_{t \in [-1; 1]} f(t) = f(-1) = -4 + 6 - 3 - 3 = -4$$

$$\max_{t \in [-1; 1]} f(t) = f(1) = 10.$$

Получим все $-4 \leq p \leq 10$

Теперь решим уравнение

$$4t^3 + 6t^2 + 3t - 3 = p$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☒	☐	☐	☐	☐

СТРАНИЦА
2 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Пусть $t = a - \frac{1}{2}$

тогда $t^3 = a^3 - \frac{3}{2}a^2 + \frac{3}{4}a - \frac{1}{8}$

$$t^2 = a^2 - a + \frac{1}{4}$$

$$4a^3 - \cancel{6a^2} + \cancel{3a} - \frac{1}{2} + \cancel{6a^2} - \cancel{6a} + \frac{3}{2} + \cancel{3a} - \frac{3}{2} - 3 = p$$

$$4a^3 - \frac{1}{2} - 3 = p$$

$$4a^3 = p + \frac{7}{2}$$

$$a^3 = \frac{1}{4}p + \frac{7}{8}$$

$$a = \sqrt[3]{\frac{1}{4}p + \frac{7}{8}} = \sqrt[3]{\frac{2p+7}{8}} = \frac{\sqrt[3]{2p+7}}{2}$$

$$\text{т.е. } t = \frac{\sqrt[3]{2p+7} - 1}{2}$$

$$\text{при } p \in [-4; 10]$$

2) $PC^2 = PD^2 \Rightarrow PD = PC \Rightarrow AP - \text{median} \perp CD$
 $\deg(w_1, C) = \deg(w_2, D)$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☒ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
2 из 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

тогда $S_{ACP} = S_{ADP}$

$$\frac{1}{2} \cdot AP \cdot AC \cdot \sin \alpha = AD \cdot \sin \beta \cdot \frac{1}{2} AP$$

$$\frac{AC}{AD} = \frac{\sin \alpha}{\sin \beta}$$

По теореме синусов в $\triangle CDE$: $\frac{ED}{\sin \alpha} = \frac{CD}{\sin \beta} \Rightarrow \frac{ED}{CD} = \frac{\sin \alpha}{\sin \beta}$

$$0,3 \frac{AE}{AD} = \frac{\sin \alpha}{\sin \beta} \Rightarrow 0,3 \cdot \frac{AE}{AD} = \frac{AC}{AD}$$

у теоремы синусов: $AE = 2R \sin(\alpha + 2\beta + \gamma)$
R - радиус ω_2

$$AB = 2R \sin \gamma$$

$$AD = 2R \sin(\beta + \gamma)$$

$$\frac{10 \sin \alpha}{3 \sin \beta} = \frac{\sin(\alpha + 2\beta + \gamma)}{\sin(\beta + \gamma)}$$

Найдем другое отношение (CBOE)

Знаем стороны

и $\gamma + A$

$$\frac{CO}{CE} \cdot \frac{BE}{BO} = \frac{\sin(\alpha + \beta)}{\sin(2\alpha + 2\beta)} \cdot \frac{\sin(\alpha + 2\beta)}{\sin \beta} = \frac{\sin(\gamma + \beta)}{\sin(\alpha + \beta)} \cdot \frac{\sin(2\beta + \alpha)}{\sin \gamma}$$

тогда $\sin(\alpha + \beta) \sin \gamma = \sin(\gamma + \beta) \cdot \sin \beta \cdot \frac{\sin(2\beta + \alpha)}{\sin(\alpha + \beta)}$

$$\sin(\alpha + \beta) \sin \gamma = 2 \sin(\gamma + \beta) \sin \beta \cos(\alpha + \beta)$$

$$\sin \gamma \cdot \frac{1}{2} \frac{\sin(2\alpha + 2\beta)}{\sin(\alpha + \beta)} = 2 \sin^2 \beta \cos \gamma + \sin 2\beta \sin \gamma$$

$$\frac{1}{2} \frac{\sin(2\alpha + 2\beta)}{\sin(\alpha + \beta)} - \sin 2\beta = 1 - \cos 2\beta$$

$$\frac{1}{2} \frac{\sin(2\alpha + 2\beta)}{\sin(\alpha + \beta)} = 1 - \cos 2\beta$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☒	☐	☐	☐

СТРАНИЦА
3 из 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Заметим, что $\angle ADC = \angle AED$ тк

они и угол м/у кас - хордой окруж

и также верн

$$\angle CAD = \angle BAE$$

$\triangle ACD \sim \triangle AED$ по 2м углам

$$\text{тогда } \frac{CD}{DE} = \frac{AC}{AD} = \frac{AD}{AE}$$

$$\text{по тогда } 0,3 \cdot \frac{AE}{AD} = \frac{AD}{AE} \Rightarrow \left(\frac{AD}{AE}\right)^2 = 0,3$$

$$\frac{AD}{AE} = \sqrt{0,3}$$

$$\text{тогда } \frac{CD}{DE} = \frac{AD}{AE} = \sqrt{0,3}$$

A hand-drawn diagram of a square divided into four quadrants labeled 1, 2, 3, and 4. The horizontal axis is labeled 'B' at both ends, and the vertical axis is labeled 'A' at the top and 'A'' at the bottom. The top edge is labeled '250' and the left edge is labeled '400'. A central dot marks the intersection of the axes.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☒	☒	☐	☐

СТРАНИЦА
2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

тогда таких наборов C_{12500}^2 (тк в каждом наборе по 2-8 к)

2) AA' и ~~еще~~ у нас

тогда тоже все воет по 1 набору $\Rightarrow$
 $\Rightarrow C_{12500}^2$

3) Аналогично (2) C_{12500}^2

Теперь когда все 3 вместе

тоже все одинаково восстанавливается
из 1 набора $\Rightarrow C_{12500}^2$ таких вариантов

тогда ответ по ф-ле включения-исключения:

$$Ans = 3 \cdot C_{25000}^4 - 3 \cdot C_{12500}^2 + C_{12500}^2$$

$$Ans = 3 \cdot C_{25000}^4 - 2 \cdot C_{12500}^2$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☒ 7 ☐

СТРАНИЦА
1 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Пусть p - некоторое простое $a, b, c \in \mathbb{Z}$
 $\Rightarrow p \geq 2$ и $p \nmid 3$

$$\begin{cases} a > b \\ a - b \not\equiv 0 \pmod{3} \\ (a-c)(b-c) = p^2 \\ a + b^2 = 560 \end{cases} \quad \begin{array}{l} \text{Тк } a > b \Rightarrow a - c \neq b - c \Rightarrow \\ \Rightarrow \text{используем} \end{array} \begin{cases} a - c = \pm p^2 \\ b - c = \pm 1 \\ a - c = \pm 1 \\ b - c = \pm p^2 \end{cases}$$

$\xrightarrow{\text{Тк } p \text{ - простое по основному теор. Арифметики}}$

но тк $a > b \Rightarrow a - c > b - c$, то

$$\begin{cases} a - c = p^2 \\ b - c = 1 \end{cases} \Rightarrow a - b = a - c - (b - c) = p^2 - 1 \not\equiv 0 \pmod{3}$$

$$\begin{cases} a - c = -1 \\ b - c = -p^2 \end{cases} \Rightarrow a - b = a - c - (b - c) = -1 + p^2 \not\equiv 0 \pmod{3}$$

т.е. в любом случае $(p^2 - 1)(p + 1) \not\equiv 0 \pmod{3}$

т.е. $\begin{cases} p \not\equiv 2 \pmod{3} \\ p \not\equiv 1 \pmod{3} \end{cases} \Rightarrow p \equiv 0 \pmod{3}$, но p - простое $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ 1 вариант $p = 3$.

Теперь ищем тройки (a, b, c) :

$$\begin{cases} \begin{cases} a - c = 9 \\ b - c = 1 \end{cases} \quad (I) \\ \begin{cases} a - c = -1 \\ b - c = -9 \end{cases} \quad (II) \\ a + b^2 = 560 \end{cases}$$

Иен) $\begin{cases} b = 1 + c \\ a = 9 + c \\ a + b^2 = 560 \end{cases}$

$$\begin{aligned} (1+c)^2 + 9 + c &= 560 \\ c^2 + 3c - 550 &= 0. \end{aligned}$$

$$\begin{cases} c = -25 \\ c = 22 \end{cases}$$

$$\begin{cases} b = 1 - 25 = -24 \\ a = 9 - 25 = -16 \\ c = -25 \end{cases}$$

или $\begin{cases} b = 1 + 22 = 23 \\ a = 9 + 22 = 31 \\ c = 22 \end{cases}$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

☐☐☐☐☐☒☐

СТРАНИЦА
2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\text{then) } \begin{cases} a = c - 1 \\ b = c - 9 \\ b^2 + a = 560 \end{cases}$$

$$c - 1 + (c - 9)^2 = 560$$

$$c^2 - 18c + c + 80 = 560$$

$$c^2 - 17c - 480 = 0.$$

$$\begin{cases} c = 32 \\ c = -15 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a = -15 - 1 = -16 \\ b = -15 - 9 = -24 \\ c = -15 \end{cases}$$

$$\text{или } \begin{cases} a = 32 - 1 = 31 \\ b = 32 - 9 = 23 \\ c = 32 \end{cases}$$

т.е. получаем:

$$\text{Ответ: } \begin{aligned} &(-16; -24; -15) \\ &(31; 23; 32) \\ &(31; 23; 22) \\ &(-16; -24; -25) \end{aligned}$$

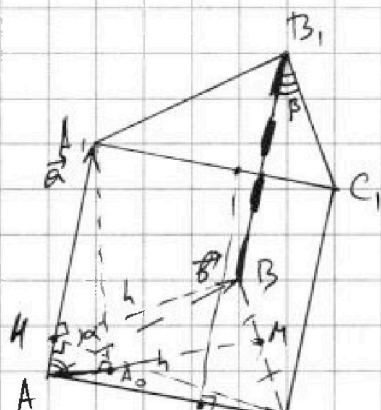


На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☒

СТРАНИЦА
1 из 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



Дано: призма треугольная $ABCA_1B_1C_1$
 $\triangle ABC$ - прав; $AB=1$.

$$S_{AA_1B_1B} = S_{AA_1C_1C} = 4$$

$$S_{BB_1C_1C} = 3$$

Или: высоту призм h_1 ?
Значит введем векторы $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$

$\vec{a} = \vec{AA_1}$

$$\vec{a} = \vec{AA_1} = \vec{CC_1} = \vec{BB_1}$$

$$\vec{b} = \vec{AB} = \vec{A_1B_1}$$

$$\vec{c} = \vec{AC} = \vec{A_1C_1}$$

$$|\vec{b}| = |\vec{c}| = 1$$

Тк $\triangle ABC$ - пр/уг $\Rightarrow \angle(\vec{b}, \vec{c}) = 60^\circ \Rightarrow (\vec{b}, \vec{c}) = \frac{1 \cdot 1}{2}$

$$V_{\text{призм}} = \frac{1}{2} (\vec{a}, [\vec{c}, \vec{b}]) = h_1 \cdot S_{\triangle ABC} = h_1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot \frac{1}{2} \cdot \sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2} h_1$$

$$\text{т.е. } h_1 = \frac{1}{\sqrt{3}} (\vec{a}, [\vec{c}, \vec{b}])$$

$$\text{известно, что } |[\vec{c}, \vec{b}]| = \sqrt{3}$$

$$|[\vec{a}, \vec{b}]| = |[\vec{a}, \vec{c}]| = 4$$

$$|[\vec{a}, \vec{b}] - [\vec{a}, \vec{c}]| = 3$$

$$[\vec{a}, \vec{b}]^2 + [\vec{a}, \vec{c}]^2 - 2([\vec{a}, \vec{b}], [\vec{a}, \vec{c}]) = 9 \quad (1)$$

$$\alpha = \angle([\vec{a}, \vec{b}], [\vec{a}, \vec{c}]) = \angle(\vec{ABA_1}, \vec{ACA_1}) = 60^\circ$$

Тк $\vec{F}_1 = \vec{AA_1B_1B}$ и $\vec{F}_2 = \vec{AA_1C_1C}$ - параллелограммы

сост из равных векторов ($\vec{b}$ и $\vec{c}$ отличаются



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7
☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☒

СТРАНИЦА
2 из 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

только проверим, то эти фигуры равны
 $(F_1 = F_2)$

тогда высоты опущенные на AD , из верш
 C_1 и B_1 падут в точку H

тогда $BH = HE = h$; ко угл $\angle BHE = \alpha$.

тогда имеем теорему косинусов в $\triangle BHE$:

$$h^2 + h^2 - 2h^2 \cos \alpha = 1^2$$

$$2h^2(1 - \cos \alpha) = 1.$$

А также (1):

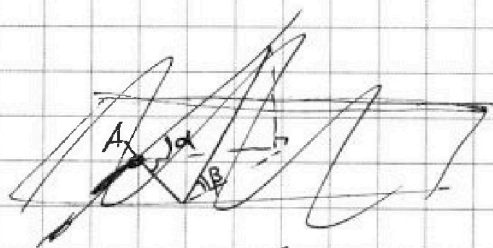
$$32 - 9 = 2 \cdot \underbrace{|\vec{a}, \vec{b}|}_4 \cdot \underbrace{|\vec{a}, \vec{c}|}_4 \cdot \cos \alpha.$$

$$\cos \alpha = \frac{1}{32} (32 - 9) = \frac{23}{32}$$

$$h^2 = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1 - \cos \alpha} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{9/32} = \frac{16}{9}$$

$$h = \frac{4}{3}.$$

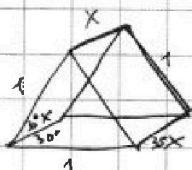
тогда $\sin \angle HAC = \frac{1}{h} = \frac{3}{4} \Rightarrow a = 1 \cdot \sin \angle HAC = 4$
 $R = \frac{16}{3}.$



проекции на стороны

$$\sin \beta \cdot a \cdot 1 = 3.$$

$$\sin \beta = \frac{9}{16}.$$



$$x^2 = \left(\frac{16}{3}\right)^2 - h^2$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☒

СТРАНИЦА
3 из 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

так у нас картинка если эти
срединки кп-ти (АДМ) тогда

$$S_1 = 4 \cdot \sin(\alpha)$$

↑
площадь проекции на // - гр по 4.

$$\sin(\alpha) = \frac{h_1}{h_0} ; h_0 = 4 \Rightarrow h_0 = 4$$

$$S_1 = \sqrt{16 - h_1^2}$$

аналогично $S_2 = \sqrt{9 - h_1^2}$

тогда площадь проекции 2-х элементов:

~~$S_1 + S_2$~~

$$S_1 = 1 \cdot x \cdot \sin 30^\circ = \sqrt{16 - h_1^2}$$

$$\left(\frac{x}{2}\right)^2 = 16 - h_1^2$$

$$\left(\frac{8}{3}\right)^2 - \frac{1}{4}h_1^2 = 16 - h_1^2$$

$$\frac{3}{4}h_1^2 = 16 \left(1 - \frac{4}{9}\right)$$

$$h_1^2 = 8^2 \cdot \frac{5}{9 \cdot 3} = \left(\frac{8}{3}\right)^2 \cdot \frac{5}{3}$$

$$h_1 = \frac{8}{3} \sqrt{\frac{5}{3}}$$

↑
ответ:

На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7
☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐

СТРАНИЦА
 ИЗ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



$$(a-c)(b-c) = p^2$$

$$a > b$$

$$a-b \times 3$$

$$a-b^2=560$$

$$a > b$$

$$\sqrt{169-z^2} > 11$$

$$z^2 \leq 169-121=48$$

$$|z| \leq 4\sqrt{3}$$

$$27$$

$$y > 12$$

$$4y-35 \leq 13$$

$$4y \leq 48$$

$$y \leq 12$$

$$Q = \frac{\sqrt{2p+7}}{2}$$

$$\frac{ED}{CD} = \frac{\sin \alpha}{\sin \beta}$$

$$|y+1| + 3|y-12| = \sqrt{169-z^2}$$

$$-1 < y < 12$$

$$35-2y$$

$$y < -1$$

$$-y-1-3y+36$$

$$35-4y = \sqrt{169-z^2}$$

$$V = \frac{1}{2}(\vec{a}, [\vec{b}, \vec{c}]) = \frac{1}{2}(\vec{b}, [\vec{c}, \vec{a}])$$

$$4t^3 + 6t^2 + 3t - (3+p) = 0$$

$$t = a-k$$

$$4a^3 - 42ka^2 + \dots + 6a^2$$

$$k = \frac{1}{2}$$

$$t = a - \frac{1}{2}$$

$$550 = 25 \cdot 22$$

$$t = a - \frac{1}{2}$$

$$4a^3 - 6a^2 + 3a - \frac{1}{2} + 6a^2 - 6a + \frac{3}{2} + 3a - \frac{3}{2} - 3 = p$$

$$4a^3 - 2 - 3 = p$$

$$4a^3 = 5+p$$

$$-4 \leq p \leq 10$$

$$-\frac{1}{2} \leq a = \frac{1}{2} + t \leq \frac{3}{2}$$

$$\frac{CD}{ED} = \frac{BD}{BD}; \frac{CD}{ED} = \frac{\sin \alpha}{\sin \beta}$$

$$-1 \leq 2p+7 \leq 27$$

$$\frac{ED}{CD} = ?$$

$$\frac{CO}{OE} = \frac{3}{10}$$

$$\frac{AC}{AE} = \frac{CO}{OE} = \frac{3}{10}$$

$$(S-F) =$$

$$= \frac{1}{2}x-x+y+\frac{1}{2}x-x+y = y$$

$$y = 11$$

$$y > 11$$

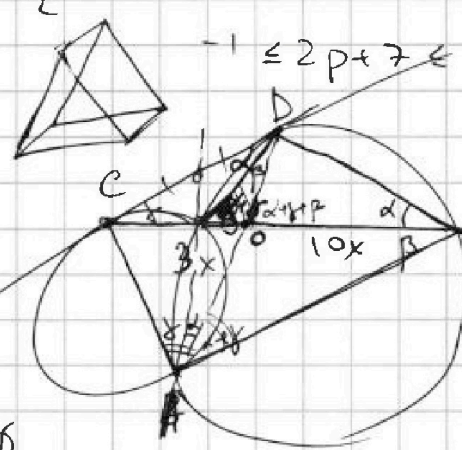
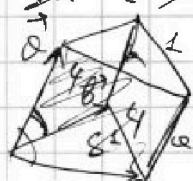
$$y > 11$$

$$y > 11$$

$$y > 11$$

$$y > 11$$

$$y > 11$$





На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7
☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐

СТРАНИЦА
из

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\frac{10}{3} \cdot \frac{\sin \alpha}{\sin \beta} = \sin(\alpha + \beta) \cdot \frac{1}{\tan(\alpha + \beta)} + \sin(\alpha + \beta)$$

$$\tan(\alpha + \beta) = \frac{\tan \alpha + \tan \beta}{1 - \tan \alpha \tan \beta}$$

$$\frac{10}{3} \cdot \frac{\sin \alpha}{\sin \beta} = (\sin \alpha \cos \beta + \sin \beta \cos \alpha) \cdot \frac{1}{\tan \alpha + \tan \beta}$$

$$2(\alpha + \beta) + \gamma + \delta = 180^\circ$$

$$\frac{BD}{BC} = \frac{\sin(\alpha + \beta)}{\sin(\beta + \delta)} = \frac{\sin \alpha}{\sin \beta}$$

$$\frac{AE}{AD}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1
☐

2
☐

3
☐

4
☐

5
☐

6
☐

7
☐

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

