



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

10 КЛАСС. Вариант 7



1. [3 балла] Четвёртый член арифметической прогрессии равен $6 - 9x$, шестой член равен $(x^2 - 2x)^2$, а десятый равен $9x^2$. Найдите x .
2. [4 балла] Найдите наибольшее значение выражения $3y + 6x$ при условии

$$\begin{cases} |x - 2y| \leq 2 \\ |2x - y| \leq 1. \end{cases}$$

3. [5 баллов] Найдите все пары (m, n) натуральных чисел, для которых одно из чисел $A = m^2 + 4mn + 4n^2 - 7m - 14n$ и $B = m^2n + 2mn^2 + 9mn$ равно $11p^2$, а другое равно $75q^2$, где p и q — простые числа.
4. [5 баллов] Прямая, параллельная биссектрисе AX треугольника ABC , проходящая через середину M его стороны BC , пересекает сторону AB и продолжение стороны AC в точках Z и Y соответственно. Найдите BC , если $AC = 6$, $AZ = 3$, $YZ = 4$.
5. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \sqrt{x+2} - \sqrt{7-y} + 7 = 2\sqrt{14+5x-y^2}, \\ x^3 + 3x - \sqrt{2y} = y^3 - \sqrt{2x} + 3y. \end{cases}$$

6. [4 балла] На тетрадном листе нарисован квадрат 10×10 клеток (стороны квадрата идут вдоль границ клеток), а все узлы сетки внутри квадрата или на его границе покрашены в чёрный цвет. Найдите количество способов перекрасить два узла в белый цвет, если раскраски, получающиеся друг из друга поворотом, считаются одинаковыми.
7. [6 баллов] В треугольнике ABC на медиане AM и биссектрисе CL как на диаметрах построены окружности Ω и ω соответственно, пересекающиеся в точках P и Q . Отрезок PQ параллелен высоте треугольника ABC , проведённой из вершины B . Окружность Ω пересекает сторону AC повторно в точке N . Найдите длины сторон AC и BC , если $AB = 4$, $AN = 5$.

На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



1	2	3	4	5	6	7
☒	☐	☐	☐	☐	☐	☐

СТРАНИЦА
1 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{array}{r} 4-\bar{u} \\ 6-\bar{u} \\ 10-\bar{u} \\ x-? \end{array} \quad \begin{array}{r} 6-9x \\ (x^2-2x)^2 \\ 9x^2 \end{array}$$

$$\begin{aligned} 5-\bar{u} \text{ член прогрессии равен } & \frac{6-9x+(x^2-2x)^2}{2} = \\ = & \frac{6-9x+x^4-4x^3+4x^2}{2} = \frac{x^4-4x^3+4x^2-9x+6}{2} \end{aligned}$$

Пусть прогрессия имеет вид $x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, \dots, x_{10}, \dots$

Тогда $x_4 = x_1 + 3d$ $x_{10} = x_1 + 9d$

$$\begin{aligned} x_5 &= x_1 + 4d \\ x_6 &= x_1 + 5d \\ x_6 - x_5 &= d \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} d &= (x^2-2x)^2 - \frac{x^4-4x^3+4x^2-9x+6}{2} = \frac{2(x^4-4x^3+4x^2)-x^4+4x^3-4x^2+9x-6}{2} \\ &= \frac{2x^4-8x^3+8x^2-x^4+4x^3-4x^2+9x-6}{2} = \\ &= \frac{x^4-4x^3+4x^2+9x-6}{2} \end{aligned}$$

$$x_4 = x_1 + 3d$$

$$6-9x = x_1 + \frac{3}{2}(x^4-4x^3+4x^2+9x-6) \quad | \cdot 2$$

$$12-18x = 2x_1 + 3x^4-12x^3+12x^2+27x-18$$

$$2x_1 = -3x^4+12x^3-12x^2-45x+30$$

$$x_1 = \frac{-3x^4+12x^3-12x^2-45x+30}{2}$$

$$9x^2 = \underline{\underline{x_1 + 9d}} = \frac{-3x^4+12x^3-12x^2-45x+30}{2} + \frac{9(x^4-4x^3+4x^2+9x-6)}{2}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



СТРАНИЦА

2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$18x^2 = -3x^4 + 12x^3 - 12x^2 - 45x + 30 + 9x^4 - 36x^3 + 36x^2 + 81x - 54$$

$$6x^4 - 24x^3 + 6x^2 + 36x - 24 = 0 \quad | :6$$

$$x^4 - 4x^3 + x^2 + 6x - 4 = 0$$

Схема Горнера:

	1	-4	1	6	-4
1	1	-3	-2	4	0

$$(x-1)(x^3 - 3x^2 - 2x + 4) = 0$$

Схема Горнера:

	1	-3	-2	4
1	1	-2	-4	0

$$(x-1)^2(x^2 - 2x - 4) = 0$$

$$\begin{cases} x = 1 \\ x = \frac{2 + \sqrt{4+16}}{2} \\ x = \frac{2 - \sqrt{4+16}}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = \frac{2 + \sqrt{20}}{2} \\ x = \frac{2 - \sqrt{20}}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = 1 + \sqrt{5} \\ x = 1 - \sqrt{5} \end{cases}$$

$$\text{Ответ: } x \in \{1, 1 + \sqrt{5}, 1 - \sqrt{5}\}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☒ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
1 из 4

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$3y + 6x \quad \max?$$

$$\begin{cases} |x - 2y| \leq 2 \\ |2x - y| \leq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (1) \begin{cases} x - 2y \leq 2 \\ x - 2y \geq -2 \end{cases} \\ (2) \begin{cases} 2x - y \leq 1 \\ 2x - y \geq -1 \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (1) \begin{cases} x \leq 2y + 2 \\ x \geq 2y - 2 \end{cases} \\ (2) \begin{cases} y \geq 2x - 1 \\ y \leq 2x + 1 \end{cases} \end{cases} \begin{cases} x \leq 2(y + 1) \\ x \geq 2(y - 1) \\ x \leq \frac{1}{2}(y + 1) \\ x \geq \frac{1}{2}(y - 1) \end{cases}$$

$$\begin{cases} (1) \begin{cases} x - 2y \leq 2 \\ 2y - x \leq 2 \end{cases} \\ (2) \begin{cases} 2x - y \leq 1 \\ y - 2x \leq 1 \end{cases} \end{cases}$$

$$3y + 6x = 3(y + 2x)$$

Тогда достаточно найти максимальное значение выражения $y + 2x$

~~или~~

$$(2) + (3): 2y - x + 2x - y \leq 3$$

$$x + y \leq 3$$

$$\text{из (4): } y \leq 2x + 1$$

$$3x + 1 \leq 3$$

$$3x \leq 2$$

$$x \leq \frac{2}{3} \Rightarrow y \leq \frac{7}{3}$$

$$3(y + 2x) \leq 3\left(\frac{7}{3} + \frac{4}{3}\right) = 11$$

Значение $3y + 6x = 11$ достигается при $x = \frac{2}{3}, y = \frac{7}{3}$.
Проверим, возможно ли такое:

$$\left| \frac{2}{3} - \frac{14}{3} \right| \leq 2 \Leftrightarrow \left| -\frac{12}{3} \right| \leq 2 \text{ — н. в.}$$

$$\text{или } 2(y - 1) \geq \frac{1}{2}(y - 1)$$

$$2y - 2 \geq \frac{1}{2}y - \frac{1}{2}$$

$$\frac{3}{2}y \geq \frac{3}{2} \Leftrightarrow y \geq 1, \text{ тогда } x \geq 0$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1
☐2
☒3
☐4
☐5
☐6
☐7
☐

СТРАНИЦА

2 ИЗ 4

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{aligned}
 1 \text{ сл. } & \begin{cases} 2(y+1) \leq \frac{1}{2}(y+1) \\ 2y+2 \leq \frac{1}{2}y + \frac{1}{2} \\ \frac{3}{2}y \leq -\frac{3}{2} \\ y \leq -1 \\ x \leq 0 \\ 3y+6x \leq -3 \end{cases}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 2 \text{ сл. } & \begin{cases} 2(y+1) \geq \frac{1}{2}(y+1) \\ 2y+2 \geq \frac{1}{2}y + \frac{1}{2} \end{cases}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 1 \text{ сл. } & \begin{cases} x \leq \frac{1}{2}(y+1) \\ x \geq \frac{1}{2}(y-1) \\ \frac{1}{2}(y+1) \leq 2(y+1) \\ \frac{1}{2}(y-1) \geq 2(y-1) \end{cases} \\
 & \begin{cases} x \in [\frac{1}{2}(y-1); \frac{1}{2}(y+1)] \\ \frac{1}{2}y + \frac{1}{2} \leq 2y+2 \\ \frac{1}{2}y - \frac{1}{2} \geq 2y-2 \end{cases} \\
 & \begin{cases} x \in [\frac{1}{2}(y-1); \frac{1}{2}(y+1)] \\ y \geq -1 \\ y \leq 1 \end{cases} \\
 & \begin{cases} x \in [-1; 1] \\ y \in [-1; 1] \\ 3y+6x \leq 9 \end{cases} \\
 & \text{при } x=1, y=1
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 2 \text{ сл. } & \begin{cases} x \leq 2(y+1) \\ x \geq 2(y-1) \\ 2(y+1) \leq \frac{1}{2}(y+1) \\ 2(y-1) \geq \frac{1}{2}(y-1) \end{cases} \\
 & \begin{cases} x \in [2(y-1); 2(y+1)] \\ 2y+2 \leq \frac{1}{2}y + \frac{1}{2} \\ 2y-2 \geq \frac{1}{2}y - \frac{1}{2} \end{cases} \\
 & \begin{cases} x \in [2(y-1); 2(y+1)] \\ y \leq -1 \\ y \geq 1 \end{cases} \quad \text{такое неравенство}
 \end{aligned}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☒ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
3 из 4

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$3 \text{ сл. } \begin{cases} x \leq \frac{1}{2}(y+1) \\ x \geq 2(y-1) \\ \frac{1}{2}(y+1) \leq 2(y+1) \\ 2(y-1) \geq \frac{1}{2}(y-1) \end{cases}$$

$$\cancel{x \in [\frac{1}{2}(y+1); 2(y-1)]}$$

$$\begin{cases} x \in [2(y-1); \frac{1}{2}(y+1)] \\ \frac{1}{2}y + \frac{1}{2} \leq 2y + 2 \\ 2y - 2 \geq \frac{1}{2}y - \frac{1}{2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \in [2(y-1); \frac{1}{2}(y+1)] \\ y \geq -1 \\ y \geq 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \in [2(y-1); \frac{1}{2}(y+1)] \\ y \geq 1 \end{cases}$$

Тогда $x \geq 0$

$$\begin{cases} x \leq \frac{1}{2}(y+1) \\ y \geq 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} |\frac{1}{2}y + \frac{1}{2} - 2y| \leq 2 \xrightarrow{y \geq 1} |-\frac{3}{2}y + \frac{1}{2}| \leq 2 \rightarrow \begin{cases} -\frac{3}{2}y \leq \frac{3}{2} \\ -\frac{3}{2}y \geq -\frac{5}{2} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} y \geq 1 \\ y \leq \frac{5}{3} \end{cases}$$

$$3y + 6x \leq 5 + 8 = 13$$

$$3y + 6x \leq 13 \quad \Leftrightarrow \text{при } y = \frac{5}{3}, x = \frac{4}{3}$$

$$4 \text{ сл. } \begin{cases} x \leq 2(y+1) \\ x \geq \frac{1}{2}(y-1) \\ 2(y+1) \leq \frac{1}{2}(y+1) \\ \frac{1}{2}(y-1) \geq 2(y-1) \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \in [\frac{1}{2}(y-1); 2(y+1)] \\ 2y + 2 \leq \frac{1}{2}y + \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2}y - \frac{1}{2} \geq 2y - 2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \in [\frac{1}{2}(y-1); 2(y+1)] \\ y \leq -1 \\ y \leq 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \in [\frac{1}{2}(y-1); 2(y+1)] \\ y \leq -1 \end{cases}$$

Тогда $x \leq 0$

Тут очевидно, что $3y + 6x$ не будет max. в этом случае

$$\begin{cases} -\frac{3}{2}y \leq \frac{3}{2} \\ -\frac{3}{2}y \geq -\frac{5}{2} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} y \geq 1 \\ y \leq \frac{5}{3} \end{cases}$$

$$x \leq \frac{1}{2}(\frac{5}{3} + 1) = \frac{1}{2} \cdot \frac{8}{3} = \frac{4}{3}$$



На одной странице можно оформить только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☒	☐	☐	☐	☐	☐

СТРАНИЦА

4 из 4

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Проверим, возможно ли $\in$:

$$\left| \frac{4}{3} - 2 \cdot \frac{5}{3} \right| \leq 2$$

$$\left| \frac{4}{3} - \frac{10}{3} \right| = \left| -\frac{6}{3} \right| = |-2| \leq 2 - \text{в.}$$

$$\left| \frac{8}{3} - \frac{5}{3} \right| \leq 1$$

$$\left| \frac{3}{3} \right| = |1| \leq 1 - \text{в.}$$

Итак, наибольшее значение выражения $3y + 6x$ равно 13

Ответ: 13



1 ☐ 2 ☐ 3 ☒ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
1 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$m, n \in \mathbb{N}, p, q \in \mathbb{P}$$

$$A = m^2 + 4mn + 4n^2 - 7m - 14n$$

$$B = m^2n + 2mn^2 + 9mn$$

$$A = (m+2n)^2 - 7(m+2n) = (m+2n)(m+2n-7)$$

$$B = mn(m+2n+9)$$

$$1 \text{ сл. } A = 11p^2, B = 75q^2$$

$$4. m+2n=8$$

$$11p^2 = 8 - \text{невозм., т.к. } p \in \mathbb{P}$$

$$\text{и } \text{НОД}(8, 11) = 1$$

$$5. m+2n=1$$

$$-6 = 11p^2 - \text{невозм., т.к.}$$

$$11 > 0, p^2 > 0$$

$$\begin{cases} (m+2n)(m+2n-7) = 11p^2 \\ mn(m+2n+9) = 75q^2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} (m+2n)(m+2n-7) = 11 \cdot p \cdot p \\ mn(m+2n+9) = 5 \cdot 5 \cdot 3 \cdot q \cdot q \end{cases}$$

Возможны следующие случаи:

$$\text{Рассмотрим первое уравнение: } m+2n=1, m+2n-7=11p^2$$

$$(m+2n)(m+2n-7) = 11 \cdot p \cdot p \text{ (и } m+2n=11p^2, m+2n-7=1$$

$$\text{Тогда возможны варианты: } 1. m+2n=11, m+2n-7=p^2$$

$$2. m+2n=p, m+2n-7=11p$$

$$3. m+2n=11p, m+2n-7=p$$

$$1. m+2n=11 \Rightarrow p^2=4 \Rightarrow p=2 - \text{возм.}$$

$$2. m+2n=p \Rightarrow p-7=11p \Rightarrow 10p=-7 \Rightarrow p < 0 - \text{не подх.}$$

$$3. m+2n=11p \Rightarrow 11p-7=p \Rightarrow 10p=7 \Rightarrow p=\frac{7}{10} - \text{не подх.}$$

Итак, для первого уравнения возможен только случай, когда $m+2n=11$ и $p=2$

Рассмотрим второе уравнение:

$$mn(m+2n+9) = 5 \cdot 5 \cdot 3 \cdot q \cdot q$$

$$\text{Учитывая, что } m+2n=11:$$

$$mn \cdot 20 = 5 \cdot 5 \cdot 3 \cdot q \cdot q \Rightarrow 4mn = 5 \cdot 3 \cdot q \cdot q$$

$$\text{Т.к. } 3, 5, q - \text{простые} \Rightarrow q \cdot q = 4 \Rightarrow q = 2$$

$$\text{Тогда } mn = 3 \cdot 5 \Rightarrow \text{возможны варианты: } m=3, n=5$$

$$m=5, n=3$$

$$\text{Проверим: } 3+2 \cdot 5 = 13 \neq 11 - \text{не подх.}$$

$$5+2 \cdot 3 = 11 - \text{подх.}$$

Итак, пара $(5, 3)$ подходит

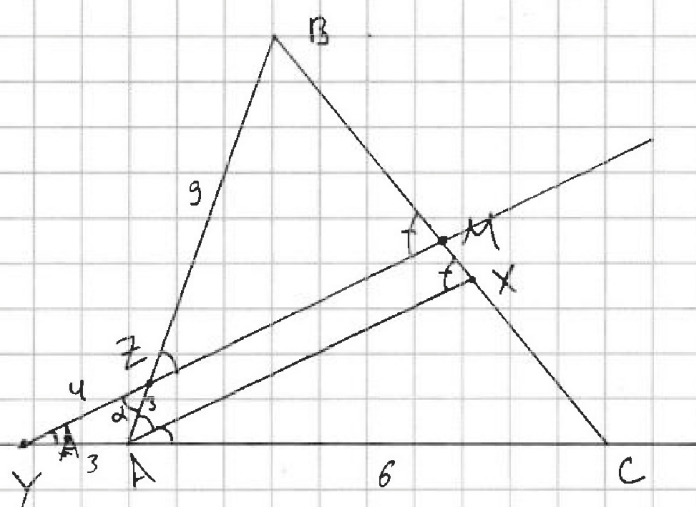
На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☒ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
1 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



M - сеп. BC
AX - биссектриса
AC = 6
AZ = 3
YZ = 4
BC = ?

$$(ZM) \parallel (AX) \Rightarrow \triangle ZBM \sim \triangle ABX \text{ по 2-м углам} \Rightarrow \frac{AB}{ZB} = \frac{XB}{MB} = \frac{AX}{ZM}$$

$$\triangle XCA \sim \triangle MEX$$

$$(ZM) \parallel (AX) \Rightarrow \angle MYC = \angle XAC = \angle BAX = \angle BZM = \angle YZA \Rightarrow \triangle YAZ - \text{прямоугольный} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow YA = AZ = 3$$

По Т. Менелая для $\triangle CBA$, прямой (YМ):

$$\frac{CM}{MB} \cdot \frac{BZ}{ZA} \cdot \frac{AY}{YC} = 1$$

$$\frac{1}{1} \cdot \frac{BZ}{3} \cdot \frac{3}{3} = 1$$

$$BZ = 9$$

$$(ZM) \parallel (AX) \Rightarrow \triangle CXA \sim \triangle CMY \text{ по 2-м углам} \Rightarrow \frac{CX}{CM} = \frac{CA}{CY} = \frac{XA}{YM}$$

Т. косинусов для $\triangle YAZ$ (используя $\angle YZA = 90^\circ$):

$$8 = 16 + 9 - 2 \cdot 4 \cdot 3 \cdot \cos \alpha$$

$$24 \cos \alpha = 16$$

$$\cos \alpha = \frac{16}{24} = \frac{2}{3}$$

Т. косинусов для $\triangle ABC$:

$$BC^2 = 12^2 + 6^2 - 2 \cdot 12 \cdot 6 \cdot \cos 2\alpha$$

$$\cos 2\alpha = \cos(\alpha + \alpha) = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha = \cos^2 \alpha - (1 - \cos^2 \alpha) = 2\cos^2 \alpha - 1$$

$$BC^2 = 144 + 36 - 144 \left(2 \cdot \frac{4}{9} - 1 \right)$$

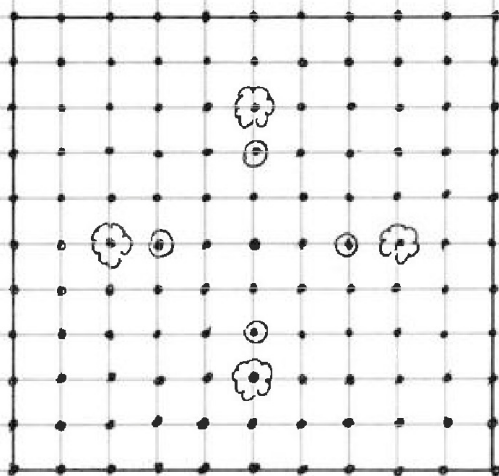


На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☒	☐

СТРАНИЦА
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



Всего узлов: $11 \cdot 11 = 121$

Кол-во способов выбрать 2 узла из 121: C_{121}^2

Но раскраски, получающиеся друг из друга поворотом, по условию считаются одинаковыми $\Rightarrow$ таким способом мы учитываем раскраски одинаковые раскраски ~~но не~~

по несколько раз. Тогда нам теперь необходимо найти, сколько раз мы учитываем одну и ту же раскраску. И вот так.

На рисунке вот так  отмечены узлы, которые получают друг из друга поворотом (мы выбрали 1 пару и рисуем для неё; для др. пар будет аналогично)

Заметим, что

у нас получилось 4 таких пары узлов, т.е. каждую раскраску мы учитываем 4 раза.

Тогда всего способов перекрасить 2 узла в белый цвет $\frac{C_{121}^2}{4} = \frac{121!}{2! \cdot 119! \cdot 4} = \frac{120 \cdot 121}{8} = 15 \cdot 121 =$

$= 1815$

$$\begin{array}{r} 121 \\ \times 15 \\ \hline 605 \\ + 121 \\ \hline 1815 \end{array}$$

Ответ: 1815 способов

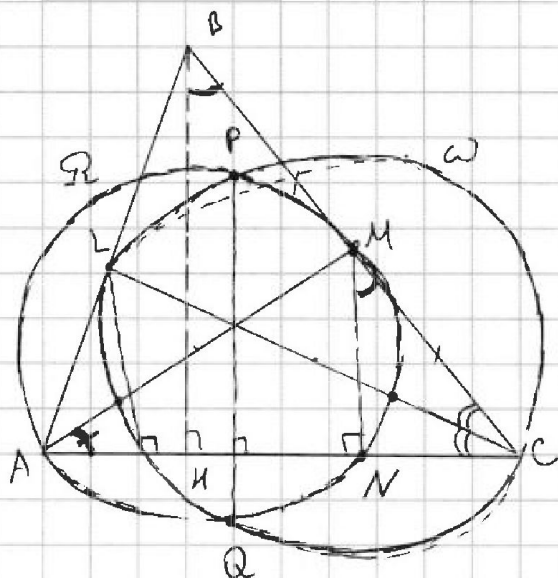
На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

☐ ☐ ☐ ☐ ☒ ☐ ☒

СТРАНИЦА
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



AC, BC - ?

$$AB = 4$$

$$AN = 5$$

М-сер. ВС

CL - Inc - ca

AM - гизм. $Q, N \in Q \Rightarrow \angle ANM = 30^\circ$
 MN - ср. лин. в $\triangle CBH$ (H - осн. вое., пров. из т. B)
 $\triangle CNM \sim \triangle CBH$ ~~к-ва~~, т. к. MN - ср. лин.



1 2 3 4 5 6 7

☐ ☐ ☒ ☐ ☐ ☐ ☐

СТРАНИЦА
2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

2 сл. $A = 75q^2$, $B = 11p^2$

$$\begin{cases} (m+2n)(m+2n-7) = 75q^2 \\ mn(m+2n+9) = 11p^2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} (m+2n)(m+2n-7) = 3 \cdot 5 \cdot 5 \cdot q \cdot q \\ mn(m+2n+9) = 11 \cdot p \cdot p \end{cases}$$

Рассмотрим первое уравнение:

$$(m+2n)(m+2n-7) = 3 \cdot 5 \cdot 5 \cdot q \cdot q$$

Возможны варианты:

$$\begin{aligned} m+2n=3 &\Rightarrow -4 = 25q^2 - \text{невозм.} \\ m+2n=1 &\Rightarrow -6 = 75q^2 - \text{невозм.} \\ m+2n=5 &\Rightarrow -2 = 15q^2 - \text{невозм.} \\ m+2n=25 &\Rightarrow 18 = 3q^2 \Rightarrow 6 = q^2 - \text{невозм.} \\ m+2n=75 &\Rightarrow 68 = q^2 - \text{невозм.} \\ m+2n=3q &\Rightarrow 3q-7 = 25q \Rightarrow 22q = -7 - \text{невозм.} \\ m+2n=5q &\Rightarrow 5q-7 = 15q \Rightarrow 10q = -7 - \text{невозм.} \\ m+2n=15q &\Rightarrow 15q-7 = 5q \Rightarrow 10q = 7 - \text{невозм.} \\ m+2n=25q &\Rightarrow 25q-7 = 3q \Rightarrow 22q = 7 - \text{невозм.} \\ m+2n=75q &\Rightarrow 75q-7 = q \Rightarrow 74q = 7 - \text{невозм.} \\ m+2n=q &\Rightarrow q-7 = 75q \Rightarrow 74q = -7 - \text{невозм.} \\ m+2n=q^2 &\Rightarrow q^2-7 = 75 \Rightarrow q^2 = 82 - \text{невозм.} \\ m+2n=3q^2 &\Rightarrow 3q^2-7 = 25 \Rightarrow 3q^2 = 32 - \text{невозм.} \\ m+2n=5q^2 &\Rightarrow 5q^2-7 = 15 \Rightarrow 5q^2 = 22 - \text{невозм.} \\ m+2n=15q^2 &\Rightarrow 15q^2-7 = 5 \Rightarrow 15q^2 = 12 - \text{невозм.} \\ m+2n=25q^2 &\Rightarrow 25q^2-7 = 3 \Rightarrow 25q^2 = 10 - \text{невозм.} \\ m+2n=75q^2 &\Rightarrow 75q^2-7 = 1 \Rightarrow 75q^2 = 8 - \text{невозм.} \end{aligned}$$

Возможных вариантов не нашлось, но ~~на всякий случай~~ рассмотрим второе уравнение

$$mn(m+2n+9) = 11p \cdot p$$

Тут возможны варианты:

$$\begin{aligned} m=n=p &\Rightarrow 3p+9 = 11 \Rightarrow 3p = 2 - \text{невозм.} \\ m=11, n=p &\Rightarrow 11+2p+9 = p \Rightarrow p = -22 - \text{невозм.} \\ m=p, n=11 &\Rightarrow p+22+9 = p \Rightarrow 31 = 0 - \text{невозм.} \\ m=11p, n=p &\Rightarrow 13p+9 = 1 \Rightarrow 13p = -8 - \text{невозм.} \\ m=p, n=11p &\Rightarrow 23p+9 = 1 \Rightarrow 23p = -8 - \text{невозм.} \\ m=11p^2, n=1 &\Rightarrow 11p^2+11 = 1 \Rightarrow 11p^2 = -10 - \text{невозм.} \\ n=11p^2, m=1 &\Rightarrow 22p^2+10 = 1 \Rightarrow 22p^2 = -9 - \text{невозм.} \end{aligned}$$

Итак, во 2 сл. не существует подходящих пар (m, n)

Ответ: (5; 3)