



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

10 КЛАСС. Вариант 7



1. [3 балла] Четвёртый член арифметической прогрессии равен $6 - 9x$, шестой член равен $(x^2 - 2x)^2$, а десятый равен $9x^2$. Найдите x .
2. [4 балла] Найдите наибольшее значение выражения $3y + 6x$ при условии

$$\begin{cases} |x - 2y| \leq 2 \\ |2x - y| \leq 1. \end{cases}$$

3. [5 баллов] Найдите все пары (m, n) натуральных чисел, для которых одно из чисел $A = m^2 + 4mn + 4n^2 - 7m - 14n$ и $B = m^2n + 2mn^2 + 9mn$ равно $11p^2$, а другое равно $75q^2$, где p и q — простые числа.
4. [5 баллов] Прямая, параллельная биссектрисе AX треугольника ABC , проходящая через середину M его стороны BC , пересекает сторону AB и продолжение стороны AC в точках Z и Y соответственно. Найдите BC , если $AC = 6$, $AZ = 3$, $YZ = 4$.
5. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \sqrt{x+2} - \sqrt{7-y} + 7 = 2\sqrt{14+5x-y^2}, \\ x^3 + 3x - \sqrt{2y} = y^3 - \sqrt{2x} + 3y. \end{cases}$$

6. [4 балла] На тетрадном листе нарисован квадрат 10×10 клеток (стороны квадрата идут вдоль границ клеток), а все узлы сетки внутри квадрата или на его границе покрашены в чёрный цвет. Найдите количество способов перекрасить два узла в белый цвет, если раскраски, получающиеся друг из друга поворотом, считаются одинаковыми.
7. [6 баллов] В треугольнике ABC на медиане AM и биссектрисе CL как на диаметрах построены окружности Ω и ω соответственно, пересекающиеся в точках P и Q . Отрезок PQ параллелен высоте треугольника ABC , проведённой из вершины B . Окружность Ω пересекает сторону AC повторно в точке N . Найдите длины сторон AC и BC , если $AB = 4$, $AN = 5$.



1	2	3	4	5	6	7
☒	☐	☐	☐	☐	☐	☐

СТРАНИЦА
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Пусть разность арифм. прогр. равна d , тогда

$d = \frac{a_6 - a_4}{2}$, а также $d = \frac{a_{10} - a_6}{4}$, где a_i — i -ый член арифм. прогр., тогда:

$$\frac{a_6 - a_4}{2} = \frac{a_{10} - a_6}{4}, \quad 2(a_6 - a_4) = a_{10} - a_6, \text{ подставим:}$$

$$2((n^2 - 2n)^2 - (n^2 - 2n)) = 9n^2 - (n^2 - 2n)^2 = n^2(9 - (n-2)^2)$$

$$\Leftrightarrow 2(n^4 - 4n^3 + 4n^2 + 2n - 2) = -n^4 + 4n^3 + 5n^2$$

$$2n^4 - 8n^3 + 8n^2 + 4n - 4 = -n^4 + 4n^3 + 5n^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 3n^4 - 12n^3 + 3n^2 + 4n - 4 = 0 \Leftrightarrow n^4 - 4n^3 + n^2 + 6n - 4 = 0$$

заменим, что $n=1$, подсмотрим разложения:

$(n-1)(n^3 - 3n^2 - 2n + 4) = 0$, заменим, что правая часть также делится на $(n-1)$, получаем:

$$(n-1)^2(n^2 - 2n - 4) = 0, \text{ решим } n^2 - 2n - 4, D = 4 + 16 = 20$$

$$n = \frac{2 \pm \sqrt{20}}{2} = 1 \pm \sqrt{5}, \Rightarrow \text{подсмотрим также } n;$$

$$n=1, n=1+\sqrt{5}, n=1-\sqrt{5}.$$

Ответ: 1, $1+\sqrt{5}$, $1-\sqrt{5}$



1 ☐ 2 ☒ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

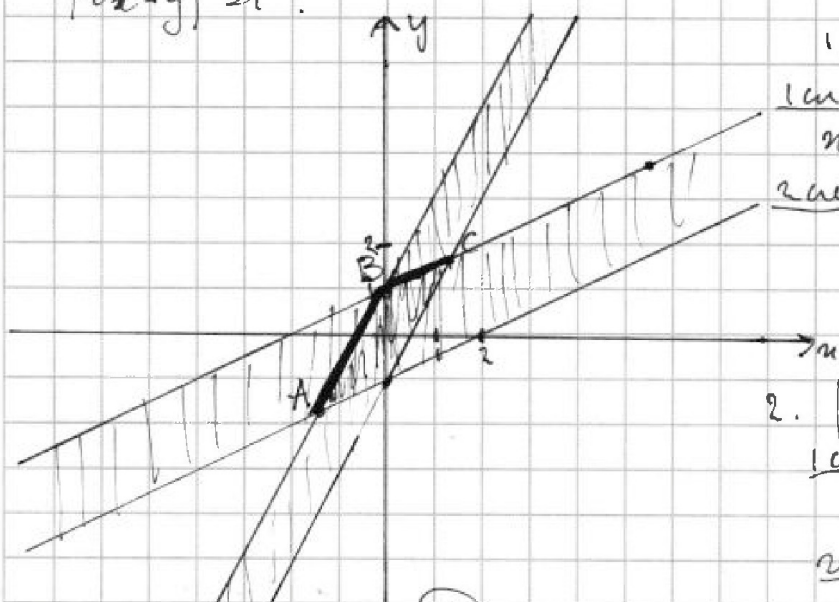
СТРАНИЦА

1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Далее построим график $|x - 2y| \leq 2$

$|2x - y| \leq 1$:



1. $|x - 2y| \leq 2$

1сл. $x - 2y \geq 0, y \leq \frac{x}{2}$

$x - 2y \leq 2, y \geq \frac{x}{2} - 1$

2сл. $x - 2y \leq 0, y \geq \frac{x}{2}$

$-x + 2y \leq 2, y \leq \frac{x}{2} + 1$

2. $|2x - y| \leq 1$

1сл. $2x - y \geq 0, y \leq 2x$

$2x - y \leq 1, y \geq 2x - 1$

2сл. $2x - y \leq 0, y \geq 2x$

$-2x + y \leq 1, y \leq 2x + 1$

Пл.к. у нас система

что нам нужно найти пересек. 2-х областей - это заштр. пар-к. Заметим, что $\forall x \in$ нашей области мы можем выбрать единичный самый большой $y \Rightarrow$ нам нужно пойти только по правой крайней отрезкам $[AB]$ и $[BC]$, также очевидно, что на отрезке $[BC]$ самым большим знач.

$3y + 6x$ будет обладать точка C, т.к. C увеличивается и увеличивается и y , аналогично и с лв отрезком $[AB] \Rightarrow$ на отрезках $[AB]$ и $[BC]$ самым большим знач $3y + 6x$ будет обладать точка C, $\Rightarrow$ и во всей области (увел. монотонно пер-б.)

Найдем коорд. т.к. C:

$x = \frac{4}{3}, y = \frac{5}{3}$, откуда

$$\begin{cases} y = \frac{x}{2} + 1 \\ y = 2x - 1 \end{cases} \Rightarrow \frac{x}{2} + 1 = 2x - 1$$

$3y + 6x = 5 + 8 = 13$

Ответ: 13



1 ☐ 2 ☐ 3 ☒ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА

1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Заметим, что $A = m^2 + 4mn + 4n^2 - 7m - 14n =$

$$(m+2n)^2 - 7(m+2n) = (m+2n)(m+2n-7)$$

$$B = m^2n + 2mn^2 + 9mn = mn(m+2n+9)$$

1 случай. $A = 11p^2, B = 75q^2,$

$$(m+2n)(m+2n-7) = 11p^2, m+2n = k \in \mathbb{N},$$

$$k(k-7) = 11p^2, k \neq k-7, \Rightarrow k \text{ может быть}$$

равно $11p^2, 11p, p^2, 11$, 1.1 $k = 11p^2, k-7 = 11p^2-7 = 1 \neq$

1.2 $k = 11p, k-7 = 11p-7 = p, \neq$, 1.3 $k = p^2, k-7 = p^2-7 = 11, \neq$

1.4 $k = 11, k-7 = 4 = p^2, p = 2, \Rightarrow k = 11 \text{ пойд. } m+2n = 11 \checkmark$

отсюда пары $(1, 5), (3, 4), (5, 3), (7, 2), (9, 1)$ - пойд.

но $mn(m+2n+9) = 75q^2, 5(1+10+9) = 100 \neq, 12(3+8+9) = 240 \neq,$

2.2.1 $15 \cdot 20 = 300 = 2^2 \cdot 75 \checkmark, 14 \cdot 20 = 280 \neq, 9 \cdot 20 = 180 \neq$

пойд. только $(5, 3)$

2 случай. $A = 75q^2, B = 11p^2, mn(m+2n+9) = 11p^2$

$m+2n+9 > 11$, $m+2n+9$ может равняться $11p^2, 11p, p^2, p$.

2.1 $m+2n+9 = 11p^2, m=n=1, m+2n+9 = 12 \neq$ 2.2 $m+2n+9 = 11p,$

либо m , либо $n = p$, либо m , либо $n = 1$, 2.2.1 $m+2n+9 = p+n = 11p \neq$

2.2.2 $m+2n+9 = 2p+10 = 11p \neq$, 2.3 $m+2n+9 = p^2$, 2.3.1 $m=1, n=1$

$1+2+9 = 12 = p^2 \neq$ 2.3.2 $m=n, n=1, 1+2+9 = 12 = p^2 \neq$

2.4 $m+2n+9 = p$, $\Rightarrow$ либо m , либо n больше или равно p .

т.к. $mn = 11p$ но тогда $m+2n+9 > p$ - противоречие

$\Rightarrow$ 2 случай $B = 11p^2$ - решений нет.

$\Rightarrow$ Ответ: $(5, 3)$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

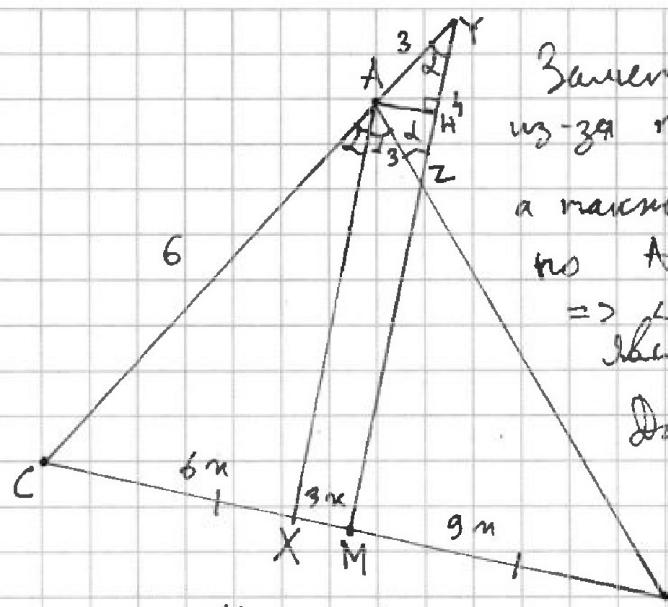
1 2 3 4 5 6 7

☐ ☐ ☐ ☒ ☐ ☐ ☐

СТРАНИЦА

1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



Заметим, что $\angle XAB = \angle AZY$
из-за пар-ти прямых (AX) и (ZY) ,
а также $\angle CAX = \angle CYM$ из $(AX) \parallel (ZY)$,
но AX - бис-са $\Rightarrow \angle CAX = \angle XAB$
 $\Rightarrow \angle AZY = \angle CYM \Rightarrow \triangle AYZ$
является равнобедр. $\Rightarrow AY = AZ = 3$

Далее из т. Палеса следует,

$$\text{что } \frac{CA}{AY} = \frac{CX}{XM} = \frac{6}{3} \Rightarrow$$

$$CX = 6, XM = 3,$$

но $CM = MB \Rightarrow MB = CX + XM = 9$, то т. о бис-се

$$\frac{AC}{AB} = \frac{CX}{XM} = \frac{6}{12} = \frac{1}{2}, \Rightarrow AB = 2AC = 12.$$

Теперь по т. косинусов найдем угол

в $\triangle AZY$ по б. и высоте (бис, мед.) AH ,
и найдем $\cos \angle$, $\cos \angle = \frac{XH}{AY} = \frac{2}{3}$, откуда найдем

$$\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha = \frac{4}{9} - \frac{5}{9} = -\frac{1}{9}, \quad (\sin^2 \alpha = 1 - \cos^2 \alpha = 1 - \frac{4}{9})$$

Теперь по т. кос. найдем BC : $BC^2 = 144 + 36 - 2 \cdot 12 \cdot 6 \cdot -\frac{1}{9} =$
 $144 + 36 + \frac{2 \cdot 12 \cdot 6}{9} = 180 + 2 \cdot 4 \cdot 2 = 196$, откуда $BC = 14 = \sqrt{196}$

Ответ: $BC = 14$



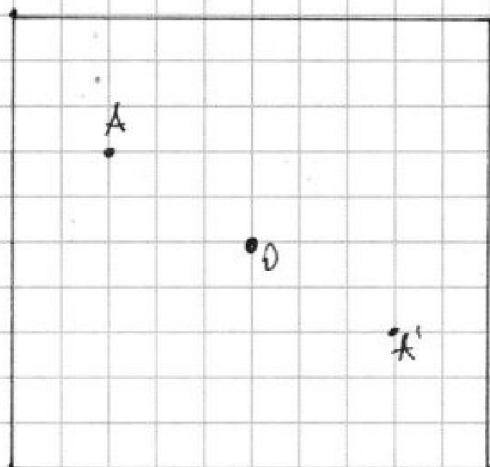
На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☒ 7 ☐

СТРАНИЦА

1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



Заметим, что ~~у нас~~
у нас 121 узел (11^2),
и у каждого узла, кроме
центрального (точка O),
есть противоположный ему
узел, например для узла
A противоположный — A'.

узел A', такой, что $A' = S_O(A)$. (центр. симм. фрм. O)

Заметим, что была пара из A и A', где
A и A' противоположные (пара пар — какие-то
не противополож. узла), но у нас есть 4-вар-та
„навернуть нашу пару“ так, что все пар-ты будут
отличаться, или же узлы противополож., но
только 2 вар-та, всего пар узлов: $C_{121}^2 = \frac{121 \cdot 120}{2} =$
 $= 121 \cdot 60$, а также есть $\frac{121-1}{2} = 60$ противополож. пар
 $\Rightarrow$ непротв. пар у нас $121 \cdot 60 - 60 = 120 \cdot 60$
тогда кол-во вариантов k будет: $K = \frac{120 \cdot 60}{4} + \frac{60}{2} =$
 $= 30 \cdot 60 + 30 = 30 \cdot 61 = 1830$ вариантов

Ответ: 1830 вариантов

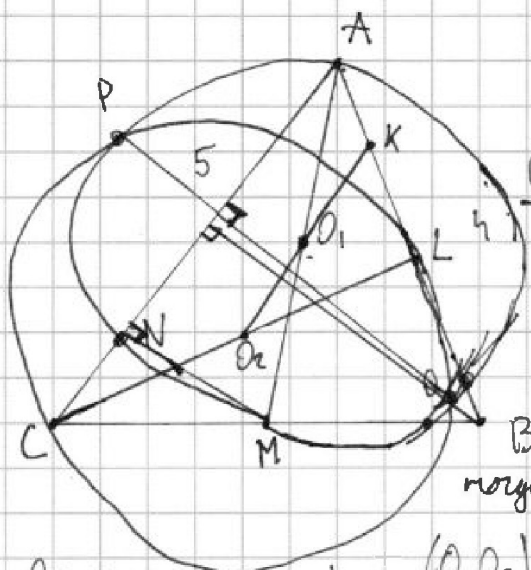


На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☒

СТРАНИЦА
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



(PQ) перп. высоте из B $\Rightarrow (PQ) \perp AC$, т.к.

Ω высота из B $\perp (AC)$

Пусть O_1 - сеп. [AM]

O_2 - сеп. [CL],

тогда O_1 - центр Ω , O_2 - ц.

$(O_1 O_2) \perp (PQ) \Rightarrow (O_1 O_2) \parallel (AC)$.

т.к. O_2 - середина AC и $(O_1 O_2) \parallel (AC)$

$\Rightarrow (O_1 O_2) \cap (AB) = K$, K - сеп. [AL], т.к. $[O_2 K]$ сеп. линия

$\triangle ACL$. Но $(ML) \parallel (O_1 K)$, как сеп. лин в $\triangle MNL$, $\Rightarrow$
 $(ML) \parallel (AC)$, но $CM = MB \Rightarrow ML$ - сеп. линия $\triangle ABC$

$\Rightarrow AL = LB$, $\Rightarrow CL$ - медиана $\triangle ABC \Rightarrow \triangle ABC$ - равност.

$\Rightarrow AC = BC$, заметим, что $\angle MNA = 90$, т.к. $N \in \Omega$

но AM - диаметр, пусть $\angle CAB = 2\alpha$, тогда $\cos 2\alpha = \frac{0.5 AB}{AC} = \frac{2}{5}$

$\angle ACB = 180 - 2\alpha$, $\cos \angle ACB = -\cos 2\alpha = \sin^2 \alpha - \cos^2 \alpha = \frac{21}{25} - \frac{16}{25} = \frac{5}{25}$

$\sin^2 \alpha = 1 - \cos^2 \alpha = 1 - \frac{4}{25} = \frac{21}{25}$, откуда $\cos \angle ACB = \frac{CN}{CM}$

пусть $CM = a$, тогда $CB = 2a = AC$, тогда $CN = 2a - 5$,

тогда $\cos \angle ACB = \frac{2a - 5}{a} = \frac{5}{25}$, $52a - 25 = 17a$, $33a = 125$,

$a = \frac{125}{33}$, $\Rightarrow AC = BC = \frac{250}{33}$, тогда $AL = BL = \frac{a}{2} = 2$,

заметим, пусть $\angle ACL = \alpha$, $CN = a$, тогда $CM = \frac{a+5}{2}$,

т.к. $CM = MB = AC$ тогда $\cos 2\alpha = \cos \angle NCM = \frac{CN}{CM} = \frac{2a}{a+5}$

$\sin \alpha = \frac{AL}{AC} = \frac{2}{\frac{250}{33}} = \frac{132}{125}$, $\sin^2 \alpha = \frac{17}{125}$, $\cos 2\alpha = 1 - \frac{17}{125}$,

$\cos 2\alpha = 1 - \frac{17}{125} = \frac{108}{125}$, заменим на $(a+5)^2$:

$a^2 + 10a + 25 - 17 = 2a^2 + 10a$, $a^2 = 17$, откуда $a = \sqrt{17}$

$\Rightarrow AC = BC = 5 + \sqrt{17}$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7
☒ ☒ ☒ ☒ ☒ ☒ ☒

СТРАНИЦА
 ИЗ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Заметим, что $A = m^2 + 4mn + 4n^2 - 7m - 14n =$
 $= (m+2n)^2 - 7(m+2n) = (m+2n)(m+2n-7)$

$B = m^2n + 2mn^2 + 9mn = mn(m+2n+9)$

1 случай: $A = 11p^2$, $B = 75q^2$, тогда

$A = (m+2n)(m+2n-7) = 11p^2$, $m+2n = k \in \mathbb{N}$,

$A = k(k-7) = 11p^2$, 1сл $k = 11p$, $k-7 = p$, тогда,
 $k = p+7 = 11p$, $10p = 7 \nexists$, 2сл, $k = 11p^2$, $k-7 = 1$, $k = 8$,
 $8 = 11p^2$, $\nexists \Rightarrow$ в 1-м случае решений нет.

2 случай: $A = 75q^2$, $B = 11p^2$

Рассмотрим $B = mn(m+2n+9) = 11p^2$, заметим, что

$m+2n+9 \geq 11$, 1сл. $m+2n+9 = 11$, тогда $m=n=1$,

$1 \cdot 1 \cdot 11 = 11p^2$, $p=1 \nexists$ - противоречие

2сл. $m+2n+9 > 11$, тогда 2.1 $m+2n+9 = 11p^2$, тогда

$m=n=1$, $m+2n+9 = 12 \neq 11p^2 \nexists$, 2.2 $m+2n+9 = 11p$,

тогда $mn = p$, 2.2.1 $m=p$, $n=1$, $p \cdot (p+10) = 11p^2$, $p+10 = 11p$,

$10p = 11$, 2.2.2 $n=p$, $m=1$, $p(p+10) = 11p^2$, $p+10 = 11p$, $p=1 \nexists$

2.3 $m+2n+9 = p^2$, тогда $mn=1$, либо m , либо $n=1$, тогда $p=1$

$m+2n+9$ равно либо $1+2+9=12$, - тогда, либо $1+22+9=32 \nexists$

2.4 $m+2n+9 = p$, тогда либо $m=p$, $n=1$, либо $m=1$, $n=p$,

2.4.1 $m=p$, $n=1$, $p+22+9=p$, $31=0 \nexists$, 2.4.

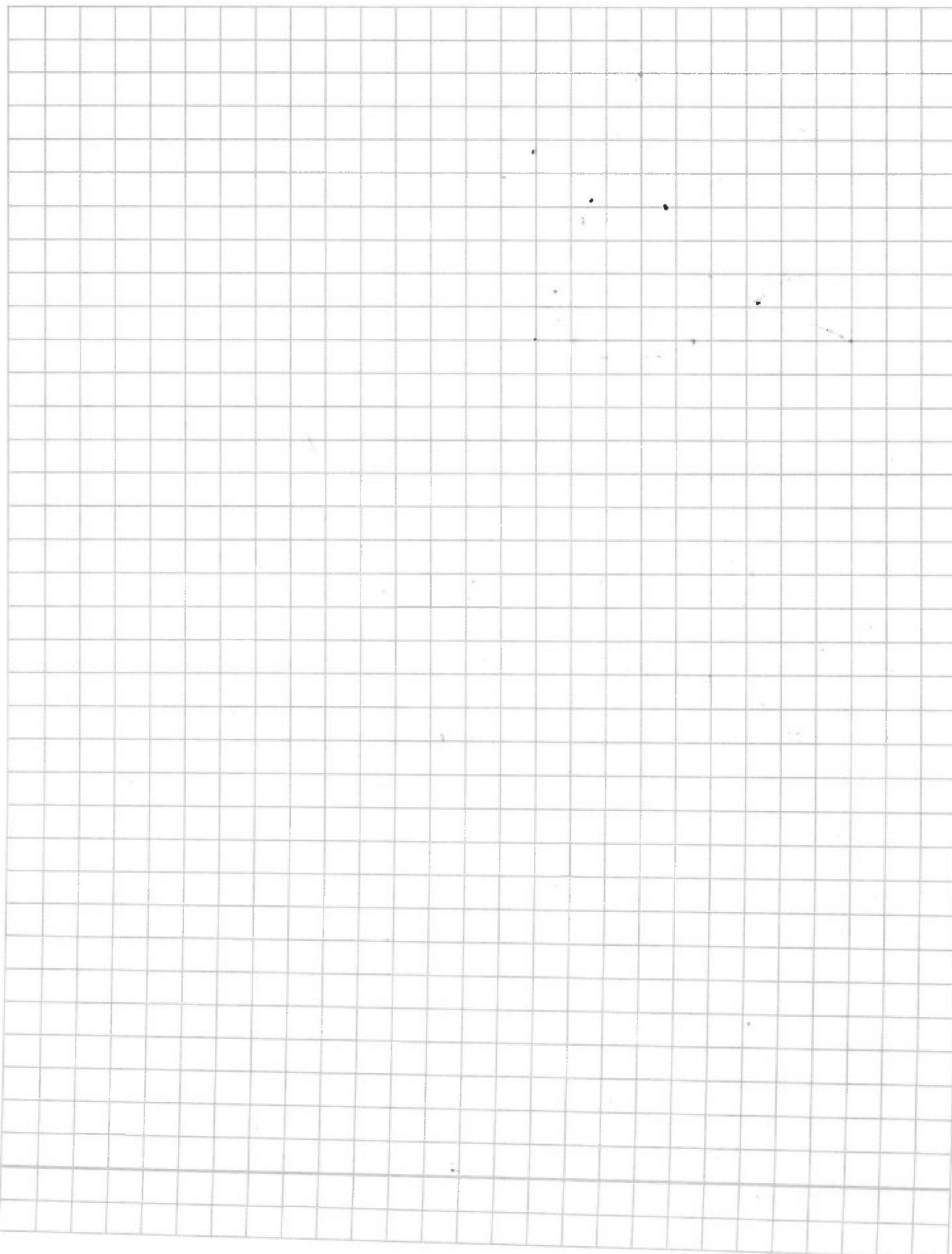


На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
из

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



$$\frac{(x^2-2x)^2}{2} = \frac{9x^2 - (x^2-2x)^2}{3}, \quad 2x^2(x-2)^2 = x^2(9 - (x-2)^2)$$

$$6-9x \geq (x^2-2x)^2, \quad x^4-4x^3+4x^2+9x-6 \leq 0 \quad 4+16=20$$

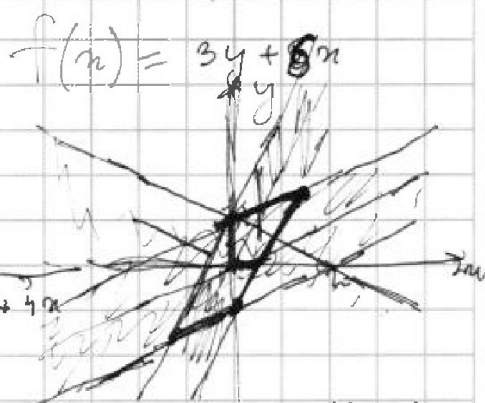
$$2x^4-8x^3+8x^2+18x-12 = -x^4+4x^3+5x^2 \quad \frac{2 \pm 2\sqrt{5}}{2} = 1 \pm \sqrt{5}$$

$$3x^4-12x^3+3x^2+18x-12 \geq 0$$

$$x^4-4x^3+x^2+6x-4=0$$

$$16-32+4+12-4$$

$$\begin{array}{r} x^4-4x^3+x^2+6x-4 \quad | x-1 \\ x^4-x^3 \\ \hline 3x^3+x^2 \\ 3x^3-3x^2 \\ \hline 4x^2+6x \\ 4x^2-4x \\ \hline 10x-4 \end{array}$$



$$\begin{aligned} x-2y \leq 2 & \quad -x+2y \leq 2, \\ y \geq \frac{x}{2}-1 & \quad y \leq \frac{x}{2}+1 \\ y \geq \frac{x-1}{2} = 0,5x-1 & \quad x-2y \leq 0 \\ 3(y+2x) & \quad y \geq \frac{x}{2} \end{aligned}$$

$$x^3(x-1) - 3x^2(x-1) - 2x(x-1) + 4(x-1)$$

$$(x-1)(x^3-3x^2-2x+4)=0$$

$$x^2(x-1)-2x(x-1)-4(x-1)$$

$$(x-1)(x^2-2x-4)$$

$$y = 0,5x+1$$

$$y = 2x-1$$

$$2x-1 = 0,5x+1$$

$$1,5x = 2$$

$$x = \frac{2}{1,5} = \frac{4}{3}$$

$$3y+6x - \text{max.}$$

$$y = \frac{x}{2}+1, \quad x \leq \frac{4}{3}$$

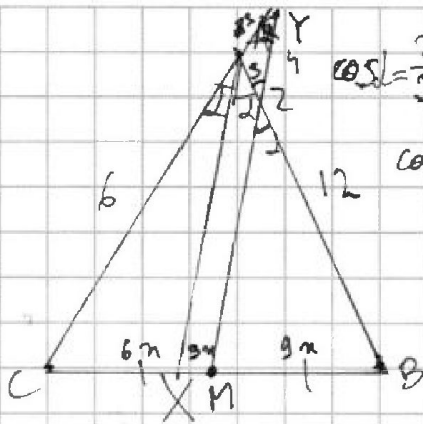


На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
из

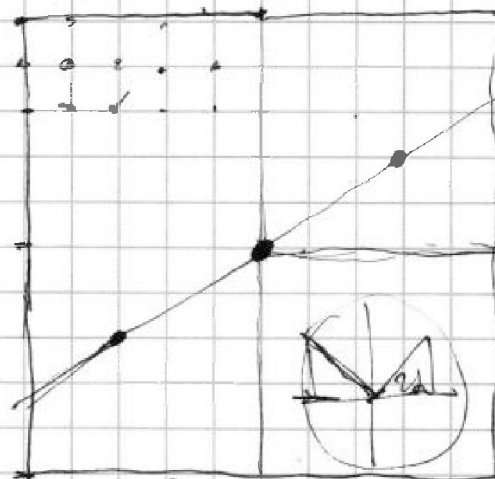
Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



$\cos \angle = \frac{2}{3}$ $\frac{4}{9}$ $\frac{5}{9}$ **Черновик**
 $\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha$
 $\frac{4}{9} - \frac{5}{9} = -\frac{1}{9}$

$\frac{121 \cdot 120}{2} - 60$
выбрав узел
121 узел

$m^2 + 4mn + 4n^2 - 7m - 14n$
 $(m+2n)^2 - 7(m+2n)$
 $(m+2n)(m+2n-7) = 11p^2$
 $n(m^2 + 2mn + 4n^2)$



$\cos 2\alpha = \frac{2a}{a+5}$
 $\sin 2\alpha = \frac{4}{a+5}$

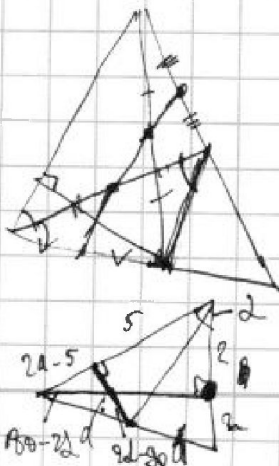
$\frac{121 \cdot 120 - 120}{2} + \frac{120}{2}$
 $mn(m+2n+g) = 11p^2$

$x^3 - y^3 = 3y - 3x + 25y - 25x$
 $\frac{121 \cdot 120}{2} = 121 \cdot 60 - 60$
 $mn = p$
 $m=1, n=1$
 $m+2n+g > 11$

$mn(m+2n+g) = 11p^2$

$(m+2n)(m+2n-7)$
 $k/(k-7) = 11p^2$
 $k = 11p^2$
 $k = 11p$
 $k = p^2$

$m+2n+g = \dots$
 $p+2+g = p+4 = 11p$
 $1+2p+g = 11p = 2p+10$
 $32 = p^2$
 $22 = p^2$



$k-7 = n$
 $p^2 = 18$
 $\cos 2 = \frac{8}{5}$
 $2a=5$

