



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

10 КЛАСС. Вариант 6



1. [3 балла] Второй член арифметической прогрессии равен $12 - 12x$, четвёртый член равен $(x^2 + 4x)^2$, а восьмой равен $(-6x^2)$. Найдите x .
2. [4 балла] Найдите наименьшее значение выражения $10x + 5y$ при условии

$$\begin{cases} |2x - 3y| \leq 6, \\ |3x - 2y| \leq 4. \end{cases}$$

3. [5 баллов] Найдите все пары (m, n) натуральных чисел, для которых одно из чисел $A = m^2 - 4mn + 4n^2 + 13m - 26n$ и $B = m^2n - 2mn^2 - 2mn$ равно $17p^2$, а другое равно $15q^2$, где p и q — простые числа.
4. [5 баллов] Прямая, параллельная биссектрисе AX треугольника ABC , проходящая через середину M его стороны BC , пересекает сторону AC и продолжение стороны AB в точках Z и Y соответственно. Найдите BC , если $AC = 18$, $AZ = 6$, $YZ = 8$.
5. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \sqrt{x+4} - \sqrt{3-y} + 5 = 2\sqrt{12-x-y^2}, \\ 2x^5 + 4x^2 - \sqrt[3]{3y} = 2y^5 - \sqrt[3]{3x} + 4y^2. \end{cases}$$

6. [4 балла] На тетрадном листе нарисован квадрат 7×7 клеток (стороны квадрата идут вдоль границ клеток), а все узлы сетки внутри квадрата или на его границе покрашены в чёрный цвет. Найдите количество способов перекрасить два узла в белый цвет, если раскраски, получающиеся друг из друга поворотом, считаются одинаковыми.
7. [6 баллов] В треугольнике ABC на медиане AM и биссектрисе CL как на диаметрах построены окружности Ω и ω соответственно, пересекающиеся в точках P и Q . Отрезок PQ параллелен высоте треугольника ABC , проведённой из вершины B . Окружность Ω пересекает сторону AC повторно в точке N . Найдите длины сторон AC и BC , если $AB = 6$, $AN = 5$.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



СТРАНИЦА
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$a_2 = a_1 + d; a_4 = a_1 + 3d; a_8 = a_1 + 7d \Rightarrow$$

$$a_4 = \frac{2a_2 + a_8}{3}, \text{ т.е. } (x^2 + 4x)^2 = \frac{-6x^2 + 24 - 24x}{3}$$

$$x^2(x+4)^2 + 2x^2 + 8x - 8 = 0$$

$$x^2(x+4)^2 + 2x(x+4) + 1 - 9 = 0$$

$$(x(x+4) + 1)^2 - 9 = 0$$

$$(x(x+4) + 1 - 3)(x(x+4) + 1 + 3) = 0$$

$$(x^2 + 4x - 2)(x^2 + 4x + 4) = 0$$

$$x = -2 \pm \sqrt{6}$$

$$x = -2$$

$$\text{Ответ: } x_1 = -2; x_2 = -2 + \sqrt{6}; x_3 = -2 - \sqrt{6}$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



СТРАНИЦА
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Найти мин. знач. $Z = 10x + 5y$

$$\begin{cases} |2x - 3y| \leq 6 \\ |3x - 2y| \leq 4 \end{cases}$$

Найти Z будет при $x = 2,5$ т.е. (применяется на x , т.к. $10 > 5$ т.е. x важнее y)
Чем меньше x , тем меньше $Z \Rightarrow$

$3x - 2y$ должно быть минимальным, т.е. -4

$$3x - 2y = -4 \Rightarrow y = 1,5x + 2 \Rightarrow$$

$$|2x - 3y| = |-2,5x - 6|$$

$$|-2,5x - 6| \leq 6, \text{ найдем мин. } x \Rightarrow$$

$$-2,5x - 6 = 6 \Rightarrow x = \frac{-12}{2,5} = -\frac{24}{5} \Rightarrow$$

$$y = -\frac{36}{5} + 2 = -\frac{26}{5} \Rightarrow$$

$$Z_{\text{мин}} = 10 \cdot -\frac{24}{5} + 5 \cdot -\frac{26}{5} = -48 - 26 = -74$$

Ответ: -74



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☒	☐	☐	☐	☐

СТРАНИЦА
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$A = m^2 - 4mn + 4n^2 + 13m - 26n = (m-2n)(m-2n+13)$$

$$B = m^2n - 2mn^2 - 2mn = mn(m-2n-2)$$

A - произведение четного и нечетного числа $\Rightarrow A$ - четное $\Rightarrow$

Если $A = 17p^2$, то $p=2 \Rightarrow A=68$

$$(m-2n)(m-2n+13)=68$$

числа с разницей 13 $\Rightarrow$ подходят только множители 17 и 4, -17 и -4

$$\begin{cases} m-2n=4 \\ m-2n=-17 \end{cases}$$

- не подходит, т.к. тогда $B < 0$, т.к. $mn > 0 \Rightarrow$

$$m-2n=4 \Rightarrow B \text{ - четное} \Rightarrow q=2, B=60 \Rightarrow mn=30$$

$$\begin{cases} m-2n=4 \\ mn=30 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} m=10 \\ n=3 \end{cases}$$

Если $A = 15q^2$, то $q=2 \Rightarrow A=60$

$$60 = 1 \cdot 60 = 2 \cdot 30 = 3 \cdot 20 = 4 \cdot 15 = 5 \cdot 12 = 6 \cdot 10 =$$

$$= (-1) \cdot (-60) = (-2) \cdot (-30) = (-3) \cdot (-20) = (-4) \cdot (-15) = (-5) \cdot (-12) = (-6) \cdot (-10)$$

разница в 13 ни в какой из пар нет $\Rightarrow$

$$A \neq 15q^2 \Rightarrow$$

$(10; 3)$ - единств. возм. пара

Ответ: $(10; 3)$



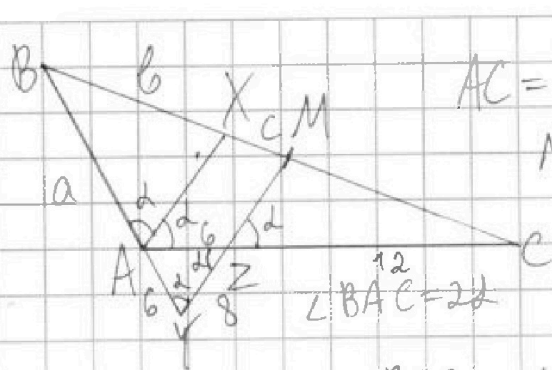
На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☒ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА

1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



$AC = 18, AY = 6, YZ = 8, AX =$ бис-са
М-сер. BC, $MY \parallel AX$

$AX \parallel MY \Rightarrow \angle MZC = \angle \Rightarrow$

$\Rightarrow \angle AYZ = \angle$

$\angle BAC$ - внешн. для $\triangle AYZ \Rightarrow$

$\angle BAC = \angle AYZ + \angle AZY \Rightarrow \angle AYZ = \angle \Rightarrow$

$AY = AZ$

$$\triangle AYZ: \cos 2\alpha = \frac{AY^2 + AZ^2 - AA^2}{2 \cdot AY \cdot YZ} =$$

$$= \frac{36 + 64 - 36}{2 \cdot 6 \cdot 8} = \frac{2}{3} \Rightarrow \cos 2\alpha = 2 \cdot \frac{4}{9} - 1 = -\frac{1}{9}$$

$$AB = a, BX = b, XM = c$$

$$\frac{6}{a} = \frac{c}{8} \quad \text{и} \quad \frac{6}{12} = \frac{c}{b+c} \quad \text{по теор. Симсона}$$

$$\Rightarrow b = c \Rightarrow a = 6$$

$$\triangle ABC: BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2AB \cdot AC \cdot \cos 2\alpha$$

$$BC^2 = 36 + 324 - 2 \cdot 6 \cdot 18 \cdot \frac{1}{9} = 384 \Rightarrow BC = 8\sqrt{6}$$

$$\text{Ответ: } BC = 8\sqrt{6}$$

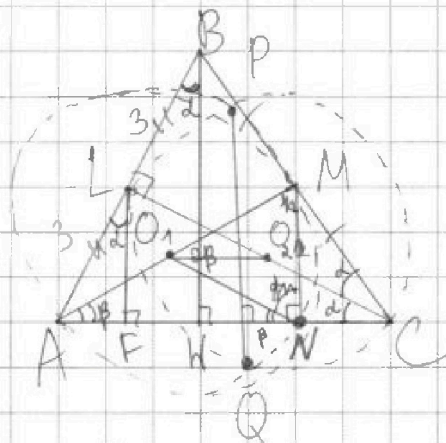
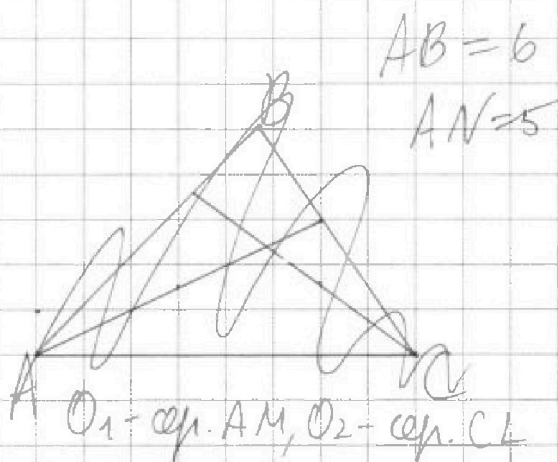


На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☒

СТРАНИЦА
1 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



$BW \perp AC$, $PQ \parallel BW \Rightarrow PQ \perp AC$

O_1 и O_2 — центры Ω и ω , $O_1O_2 \perp PQ$

$AC \parallel O_1O_2$; $F \in AC$, $LF \parallel BW$

O_1 и O_2 равноудалены от AC

$\angle ANM$ опир. на $AM \Rightarrow \angle ANM = 90^\circ \Rightarrow MN \parallel BW$

$LF = MN$

$\triangle CMN \sim \triangle CBW$ по 2 углам $\Rightarrow BW = 2MN \Rightarrow$

$LF = \frac{BW}{2} \Rightarrow \triangle ALF \sim \triangle ABW \Rightarrow AL = \frac{1}{2} AB \Rightarrow$

CL — медиана $\Rightarrow AC = BC$, $\triangle ABC$ — равноб.

$\triangle AO_1N$ и $\triangle NO_1M$ — равноб.

$AL = BL$, $LF \parallel BW \Rightarrow AF = AN$ по т. Фалеса

$BM = CM$, $BW \parallel MN \Rightarrow HN = CN$

$AO_1 = O_1N = MO_1$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
из

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\frac{a_1 + 7d + 2a_1 + 2d}{3} = a_1 + 3d$$

$$\frac{-6x^2 + 24 - 24x}{3} = (x^2 + 4x)^2$$

$$-2x^2 + 8 - 8x = (x^2 + 4x)^2$$

$$x^2(x+4)^2 + 2x^2 + 8x - 8 = 0$$

$$x^2(x+4)^2 + 2x(x+4) - 8 = 0$$

min при $2x+4y$

$$3x - 2y = -4 \Rightarrow y = 1,5x + 2$$

$$|2x - 4,5x - 6| \leq 6$$

$$|-2,5x - 6| \leq 6$$

$$-2,5x - 6 = 6$$

$$-2,5x = 12 \Rightarrow x = \frac{-12}{2,5} = \frac{-24}{5} \Rightarrow y = \frac{-36}{5} + 2 = \frac{-26}{5}$$

$$-\frac{72}{5} + \frac{52}{5} = \frac{-20}{5} \quad -\frac{48}{5} + \frac{78}{5} = \frac{30}{5}$$

$$10 - \frac{24}{5} + 5 \cdot \frac{-26}{5} = -48 - 26 = -74$$

$$x^2(x+4)^2 + 2x(x+4) + 1 - 9 = 0$$

$$(x(x+4) + 1)^2 - 9 = 0$$

$$(x(x+4) + 1 - 3)(x(x+4) + 1 + 3) = 0$$

$$(x^2 + 4x - 2)(x^2 + 4x + 4) = 0$$

$$x = \frac{-4 \pm \sqrt{16 - 8}}{2}$$

$$x = \frac{-4 \pm \sqrt{8}}{2}$$

$$x = \frac{-4 \pm 2\sqrt{2}}{2}$$

$$D = 16 - 16 = 0$$

$$x = 2$$

$$x = -2 + \sqrt{6}$$

$$x = -2 - \sqrt{6}$$

$$\begin{aligned} -6 \leq 2x - 3y \leq 6 \\ -4 \leq 3x - 2y \leq 4 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 1,5x \leq 3 + 1,5y \\ \frac{2y}{3} \leq x \leq \frac{4}{3} + \frac{2y}{3} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2x^2 + 18x - 8 \\ -\frac{8}{4} = -2 \end{aligned}$$

$$2 \cdot 4 - 16 - 8 = -16$$

$$12 + 24 = 36$$

$$4x - 8 = -4 \quad 16$$

$$-6 \cdot 4 = -24$$

x_1	36
x_2	16
x_3	-24



1 2 3 4 5 6 7

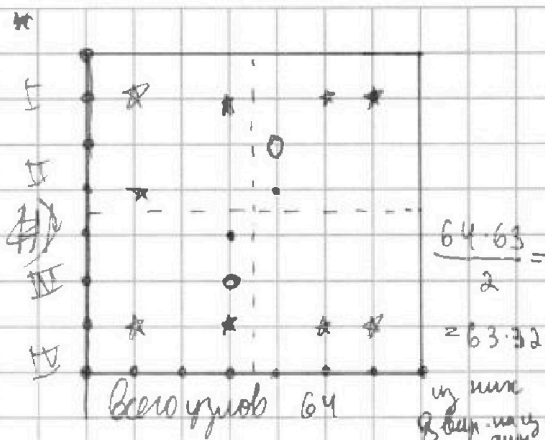
СТРАНИЦА
из

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$(10x+5y) \text{ мин}$$

$$\begin{cases} |2x-3y| \leq 6 \\ |3x-2y| \leq 4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2x-3y \leq 6 \\ 3x-2y \leq 4 \\ 0 \leq 2x-3y \leq 6 \\ 0 \leq 2y-3x \leq 4 \\ 0 \leq 3y-2x \leq 6 \\ 0 \leq 3x-2y \leq 4 \\ 0 \leq 3y-2x \leq 6 \\ 0 \leq 2y-3x \leq 4 \end{cases}$$



$$A = m^2 + 4mn + 4n^2 + 13m - 26n = (m-2n)^2 + 13(m-2n) = (m-2n)(m-2n+13)$$

$$B = m^2n - 2mn^2 - 2mn = mn(m-2n-2) \text{ - возм. оба вар.}$$

$$\sqrt{A = 17p^2}, B = 15q^2$$

$p=2$

$$\begin{array}{r} 62 \\ 118 \\ 496 \\ + 16 \\ \hline 502 \end{array}$$

$$(m-2n)(m-2n+13) = 68$$

возм. пары: $1 \text{ и } 68, 2 \text{ и } 34, 4 \text{ и } 17$

$$\begin{cases} m-2n=4 \\ m-2n=-17 \end{cases}$$

не парн. м.к. $B > 0, m > 0$

$$(4+2n)n=30 \Rightarrow 2n^2+4n-30=0 \Rightarrow n=-1 \pm \sqrt{1+15} = -1 \pm 4$$

или $m-2n=4 \Rightarrow B \text{ - четн.} \Rightarrow q=2 \Rightarrow B=60 \Rightarrow mn=30$, парн.

$$\sqrt{A = 15q^2} \Rightarrow q=2 \Rightarrow A=60$$

$$60 = 1 \cdot 60 = 2 \cdot 30 = 3 \cdot 20 = 4 \cdot 15 = 5 \cdot 12 = 6 \cdot 10 \text{ - разность 13 нест.}$$

$$\sqrt{x+4} - \sqrt{3-y} + 5 = \sqrt{12-x-y^2}$$

$$2x^5 + 4x^2 - \sqrt{3y} = 2y^5 - \sqrt{3x} + 4y^2$$

если $x=y$:

$$\sqrt{2+4} - \sqrt{3-2} + 5 = \sqrt{12-2-2^2}$$

$$\sqrt{2+4} - \sqrt{3-2} = \sqrt{(3-2)(2+4)} - 5$$

$$2+4+3-2-2\sqrt{(2+4)(3-2)} = (3-2)(2+4)+25-$$

$$0 \leq y \leq 3$$

$$0 \leq x \leq 12$$

$$\begin{aligned} 12-2-2^2 &= 12-4+3-2^2 = \\ &= -2^2+3+4-12 = \\ &= 2(3-2)+4(3-2) = \\ &= (3-2)(2+4) \end{aligned}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7
☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐

СТРАНИЦА
 ИЗ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$a_2 = a_1 + d$$

$$a_8 = a_1 + 7d$$

$$a_n = a_1 + 3d$$

$$x^4 + 2x^3 + 6x^2 + 12x^2 + 6x^2 + 12x$$

$$\begin{cases} a_1 + d = 12 - 12x \\ a_1 + 3d = x^4 + 8x^3 + 16x^2 = (x^2 + 4x)^2 \\ a_1 + 7d = -6x^2 \end{cases}$$

$$6d = -6x^2 - 12 + 12x$$

$$d = -x^2 + 2x - 2 \quad + 2(x-1)^2 - 12x + 12 = (x^2 + 4x)^2$$

$$d = -(x-1)^2$$

$$a_1 = 12 - 12x + (x-1)^2$$

$$12 - 12x + (x-1)^2 - 3(x-1)^2 =$$

$$= -2(x-1)^2 - 12x + 12 = x^4 + 8x^3 + 16x^2$$

$$x^4 + 8x^3 + 16x^2 + 2x^2 - 4x + 2 + 12x - 12 = 0$$

$$x^4 + 8x^3 + 18x^2 + 8x - 10 = 0$$

$$x^4 + 10x^3 + 2x^2 - 20x + 10 = 0$$

$$x^4 + 2x^3 + 6x^2 + 12x^2 + 6x^2 + 12x - 4x - 10 = 0$$

$$x^4 + 4x^3 + 14x^2 + 16x^2 + 2x^2 + 8x$$

$$8 \sqrt{(3-2)(2+4)} = 18 + 12 - 2 - 2^2$$

$$8 \sqrt{(3-2)(2+4)} = 18 + (3-2)(2+4)$$

$$3n \quad t = \sqrt{(3-2)(2+4)} \Rightarrow t^2 - 8t + 18 = 0$$

$$t = 4 \pm \sqrt{16 - 18}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

СТРАНИЦА

2 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\frac{AN}{\sin 2\beta} = \frac{AO_1}{\sin \beta}$$

$$2AO_1 = \frac{AN}{\cos \beta}$$

$$\cos \beta = \frac{AN}{2AO_1}$$

$$\sin 2\beta = \frac{AN \cdot \sin \beta}{AO_1} = 2 \sin \beta \cos \beta = 2 \sin \beta \cdot \frac{AN}{2AO_1}$$

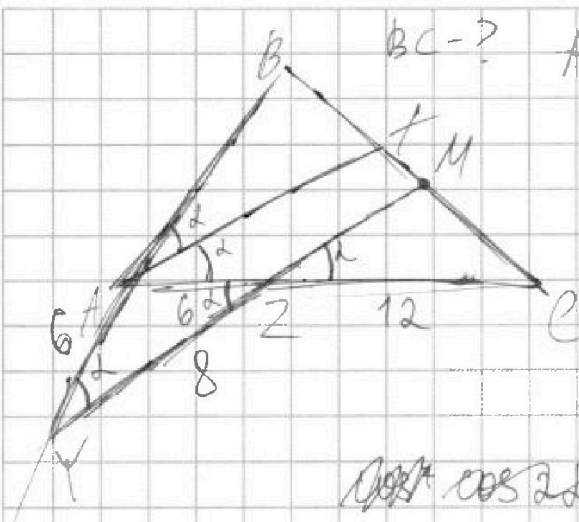


На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
из

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



$$AC = 18$$

$$AZ = 6$$

$$YZ = 8$$

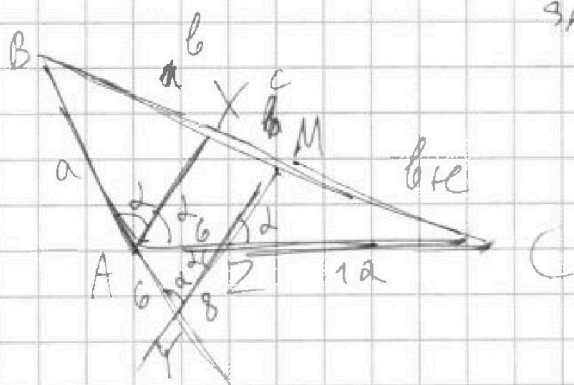
$\angle BAC$ - в 2 раза $\angle AZY$

$$\angle AZY = \alpha \Rightarrow \angle AYZ = \alpha \Rightarrow AY = 6$$

$$\cos \alpha = \frac{36 + 64 - 36}{2 \cdot 6 \cdot 8} = \frac{64}{96} = \frac{2}{3}$$

$$\cos 2\alpha = 2\cos^2 \alpha - 1 = 2 \cdot \frac{4}{9} - 1 = \frac{1}{9}$$

$$\sin 2\alpha = \sqrt{1 - \frac{1}{81}} = \frac{\sqrt{80}}{9} = \frac{4\sqrt{5}}{9}$$



$$BX = a, XM = b$$

$$MC = a + b$$

$$AB = a, BX = b, XM = c$$

$$\frac{6}{a} = \frac{c}{b} = 1$$

$$\frac{6}{12} = \frac{c}{b+c} \Rightarrow b = c \Rightarrow$$

$$X \text{ - сеп. } BM \Rightarrow a = 6$$

$$BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2AB \cdot AC \cos 2\alpha$$

$$BC^2 = 36 + 18^2 + 2 \cdot 6 \cdot 18 \cdot \frac{1}{9} =$$

$$= 36 + 324 + 24 = 384 \Rightarrow$$

$$BC = 8\sqrt{6}$$

$$\frac{63 \cdot 32 - 18}{4} + \frac{8}{2} =$$

$$= 63 \cdot 8 - 2 + 4 = 63 \cdot 8 + 2$$

1 2 3 4 5 6 7

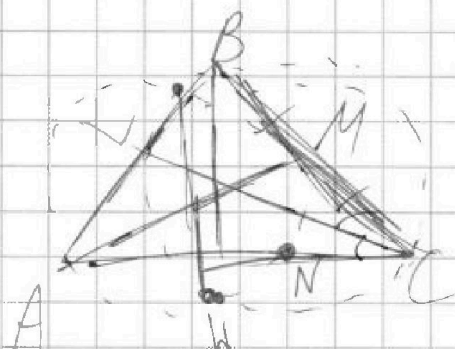


На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

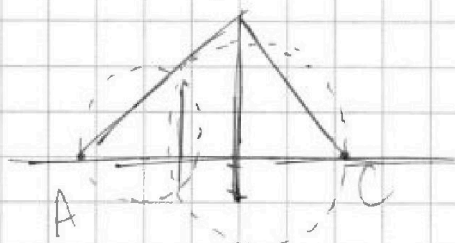
СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



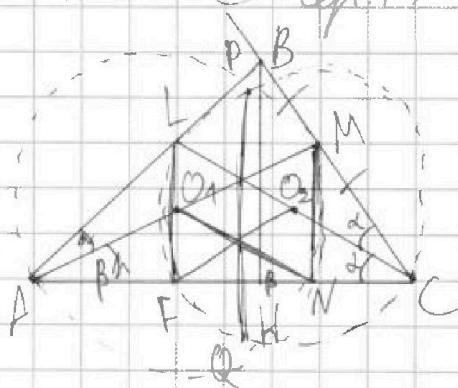
$$AB = 6$$

$$AN = 5$$



$$O_1 O_2 \perp BH$$

$$O_1 O_2 \parallel AC \Rightarrow \text{сер. } AM \text{ и } CL \text{ на } AC$$



$$\angle ANM \text{ опр. на диам.} \Rightarrow \angle ANM = 90^\circ$$

$$PQ \parallel BH \parallel NM$$

$$\angle FMN \neq \angle LFC = 90^\circ$$

$$LF = MN, \text{ т.к. } PQ \perp AC$$

$$AM = \frac{MN}{\sin B} \quad CL = \frac{LF}{\sin A}$$

$$AN O_1 - \text{равноб. треуго.}$$

$$2R = AM = \frac{AN}{\sin B}$$

$$BH = 2MN = 2LF \Rightarrow$$

$$L - \text{сер. } AP \Rightarrow CL - \text{медиана}$$

$$AC = BC \Rightarrow CL - \text{высота}$$

$$\triangle ACL \text{ и } \triangle ABH:$$

$$\frac{AC}{AB} = \frac{CL}{BH} = \frac{AL}{AH} \quad AC \cdot AN = 18$$