



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

9 КЛАСС. Вариант 9



- ✓1. [3 балла] Найдите все значения параметра t , при каждом из которых уравнение $x^2 + 2\sqrt{3}tx + 4t^2 - 4 = 0$ имеет два различных действительных корня, а их произведение положительно.
- ✓2. [4 балла] Натуральные числа a и b таковы, что их сумма равна 40, а значение выражения $a^2 - 2ab + b^2 + 15a - 15b$ равно $17p^5$, где p – некоторое простое число. Найдите числа a и b .
- ✓3. [5 баллов] На стороне BC треугольника ABC отмечены точки M и N так, что $BM = MN = NC$. Прямая, параллельная AN и проходящая через точку M , пересекает продолжение стороны AC за точку A в такой точке D , что $AB = CD$. Найдите AB , если $BC = 12$, $\cos(\angle SEM) = -\frac{1}{4}$.
2<CAN
- ✓4. [5 баллов] В классе для занятий иностранным языком стоят три ряда парт, в каждом из которых по три парты, расположенных друг за другом. Парты рассчитаны на одного человека. Школьник хорошо видит доску в любом из следующих случаев (и только в них):
- он сидит на первой парте в ряду,
 - ближайшая парта перед ним пуста,
 - за ближайшей партой перед ним сидит ученик меньшего роста.
- Сколькими способами можно рассадить в классе 8 учеников группы так, чтобы всем было хорошо видно доску, если известно, что все школьники разного роста? Ответ дайте в виде числа или выражения, содержащего не более двух слагаемых (в слагаемые могут входить факториалы, биномиальные коэффициенты).
- ✕5. [5 баллов] Продолжение сторон BC (за точку C) и AD (за точку D) вписанного в окружность четырёхугольника $ABCD$ пересекаются в точке E . Центр O окружности, вписанной в треугольник ABE , лежит на отрезке CD . Найдите наименьшее возможное значение суммы $ED + DO$, если известно, что $BE = 10$.
- ✓6. [4 балла] На острове расположено несколько деревень. Между некоторыми деревнями проложены дороги. Известно, что из любой деревни в любую другую можно добраться, причём по единственному маршруту. Также известно, что есть четыре деревни, из которых выходят 3, 4, 5 и 7 дорог соответственно, а из остальных деревень выходит ровно по одной дороге. Сколько деревень может быть на острове?
- ✓7. [5 баллов] Найдите все пары целых чисел $(x; y)$, удовлетворяющие уравнению

$$\sqrt{2x + 2y - x^2 - y^2} + \sqrt{1 - |x + y - 2|} = 1.$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☒ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$x^2 + 2\sqrt{3}tx + 4t^2 - 4 = 0.$$

$$x_1, x_2 \quad x_1 \cdot x_2 \geq 0$$

$$D > 0$$

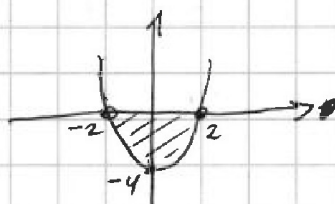
$$1) D = (2\sqrt{3}t)^2 - 4(4t^2 - 4) = 12t^2 - 16t^2 + 16 = -4t^2 + 16 > 0 \quad | :4$$

$$4 > t^2$$

$$2^2 > t^2$$

$$0 > t^2 - 4 \quad t \in (-2; 2)$$

~~$$t \in (-\infty; -2) \cup (2; +\infty)$$~~



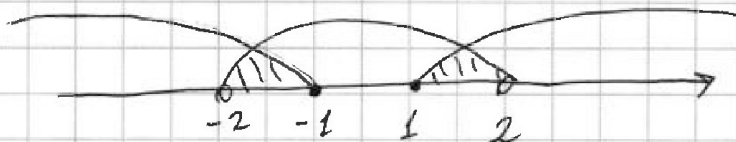
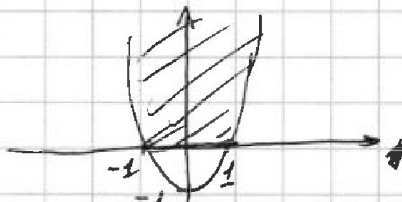
$$2) x_1 \cdot x_2 = \frac{4t^2 - 4}{1} = 4t^2 - 4 \geq 0$$

$$4t^2 - 4 \geq 0 \quad | :4$$

$$t^2 \geq 1$$

$$t^2 - 1 \geq 0$$

$$t \in (-\infty; -1] \cup [1; +\infty)$$



$$\text{Ответ: } t \in (-2; -1] \cup [1; 2)$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☒ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
1 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$a, b \in \mathbb{N}$ p - простое число
 $a + b = 40$

$$a^2 - 2ab + b^2 + 15a - 15b = (a-b)^2 + 15(a-b) = (a-b)(a-b+15)$$

$$(a-b)(a-b+15) = 17p^5$$

$$a-b = (a+b) - 2b = 40 - 2b = 2(20-b) \Rightarrow a-b : 2$$

$$2(20-b)(40+15-2b) = 17p^5 \quad a-b = 2 \cdot k$$

$$17p^5 : 2 \Rightarrow p \text{ - простое}$$

$$p^5 : 2 \Rightarrow p = 2$$

$$a+b > a-b$$

$$b > -b \quad (b \in \mathbb{N}, \text{ это верно })$$

1) Пусть $a-b : 17$

$$a-b+15 \geq 15$$

$$a-b = 17 \cdot 2 \cdot 2^k \quad k \in [0; 4] \quad t, k \in \mathbb{N}$$

$$k+t=4$$

$$a-b+15 = 2^t \quad t \in [0; 4]$$

$$2^t \geq 15 \Rightarrow 2^t \geq 16$$

$$t \geq 4 \Rightarrow t = 4$$

$$\begin{cases} a-b+15 = 2^4 \\ a-b = 17 \cdot 2 \cdot 2^{4-t} = 17 \cdot 2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a-b = 34 \\ a+b = 40 \end{cases}$$

$$2a = \frac{34+40}{2} = 37$$

$$b = 3$$

$$a-b+15 = 16$$

$$a-b = 1$$

$$a-b = 34 = 1 \quad \text{не подходит}$$

2) Пусть $a-b+15 : 17$

$$\begin{cases} a-b+15 = 17 \cdot 2^t \quad t, k \in \mathbb{N} \\ a-b = 2 \cdot 2^k \quad k+t=4 \end{cases}$$

$$17 \cdot 2^t - 15 = 2^{k+1} \quad k, t \in [0; 4]$$

$$\text{если } t=0 \quad k+1=5$$

$$17-15 \neq 2^5$$

$$\text{если } t=1 \quad k+1=4$$

$$34-15 \neq 2^4$$

$$\text{если } t=2 \quad k+1=3$$

$$17 \cdot 4 - 15 \neq 2^3$$

$$\text{если } t=3 \quad k+1=2$$

$$17 \cdot 8 - 15 \neq 2^2$$

$$\text{если } t=4 \quad k+1=1$$

$$17 \cdot 16 - 15 \neq 2$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☒ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{cases} a-b = 2 \cdot 2^t \cdot 17^i \\ a-b = 2^{4-t} \cdot 17^{1-i} - 15 \end{cases} \quad \begin{matrix} t \in [0; 4] \\ i \in [0; 1] \end{matrix}$$

$$2^{t+1} \cdot 17^i = 2^{4-t} \cdot 17^{1-i} - 15$$

если $t+1$ и $4-t > 0$ то есть 2 , то $15 \cdot 2 \nmid \Rightarrow$
хотя бы одно из чисел $\times 2$

$$a-b \mid 2 \Rightarrow a-b \mid 15 \cdot 2$$

x и y тогда $\Rightarrow y \mid 2$

$$\begin{matrix} y=1 & x=17 \cdot 2^5 & 17 \cdot 2^5 = 1 - 15 = -14 \times \\ y=17 & x=2^5 & 2^5 = 17 - 15 = 2 \times \end{matrix}$$

$a-b$ - четное, тогда

$a-b+15$ - нечетное

из разложения произведения

$$\begin{cases} a-b+15=1 & 1-15=-14=17 \cdot 2^5 \\ a-b=17 \cdot 2^5 & -14=17 \cdot 2^5 \times \end{cases}$$

или

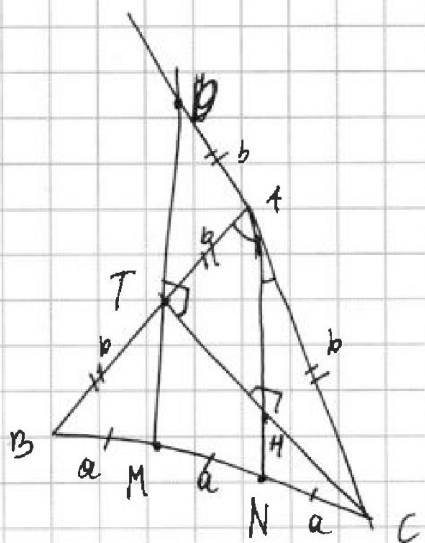
$$\begin{cases} a-b+15=17 & 2=2^5 \times \\ a-b=2^5 \end{cases}$$

Ответ: таких чисел не существует.



СТРАНИЦА
1 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



$$\begin{aligned} MD \parallel AN \quad AB = CD \\ BM = MN = NC = a \\ BC = 12 \\ \cos(\angle CAN) = -\frac{1}{4} \\ AB = 1 \end{aligned}$$

Решение

- 1) MT - ср. линия $\triangle ABN$
($BM = MN$, $MT \parallel AN$) $\Rightarrow BT = AT$
- 2) Зовем м. Меломая для $\triangle ABC$ и прямой MD .

$$\frac{MC}{CB} \cdot \frac{BT}{TA} \cdot \frac{AD}{DC} = 1.$$

$$\frac{2}{1} \cdot \frac{1}{1} \cdot \frac{AD}{DC} = 1$$

$$\frac{AD}{DC} = \frac{1}{2} \Rightarrow AD = AC$$

$$\begin{aligned} AD = \frac{1}{2} DC \Rightarrow AD = AT = AC = BT = b \\ AT = \frac{1}{2} AB \end{aligned}$$

- 3) $\triangle DTC$ - прямоугол. (медiana равна $\frac{1}{2}$ гипотенузы)
 $\angle DTC = 90^\circ$

$$AN \parallel DM, DM \perp TC \Rightarrow AN \perp TC.$$

В $\triangle TAC$: $AT = AC$, AM - высота. В $\triangle TAC$ высота - это бис-са $\Rightarrow \angle CAN = \angle BAN$
 $2\angle CAN = \angle BAC.$

- 4) Зовем м. теор. косинусов для $\triangle ABC$.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1

☐

2

☐

3

☒

4

☐

5

☐

6

☐

7

☐

СТРАНИЦА

2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2AB \cdot AC \cos \angle BAC$$

$$12^2 = (2b)^2 + b^2 - 2 \cdot 2b \cdot b \cos 2\angle CAN$$

$$12^2 = 5b^2 - 4b^2 \cdot \left(-\frac{1}{4}\right) = 5b^2 + b^2 = 6b^2$$

$$12^2 = 6b^2 \quad | \sqrt{}$$

$$12 = \sqrt{6} b \quad (b > 0 \text{ очевидно})$$

$$b = \frac{12}{\sqrt{6}} = 2\sqrt{6}$$

$$AB = 2b = 2 \cdot 2\sqrt{6} = 4\sqrt{6}$$

$$\text{Ответ: } AB = 4\sqrt{6}.$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☒ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА

1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Модели у нас 8, а парт 9. Тогда на каком-то ряду будут сидеть только 2 человека.

Пусть выбрали a_1 и a_2 , a_1 выше a_2 . Как они могут сидеть

1. a_1, a_2, a_1 ровно 4 варианта.
2. a_1, a_2, a_2
3. a_1, a_1, a_2

Заметим, что если на ряду сидят 3 человека, то расстановка определяется однозначно: не 1 парте человек всегда хорошо видит, а следовательно модели должны сидеть по возрастанию скорости (иначе условие не выполнится, т.к. соседних парт нет и это не 1 парты $\Rightarrow$ остается ровно одно условие)

№ Количество расстановок это:

$(3 \cdot C_2^8 \cdot 4) \cdot (C_3^5 \cdot 1) \cdot (C_3^3 \cdot 1)$
 $\uparrow$ выбираем 2 модели $\uparrow$ выбираем 3 модели из 5 $\uparrow$ рассативаем оставшихся
 выбираем ряд, где сидят 2 человека $\uparrow$ кол-во вариантов расставить их

$$\begin{aligned} &= 3 \cdot \frac{8!}{2!} \cdot 4 \cdot \frac{5!}{3!} \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 = \\ &= \frac{3 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 4}{2} \cdot \frac{5 \cdot 4}{3 \cdot 2} = 20 \cdot 21 \cdot 16 = 336 \cdot 20 = 6720 \end{aligned}$$

Ответ: 6720 способов.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☒	☐

СТРАНИЦА
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Пусть деревни - вершины графа, а дороги - ребра. Граф связный, в нем нет циклов и между 2 верш. макс. 1 ребро $\Rightarrow$ всего ребер $n-1$. (где n - кол-во вершин графа)

Посчитаем кол-во ребер по другому: степени всех вершин / 2.

$$\frac{7 + 5 + 4 + 3 + (n-4) \cdot 1}{2} = n - 1.$$

$$15 + n = 2n - 2$$

$$n = 17$$

Ответ: всего 17 деревень.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☒

СТРАНИЦА
2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Подстановка и проверка

Нам подходят точки:

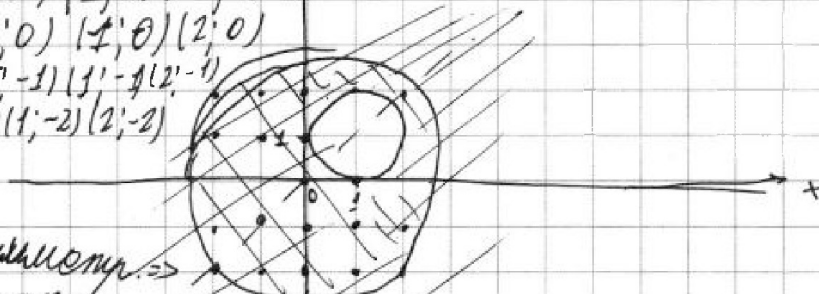
$(-2; 2) (-1; 2) (0; 2) (1; 2) (2; 2)$

$(-2; 1) (-1; 1) (0; 1) (1; 1) (2; 1)$

$(-2; 0) (-1; 0) (0; 0) (1; 0) (2; 0)$

$(-2; -1) (-1; -1) (0; -1) (1; -1) (2; -1)$

$(-2; -2) (-1; -2) (0; -2) (1; -2) (2; -2)$



уравнение симметр. $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ будем проверять
только пары (a, b) , а
пары (b, a) очевидно
подходят.

$(-2; 2): \sqrt{-4} + \sqrt{1-2} = 1 \quad \times$

$(-1; 2): \sqrt{4-2-1-4} + \sqrt{1-1} = 0 \quad \times$

$(0; 2): \sqrt{0} + \sqrt{1-0} = 1 \quad \checkmark$

$(1; 2): \sqrt{4+2-1-4} + \sqrt{0} = 1 \quad \checkmark$

$(2; 2): \sqrt{0} + \sqrt{1-2} = 1 \quad \times$

$(-2; 1): \sqrt{-4+2-4-1} + \sqrt{1-5} = 1 \quad \times$

$(-1; 1): \sqrt{-1-1} + \sqrt{1-2} = 1 \quad \times$

$(0; 1): \sqrt{1} + \sqrt{1-1} = 1 \quad \checkmark$

$(-2; 0): \sqrt{-4-4} + \sqrt{1-4} = 1 \quad \times$

$(-1; 0): \sqrt{1} + \sqrt{1-3} = 1 \quad \times$

$(0; 0): \sqrt{0} + \sqrt{1} = 1 \quad \checkmark$

$(-2; -1): \sqrt{-1-4+2-4} + \dots = 1 \quad \times$

$(-1; -1): \sqrt{-2-2-2} + \dots = 1 \quad \times$

$(-2; -2): \sqrt{-4-4-4-4} + \dots = 1 \quad \times$

Ответ: $(2; 0) (0; 2) (1; 2) (2; 1) (0; 1) (1; 0)$
 $(0; 0)$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☒

СТРАНИЦА

1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\sqrt{2x+2y-x^2-y^2} + \sqrt{1-|x+y-2|} = 1$$

$$1 - |x+y-2| \geq 0$$

$$1 \geq |x+y-2| \Leftrightarrow 1 \geq x+y-2 \geq -1 \quad | +2$$

$$3 \geq x+y \geq 1$$

$$2x+2y-x^2-y^2 \geq 0$$

$$6 \geq 2(x+y) \geq 2$$

$$2(x+y) \geq x^2+y^2$$

1) $6 \geq x^2+y^2$ — ^{для} пер-во окружности с радиусом $\sqrt{6} \approx 2,3$ и $O(0,0)$

Заметим, что ~~все~~ т.к. все ~~выражения~~ положительные, то каждое из них не превосходит 1.

$$1 \geq \sqrt{2x+2y-x^2-y^2} \quad |^2$$

$$1 \geq 2x+2y-x^2-y^2$$

$$(x^2-y^2+2x+1) + (y^2-2y+1) \geq 1$$

$$2) (x-1)^2 + (y-1)^2 \geq 1 \quad \text{— пер-во для окружности с радиусом 1 и } O(1;1)$$

Изобразим на графике.

1) — л-во решений для (1)

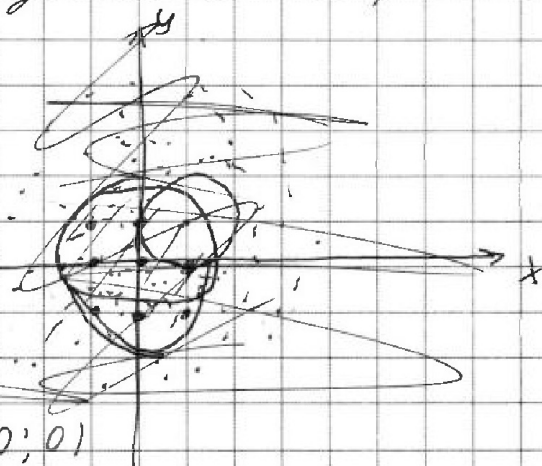
2) — л-во решений для (2)

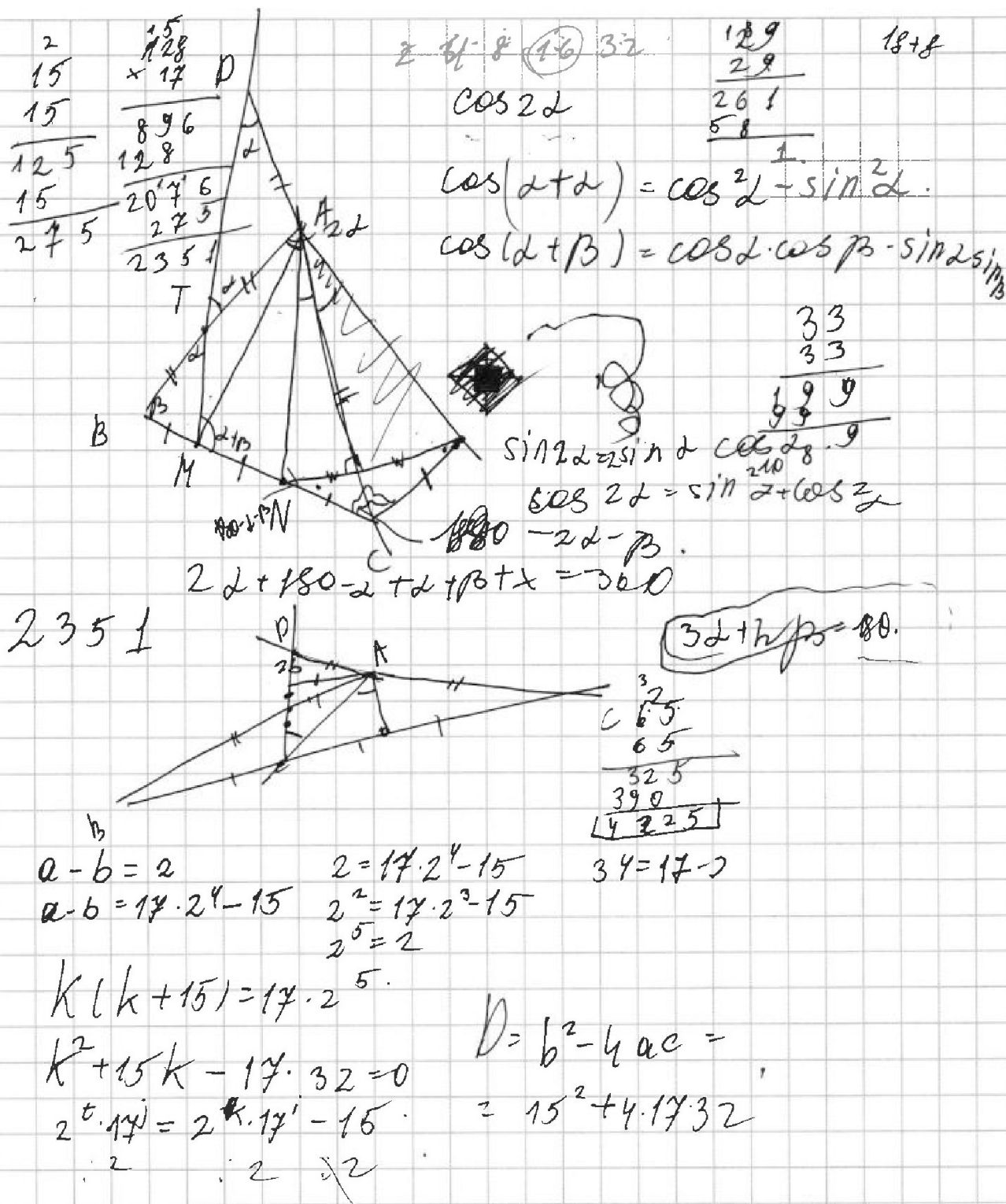
Нам нужно их пересечение.

П.к. нам нужны только целые координаты, выпишем их все

$(-1;-1) (0;-1) (1;-1) (-1;0) (0;0)$

$(1;0) (-1;1) (0;1)$





2



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
из

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{array}{r} 514 \\ \times 8 \\ \hline 136 \\ -15 \\ \hline 122 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 277 \\ \times 4 \\ \hline 68 \\ -15 \\ \hline 53 \end{array}$$

$$(a-b)(a-b+15) = 17 \cdot 2^5$$
$$34 \quad a-b=34$$

$$17 \cdot 2^{k+1} = 2^5 - 15$$

$$a-b=17$$
$$a+b=40$$

$$a = \frac{17+40}{2}$$
$$a-b=34$$

$$MT = \frac{1}{2} KN$$

$$AN = \frac{1}{2} DM \quad MT = \frac{1}{4} DM$$

$$a-b=17 \quad -15$$
$$34-15$$

$$\frac{1x}{27}$$

$$a-b=17$$
$$a+b=40$$

$$(a-b)(a-b+15) = 17 \cdot 2^5$$
$$k=17 \cdot 2^5 - 15$$

$$2 \cdot 17 = 2^5 - 15$$

$$B$$

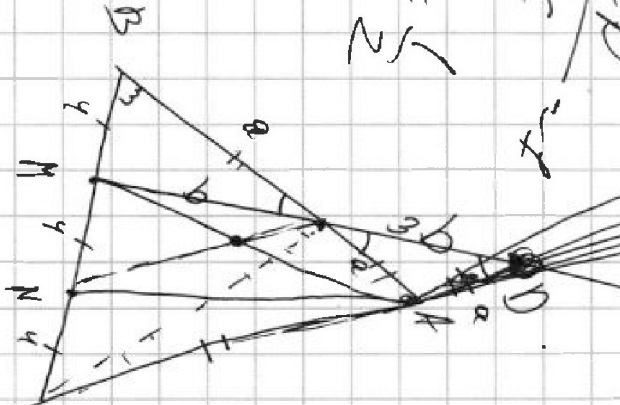
$$\sin \alpha = \frac{\sqrt{5}}{5}$$
$$\sin^2 \alpha = \frac{1}{5}$$

$$\frac{1}{5} = 1 - 2 \sin^2 \alpha$$

$$\cos^2 \alpha = \sin^2 \alpha = 1 - 2 \sin^2 \alpha$$



$$\frac{4D}{DC} = 1$$
$$\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}$$



$$a \cdot h_1 = q - a$$
$$q = h_1 + a$$
$$a - b = 15$$
$$a - b + q = 0$$
$$a - b + q - a$$

$$T \cdot h_1$$

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



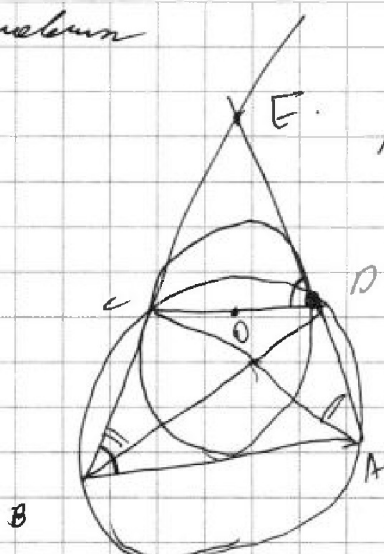
На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
из

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

черновик



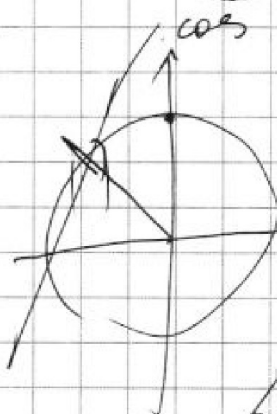
$$\min(ED + DO)$$

$$BE = 10$$

$$6 - 6 - 2r$$

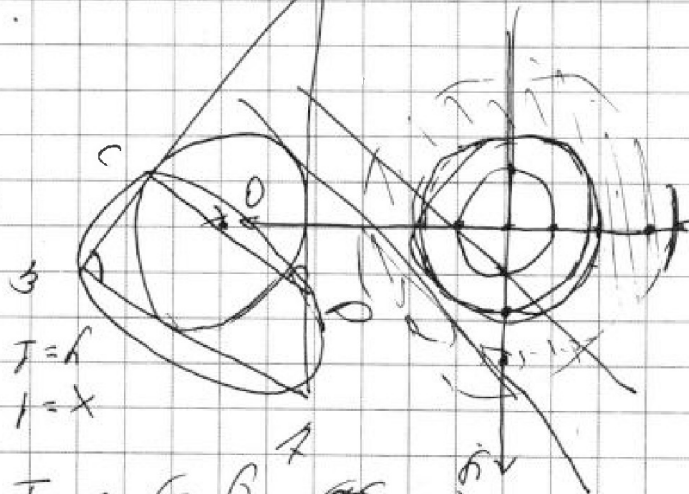
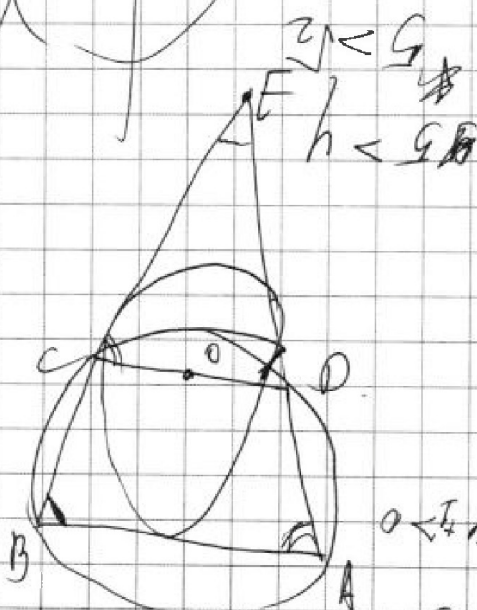
$$3 < 1 + 2\sqrt{2} < 4$$

$$5 < 2 + \sqrt{5} < 5$$



O - равноуд. от BE , $EA \perp AB = r + z$

$$z = \sqrt{2}x < r \quad r = 1 - 2 + 2$$



$$r = h$$

$$1 = x$$

$$r \leq \frac{1}{2}(r-h) + \frac{1}{2}(h-x)$$

$$0 < \frac{1}{2}h - x \leq \frac{1}{2}h + x$$

$$x - \frac{1}{2}h - x \leq \frac{1}{2}h + x$$

$$x - \frac{1}{2}h = \frac{1}{2}h$$

$$r = \sqrt{2}x$$

$$x - \frac{1}{2}h \leq \frac{1}{2}h$$

$$\sqrt{2}x \leq 9$$

$$r < \frac{1}{2}h + x \leq 9$$



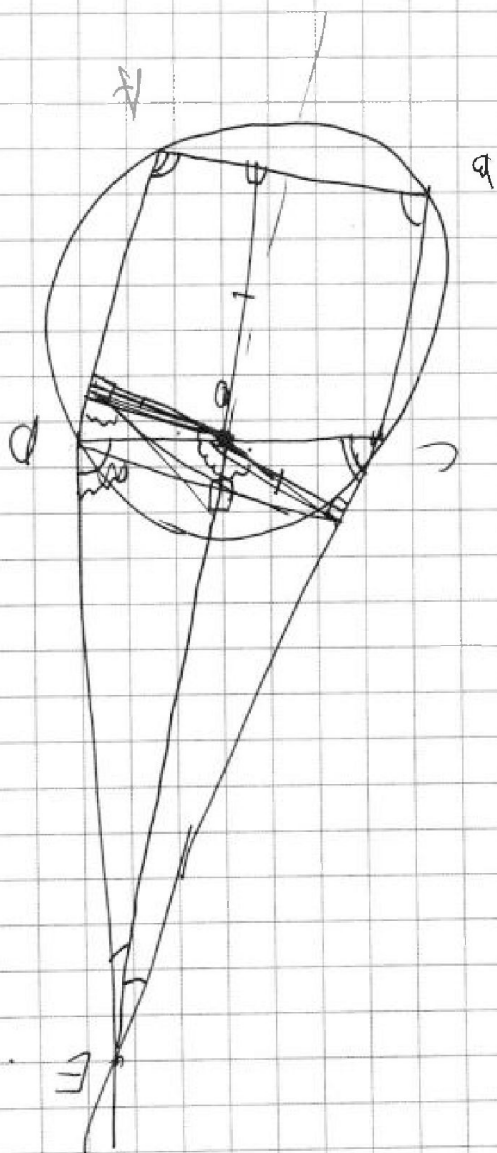


На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



Есть D - brown

< 0

$$2(x+y) < x^2 + y^2$$

$$0 < x^2 + y^2 - 2x - 2y$$