



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

9 КЛАСС. Вариант 13



1. [4 балла] Натуральные числа a, b, c таковы, что ab делится на $3^{11}7^{11}$, bc делится на $3^{18}7^{16}$, ac делится на $3^{21}7^{38}$. Найдите наименьшее возможное значение произведения abc .

2. [4 балла] Известно, что дробь $\frac{a}{b}$ несократима ($a \in \mathbb{N}, b \in \mathbb{N}$). На доске записана дробь

$$\frac{a+b}{a^2-8ab+b^2}.$$

При каком наибольшем m могло оказаться, что числитель и знаменатель дроби можно сократить на m ?

3. [5 баллов] Решите уравнение

$$\sqrt{2x^2-3x+4}-\sqrt{2x^2+x+3}=1-4x.$$

4. [4 балла] Центр окружности ω лежит на окружности Ω , диаметр AB окружности Ω касается ω в точке C так, что $AC=1$ и $BC=16$. Найдите длину общей касательной к окружностям ω и Ω .

5. [4 балла] Ненулевые действительные числа x, y, z удовлетворяют равенствам

$$3x+2y=z \quad \text{и} \quad \frac{3}{x}+\frac{1}{y}=\frac{2}{z}.$$

Найдите наибольшее возможное значение выражения $\frac{3x^2-4y^2-z^2}{x^2-6y^2}$.

6. [5 баллов] Из пункта A в пункт B выезжают одновременно велосипедист и мотоциклист. Оба они движутся с постоянной скоростью, и мотоциклист прибывает в пункт B на 2 часа раньше велосипедиста. Если бы велосипедист ехал со своей скоростью в течение того времени, что понадобилось мотоциклисту на дорогу от A к B , а мотоциклист – в течение того времени, что понадобилось велосипедисту на этот путь, то мотоциклист проехал бы на 96 километров больше. Если бы скорость каждого из них возросла на 6 км/ч, то велосипедист приехал бы в B на 1 час 15 минут позже велосипедиста. Найдите расстояние между A и B .

7. [6 баллов] Вписанная окружность ω прямоугольного треугольника ABC с прямым углом B касается его сторон CA, AB, BC в точках D, E, F соответственно. Луч ED пересекает прямую, перпендикулярную BC , проходящую через вершину C , в точке Y ; X – вторая точка пересечения прямой FY с окружностью ω . Известно, что $EX=2\sqrt{2}XY$. Найдите отношение $AD:DC$.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☒	☐	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

1

Пусть k - наименьшая степень тройки, на которую делится a , l - наименьшая степень тройки, на которую делится b , m - наименьшая степень тройки, на которую делится c ($a = 3^k \cdot k_1$, $b = 3^l \cdot l_1$, $c = 3^m \cdot m_1$, где $k_1, l_1, m_1 \in \mathbb{N}$ и $k_1 \not\equiv 0, l_1 \not\equiv 0, m_1 \not\equiv 0$)

Если ab делится на 3^n , то $k+l \geq n$, если bc делится на 3^n то $l+m \geq n$, если ac делится на 3^n , то $k+m \geq n$

Составим систему неравенств

$$\begin{cases} k+l \geq 11 \\ l+m \geq 18 \\ k+m \geq 21 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2k+l+m \geq 50 \\ l+m \geq 18 \\ k+m \geq 21 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k+l+m \geq 25 \\ l+m \geq 18 \\ k+m \geq 21 \end{cases}$$

Значит, что так как $k+l+m \geq 25$, то наименьшая степень тройки, на которую делится число abc равно 25

Значит, что так как число ac делится на 4^{38} , то число abc тоже будет делиться на 4^{38}

Значит, так как $abc : 3^{25}$ и $abc : 4^{38}$ и $\text{НОД}(3, 4) = 1$, то наименьшее значение abc равно $3^{25} \cdot 4^{38}$

Пример для $abc = 3^{25} \cdot 4^{38}$

$$\begin{aligned} a &= 4^{11} \cdot 3^7, \quad b = 3^1, \quad c = 4^{27} \cdot 3^{14}, \quad \text{тогда} \\ ab &= 4^{11} \cdot 3^{11}, \quad bc = 4^{27} \cdot 3^{15}, \quad ac = 4^{38} \cdot 3^{21}, \\ abc &= 3^{25} \cdot 4^{38} \end{aligned}$$

Ответ: наименьшее значение abc равно $3^{25} \cdot 4^{38}$

1	2	3	4	5	6	7
☐	☒	☐	☐	☐	☐	☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



2

Пусть m — наименьшее натуральное число такое, что
числитель и знаменатель дроби $\frac{a+b}{a^2-ba+b^2}$ можно сократить
на m , то есть $a+b : m$ и $a^2-ba+b^2 : m$

$$a+b : m \Leftrightarrow (a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2 : m$$

$$\begin{cases} a^2 + 2ab + b^2 : m \\ a^2 - bab + b^2 : m \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2 + 2ab + b^2 : m \\ 10ab : m \end{cases}$$

Получается, что $a+b : m$ и $10ab : m$

Пусть p — ^{наименьший} простой делитель числа m (p может быть
равен m) (или $m=1$, то $p=1$)

$10ab : m \Leftrightarrow 10ab : p$, так как p простой и $10ab : p$,
то верно следующее:

$$\begin{cases} 10 : p \\ a : p \\ b : p \end{cases}$$

~~то есть~~

$$a+b : m \Leftrightarrow a+b : p$$

~~Следовательно, что $a : p$ и $b : p$, то a~~

Рассмотрю три случая (*)

1. $a : p$

$$\begin{cases} a : p \\ ab : p \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a : p \\ b : p \end{cases}$$

но так как $\text{НОД}(a, b) = 1$ (так как дробь $\frac{a}{b}$ несократима),
или $a : p$ и $b : p$ и $\text{НОД}(a, b) = 1$, то $p=1 \Rightarrow m=1$

2. $b : p$

$$\begin{cases} b : p \\ a+b : p \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a : p \\ b : p \end{cases}$$

но так как $\text{НОД}(a, b) = 1$, или $a : p$ и $b : p$ и $\text{НОД}(a, b) = 1$,
то $p=1 \Rightarrow m=1$

3. $10 : p$

$$10 : p \Leftrightarrow \begin{cases} p=1 \\ p=2 \\ p=5 \end{cases}$$

Следовательно, что делитель m или 1 или 2 или 5 или 10
делитель $m \Rightarrow$ или $m > 1$, то $m = 2^k \cdot 5^l$, где $k, l \in \mathbb{N} \cup \{0\}$
~~Рассмотрю, что (то есть для любого простого p , делителя~~
делитель m , верно, что $10 : p \Rightarrow \begin{cases} p=2 \\ p=5 \end{cases}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☒	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



5

$$\sqrt{2x^2-3x+4} - \sqrt{2x^2+x+3} = 1-4x \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (2x^2-3x+4) + (2x^2+x+3) - 2\sqrt{(2x^2-3x+4)(2x^2+x+3)} = 1+6x^2-8x \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (4x^2-2x+7) - (1+6x^2-8x) = 2\sqrt{(2x^2-3x+4)(2x^2+x+3)} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -12x^2+6x+6 = 2\sqrt{(2x^2-3x+4)(2x^2+x+3)} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -6x^2+3x+3 = \sqrt{(2x^2-3x+4)(2x^2+x+3)} *$$

$$* (2x^2-3x+4)(2x^2+x+3) = 4x^4-6x^3+8x^2+2x^3-3x^2+4x+6x^2-9x+12 =$$
$$= 4x^4-4x^3+11x^2-5x+12$$

$$-2x^2+x+1 = \sqrt{4x^4-4x^3+11x^2-5x+12} \Rightarrow 4x^4+x^2+1-4x^3+2x-4x^2 =$$

$$= 4x^4-4x^3+11x^2-5x+12 \Rightarrow -3x^2+2x+1 = 11x^2-5x+12 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 14x^2-4x+11 = 0$$

$$-6x^2+3x+3 = \sqrt{4x^4-4x^3+11x^2-5x+12} \Rightarrow 36x^4+9x^2+9-36x^3-36x^2+18x =$$
$$= 36x^4-36x^3-24x^2+18x+9 = 4x^4-4x^3+11x^2-5x+12 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow 32x^4-32x^3-36x^2+23x-3 = 0$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

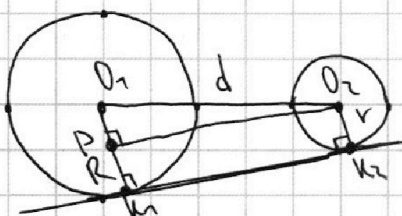
1 2 3 4 5 6 7
☐ ☐ ☐ ☒ ☐ ☐ ☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

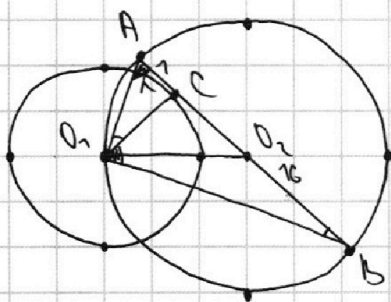


4



найти формулу для длины
общей внешней касательной
двух окружностей

пусть O_1, O_2 - центры данных окружностей, d - расстояние
между центрами, R и r - радиусы этих окружностей,
проведем перпендикуляры O_1P к O_2K_2 , тогда $PO_2K_2K_1$ -
прямоугольник $\Rightarrow PO_2 = K_1K_2$, $PO_2^2 = O_1O_2^2 - O_1P^2 =$
 $= d^2 - (R-r)^2$ (по ТП теорема Пифагора)



Дано:

$AC = 1$

$BC = 16$

Найти:

длину общей
касательной

Решение:

~~Пусть $\angle ADO_1 = \alpha$, тогда $\angle ADO_2 = 90^\circ - \alpha$, так как AB - диаметр, $\angle O_1CA = 90^\circ$, так как AB - касательная, C - точка касания, пусть $\angle BAO_1 = \alpha$, тогда $\angle AOC = 90^\circ - \alpha$, $\angle COB = \alpha$, $\angle CDO_1 = 90^\circ - \alpha$~~
 ~~$\sin 90^\circ - \alpha = \frac{O_1A}{AB} = \frac{AC}{O_1A} \Rightarrow O_1A^2 = AB \cdot AC =$~~
 ~~$= 1 \cdot (1+16) = 17$~~
 ~~$\tan \alpha = \frac{OC}{AC} = \tan 90^\circ - \alpha = \frac{O_1C}{O_1A} \Rightarrow$~~
 ~~$\Rightarrow O_1C^2 = AC \cdot CB = 1 \cdot 16 = 16$~~
 ~~$\sin \alpha = \frac{O_1B}{AB} = \frac{CB}{O_1B} \Rightarrow O_1B^2 = AB \cdot CB =$~~
 ~~$= 16 \cdot (1+16) = 16 \cdot 17 = 272$~~

найдем, что O_1O_2 - медиана $\triangle O_1AB$ (т.к. AB - диаметр, и O_2 - центр) $\Rightarrow O_1O_2 = \frac{AB}{2}$ (по теореме о медиане прямо $\triangle$) $\Rightarrow O_1O_2^2 = \frac{AB^2}{4} =$
 $= \frac{17}{4}$

Найдем, что радиус ω равен $O_1C = 4$, радиус Ω равен $\frac{AB}{2} = \frac{17}{2}$, расстояние между центрами O_1O_2 равно $\frac{17}{2}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☒	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



4 (продолжение)

значит длина общей касательной равна

$$\sqrt{\frac{172}{4} - \left(\frac{17}{2} - 4\right)^2} = \sqrt{\frac{172}{4} - \left(\frac{9}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{172 - 81}{4}} =$$
$$= \sqrt{\frac{(17-9)(17+9)}{4}} = \sqrt{\frac{6 \cdot 26}{4}} = \sqrt{39} = 2\sqrt{13}$$

Ответ: длина общей касательной равна $2\sqrt{13}$

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☒	☐	☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



5

по условию $x \neq 0, y \neq 0, z \neq 0$

$$\begin{cases} 3x+2y=z \\ \frac{3}{x}+\frac{2}{y}=\frac{z}{z} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x+2y=z \\ 3yz+xz=2xy \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x+2y=z \\ z=\frac{2xy}{3y+x} \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3y+x \neq 0 \\ 3x+2y=\frac{2xy}{3y+x} \\ 3x+2y=z \end{cases}$$

$$3x+2y=\frac{2xy}{3y+x} \Leftrightarrow \begin{cases} 3y+x \neq 0 \\ (3y+x)(3x+2y)=2xy \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3y+x \neq 0 \\ 3x^2+6y^2+9xy=0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3y+x \neq 0 \\ x^2+2y^2+3xy=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3y+x=0 \\ (x+2y)(x+y)=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y=0 \\ x+2y=0 \end{cases}$$

$$3x+2y=z \Leftrightarrow z^2=9x^2+4y^2+12xy$$

$$\frac{3x^2+4y^2-z^2}{x^2-6y^2} = \frac{3x^2+4y^2-(9x^2+4y^2+12xy)}{x^2-6y^2} = \frac{-6x^2-8y^2-12xy}{x^2-6y^2}$$

распространяем на общий знаменатель

1. $x+y=0$

$$\begin{aligned} x+y=0 &\Leftrightarrow y=-x \\ \frac{-6x^2-8y^2-12xy}{x^2-6y^2} &= \frac{-6x^2-8(-x)^2-12x(-x)}{x^2-6(-x)^2} = \frac{-6x^2-8x^2+12x^2}{x^2-6x^2} = \frac{-2x^2}{-5x^2} = \frac{2}{5} \end{aligned}$$

2. $x+2y=0 \Leftrightarrow x=-2y$

$$\begin{aligned} \frac{-6x^2-8y^2-12xy}{x^2-6y^2} &= \frac{-6(-2y)^2-8y^2-12(-2y)y}{(-2y)^2-6y^2} = \frac{-24y^2-8y^2+24y^2}{4y^2-6y^2} = \\ &= \frac{-8y^2}{-2y^2} = 4 \end{aligned}$$

$4 > \frac{2}{5} \Rightarrow$ минимальное значение $\frac{3x^2+4y^2-z^2}{x^2-6y^2}$ равно 4

пример

$y=1, x=-2, z=-4, 3x+2y=-6+2=-4=z, \frac{3}{x}+\frac{2}{y}=-\frac{3}{2}+1=-\frac{1}{2}=-\frac{2}{4}=\frac{z}{z},$

$$\frac{3x^2+4y^2-z^2}{x^2-6y^2} = \frac{12+4-16}{4-6} = \frac{-8}{-2} = 4$$

Ответ: 4

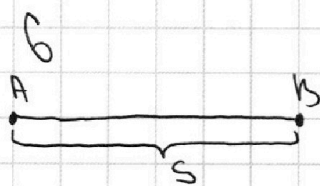
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☒	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



пусть V_1 - скорость ~~моториста~~ ^{велосипедиста}
 V_2 - скорость моториста,
 S - расстояние между A и B

время t_1 , которое потратит велосипедист на путь от A до B, равно $\frac{S}{V_1}$, а моторист $\frac{S}{V_2}$
 составим систему уравнений по условию

$$\begin{cases} V_1 = 2 + V_2 & (1) \\ V_1 V_2 + 96 = V_2 V_1 & (2) \\ \frac{S}{V_1 + 6} = \frac{S}{4} + \frac{S}{V_2 + 6} & (3) \end{cases}$$

$$(1): V_1 = 2 + V_2 \Leftrightarrow S V_2 = 2 V_1 V_2 + S V_1 \Leftrightarrow 2 V_1 V_2 = S V_2 - S V_1 \quad (5)$$

$$(2): \frac{S}{V_1 + 6} = \frac{S}{4} + \frac{S}{V_2 + 6} \Leftrightarrow S(V_2 + 6) = \frac{S}{4}(V_2 + 6)(V_1 + 6) + S(V_1 + 6) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow S V_2 + 6 S = S V_1 + 6 S + \frac{S}{4}(V_2 + 6)(V_1 + 6) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow S V_2 = S V_1 + \frac{S}{4}(V_2 + 6)(V_1 + 6) \quad (4)$$

~~Умножим (1) на (4):~~

$$(4) - \text{умножим (1)}: 0 = \frac{S}{4}(V_2 + 6)(V_1 + 6) - 2 V_1 V_2 \Leftrightarrow 2 V_1 V_2 = \frac{S}{4}(V_2 + 6)(V_1 + 6) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 8 V_1 V_2 = S(V_1 + 6)(V_2 + 6) \Leftrightarrow 3 V_1 V_2 = 180 + 30 V_1 + 30 V_2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow V_1 V_2 = 60 + 10 V_1 + 10 V_2 \quad (6)$$

$$(2): V_1 \frac{S}{V_2 + 6} + 96 = V_2 \frac{S}{V_1 + 6} \Leftrightarrow S V_1^2 + 96 V_1 V_2 = S V_2^2 \Leftrightarrow 96 V_1 V_2 = S V_2^2 - S V_1^2 \quad (6)$$

$$(6): \frac{96 V_1 V_2}{2 V_1 V_2} = \frac{S(V_2 - V_1)(V_2 + V_1)}{S(V_2 - V_1)} \Leftrightarrow 48 = V_2 + V_1 \Leftrightarrow V_1 = 48 - V_2 \quad (7)$$

подставим (7) в (6): $V_2(48 - V_2) = 60 + 10(V_1 + V_2) = 60 + 10 \cdot 48 = 540 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow V_2^2 - 48 V_2 + 540 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} V_2 = 30 \\ V_2 = 18 \end{cases} \text{ (по теореме Виета)}$$

так как $V_1 < V_2$, то $V_1 = 18$ (км/ч), $V_2 = 30$ (км/ч)

$$(5): 2 V_1 V_2 = S(V_2 - V_1) \quad \text{км} \quad V_1 = 18, V_2 = 30, \text{ то}$$

$$S = \frac{2 V_1 V_2}{V_2 - V_1} = \frac{2 \cdot 18 \cdot 30}{30 - 18} = \frac{2 \cdot 18 \cdot 30}{12} = 90 \text{ (км)}$$

Искомое расстояние между A и B равно 90 км

Ответ: 90 км



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☒	☒	☐	☐	☐	☐	☐



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$32 - 32 - 36 + 23 - 3 \quad 20 \cdot 36 = 62$$

$$32132 - 36 + 23 - 3$$

$$64 - 62$$

$$32 - 32 - 36 \quad 23 - 3$$

$$-2 \quad 32 \quad 32 \quad 28$$

$$322 = 64 \quad 64 - 36 = 28$$

$$64$$

$$28$$

$$3122$$

$$23 - 312 =$$

$$32 - 32 - 36 \quad 23$$

$$-2 \quad 32 - 36 \quad 156$$

$$-64 + 90.2 = 156$$

$$192 - 36 = 156$$

$$156$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☒	☒	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$\sqrt{2x^2-3x+4} - \sqrt{2x^2+x+3} = 1-4x \quad (*)$$

$$2x^2-3x+4 + 2x^2+x+3 - 2\sqrt{(2x^2-3x+4)(2x^2+x+3)} = 1+16x^2-8x$$

$$4x^2-2x+7 - 2\sqrt{(2x^2-3x+4)(2x^2+x+3)} = 1+16x^2-8x$$

$$2\sqrt{(2x^2-3x+4)(2x^2+x+3)} = -4x^2+5x+6$$

$$(2x^2-3x+4)(2x^2+x+3) = \frac{3}{16}x^2 - \frac{6}{16}x + \frac{6}{16}$$

$$= 4x^4 - 6x^3 + 8x^2 + 12x^3 - 3x^2 + 4x + 8x^2 - 9x + 12 =$$

$$= 4x^4 - 4x^3 + 11x^2 - 5x + 12 \quad - 9x^2$$

$$\sqrt{4x^4 - 4x^3 + 11x^2 - 5x + 12} = 16x^4 + 9x^2 + 9 - 24x^3 - 24x^2 + 16x$$

$$4x^4 - 4x^3 + 11x^2 - 5x + 12 = 16x^4 + 9x^2 + 9 - 24x^3 - 24x^2 + 16x$$

$$12x^4 - 20x^3 = 2x^2 \quad -15-11+16x$$

$$12x^4 - 20x^3 - 2x^2 + 23x + 12 = 0$$

$$12-20-26+23+12$$

$$4 \cdot 46 \cdot 44$$

$$2x^2-3x+4 + 2x^2+x+3 = (4x^2-2x+7) -$$

$$1+16x^2-8x$$

$$-11x^2+6x+6$$

$$(-2x^2+x+7)^2 = 4x^4+x^2+1-4x^3-4x^2+7x$$

$$4x^4-11x^2+6x+6 - 2(x^2-\frac{1}{4})^2$$

$$\frac{1}{16}-2$$

$$632 = 3^3 \cdot 9 \cdot 26 = 24^3$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☒	☒	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



V_1 - ~~свободная~~ ~~свободная~~ ~~свободная~~
 V_2 - ~~свободная~~ ~~свободная~~ ~~свободная~~
 t_1 - ~~прямая~~ ~~прямая~~ ~~прямая~~, t_2 - ~~прямая~~ ~~прямая~~ ~~прямая~~

$$\frac{S}{V_1} = \frac{S}{V_2} + 1,25$$

$$t_1 = 2t_2$$

$$V_1 \cdot t_1 \cdot gG = V_2 \cdot t_2 \quad \frac{S}{4} (V_1 V_2 + 6V_1 + 6V_2 + 36)$$

$$\frac{S}{V_1 \cdot G} = \frac{S}{V_2 + G} + 1,25$$

$$\frac{5,63}{42} \cdot 5 \cdot 9$$

$$SV_2 = 5V_1 + 2V_1 V_2$$

$$SV_2 + 6S = 5V_1 + 6S + 1,25(V_1 + G)(V_2 + G) =$$

$$\Rightarrow SV_2 = 5V_1 + 45 + \frac{5}{4}V_1 V_2 + \frac{15}{2}V_1 + \frac{15}{2}V_2$$

$$2V_1 V_2 = 45 + \frac{5}{4}V_1 V_2 + \frac{15}{2}V_1 + \frac{15}{2}V_2$$

$$\frac{3}{4}V_1 V_2 = 45$$

$$3V_1 V_2 = 180 + 30V_1 + 30V_2$$

$$V_1 V_2 = 60 + 10V_1 + 10V_2$$

$$SV_2 = 5V_1 + 2V_1 V_2$$

$$\frac{S}{V_1} \cdot \frac{S}{V_2} + gG = \frac{S}{V_2} \cdot \frac{S}{V_1}$$

$$SV_1 + gGV_1 V_2 = SV_2$$

$$\frac{S}{V_1} \cdot \frac{S}{V_2} = gG + \frac{S}{V_2} \cdot \frac{S}{V_1}$$

$$SV_2^2 = gG \cdot V_1 + SV_1^2$$

$$SV_2^2 - SV_1^2 = gGV_1 V_2$$

$$SV_2 - SV_1 = 2V_1 V_2$$

$$\frac{S}{V_2 + G} = \frac{S}{V_1 + G}$$

$$\frac{S}{V_2 + G} = \frac{S}{V_1 + G}$$

$$\frac{S}{V_2 + G} = \frac{S}{V_1 + G}$$

$$\frac{S}{V_2 + G} = \frac{S}{V_1 + G}$$

$$\frac{S}{V_2 + G} = \frac{S}{V_1 + G}$$

$$\frac{S}{V_2 + G} = \frac{S}{V_1 + G}$$

$$\frac{S}{V_2 + G} = \frac{S}{V_1 + G}$$

$$\frac{S}{V_2 + G} = \frac{S}{V_1 + G}$$

$$\frac{S}{V_2 + G} = \frac{S}{V_1 + G}$$

$$\frac{S}{V_2 + G} = \frac{S}{V_1 + G}$$

$$\frac{S}{V_2 + G} = \frac{S}{V_1 + G}$$

$$\frac{S}{V_2 + G} = \frac{S}{V_1 + G}$$

$$\frac{S}{V_2 + G} = \frac{S}{V_1 + G}$$

$$V_1 (48 - V_1) = 60 + 10(V_1) + 10(48 - V_1)$$

$$48V_1 - V_1^2 = 60 + 10V_1 + 480 - 10V_1$$

$$540 =$$

$$V_1^2 - 48V_1 + 540 = 0$$

4

$$\frac{540 \pm 4}{-52} = 135$$

$$\frac{520}{20} = 26$$

$$\frac{48}{20} = 2,4$$

$$\frac{240}{20} = 12$$

$$\frac{135}{20} = 6,75$$

$$\frac{5}{20} = 0,25$$

$$\frac{245}{20} = 12,25$$

$$\frac{45,3}{20} = 2,265$$

$$\frac{15,9}{20} = 0,795$$

$$\frac{135}{20} = 6,75$$

$$\frac{5}{20} = 0,25$$

$$\frac{245}{20} = 12,25$$

$$\frac{45,3}{20} = 2,265$$

$$\frac{15,9}{20} = 0,795$$

$$\frac{135}{20} = 6,75$$

$$\frac{5}{20} = 0,25$$

$$\frac{245}{20} = 12,25$$

$$\frac{45,3}{20} = 2,265$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☒	☒	☐	☐	☐	☐	☐



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\frac{S}{v_1 + 6} = \frac{S}{v_2 + 6} + \frac{5}{4}$$

$$\frac{S}{v_1} = \frac{S}{v_2} + 2$$

$$\frac{1236}{120} = \frac{5}{120}$$

$$S(v_2 + 6) = S(v_1 + 6) + \frac{5}{4}(v_1 + 6)(v_2 + 6)$$

$$Sv_2 + 6S = Sv_1 + 6S + \frac{5}{4}(v_1 + 6)(v_2 + 6)$$

$$Sv_2 = Sv_1 + 2v_1v_2$$

$$2v_1v_2 = \frac{5}{4}(v_1 + 6)(v_2 + 6)$$

$$8v_1v_2 = 5(v_1v_2 + 3v_1 + 3v_2 + 6)$$

$$3v_1v_2 = 15v_1 + 15v_2 + 30 \Rightarrow v_1v_2 = 5v_1 + 5v_2 + 10$$

$$\frac{S}{v_1} \cdot \frac{S}{v_2} + 9S = \frac{S}{v_2} \cdot \frac{S}{v_1}$$

$$Sv_1^2 + 9Sv_1v_2 = Sv_2^2$$

$$9Sv_1v_2 = Sv_2^2 - Sv_1^2$$

$$2v_1v_2 = Sv_2 - Sv_1$$

$$4v_1v_2 = v_2 + v_1$$

$$v_1 = 48 - v_2$$

$$v_2(48 - v_2) = 60 + 10 \cdot 48$$

$$v_2^2 - 48v_2 + 540 = 0$$

$$48 : 2 = 24$$

$$48 - 2 = 46$$

$$\frac{v_2 - v_1 + v_2 + v_1}{v_2 - v_1}$$

$$54 : 2 = 27$$

$$480 : 60 =$$

$$540 = 10 \cdot 2 \cdot 27$$

$$4 \cdot 5 \cdot 27$$

$$\frac{48}{2} = 24$$

$$32 : 6 =$$

$$\frac{1540}{2160}$$

$$\frac{36}{2} =$$

$$\frac{48 - 24}{2} =$$

$$18, 30$$

$$2v_1v_2 = Sv_2 - Sv_1$$

$$\frac{90}{24} = \frac{90}{36} + \frac{5}{4}$$

$$\frac{60}{30} = 2 + \frac{60}{18}$$

$$\frac{45}{12} = \frac{15}{12} + \frac{8}{12}$$

$$\frac{24}{9} = 2 + \frac{40}{9}$$

$$\frac{40}{9} = 4 + \frac{16}{9}$$

$$\frac{40}{18} = \frac{20}{9} = 2 + \frac{20}{9}$$

$$\frac{24}{9} = 2 + \frac{6}{9}$$

$$S(40 - 18) =$$

$$S \cdot 12 = 2 \cdot 18 \cdot 30$$

$$S \cdot 4 = 2 \cdot 18 \cdot 10$$

$$S = 18 \cdot 5 =$$

$$2 \cdot 18 \cdot 30$$

$$3 \cdot 18 \cdot 46 = 5 \cdot 30 \cdot 80 = 2 \cdot 18 \cdot 30 + 60 \cdot 18$$

$$150 = 96 + 54$$

$$60 \cdot 12 = 2 \cdot 18 \cdot 30$$

$$50 + 30 = 80$$

$$2 \cdot 18 \cdot 30 = S \cdot 12 = 2 \cdot 18 \cdot 30$$

$$S \cdot 8 = 18 \cdot 30$$

$$S \cdot 3 = 18 \cdot 5$$

$$18 \cdot 5 =$$

$$4 \cdot 18 = 10 \cdot 2 \cdot 18$$

$$10 \cdot 9$$

$$40$$

$$50$$

$$\frac{1236}{1080}$$

$$2 \cdot 18 \cdot 30$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☒	☒	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$1^2 + k^2 = 16 + m^2$$

$$k^2 + m^2 = 14^2$$

$$k^2 - 1^2 = m^2 - 16$$

$$k^2 + 16 - 1^2 = m^2$$

$$m^2 = 255 + 14 = 269$$

$$9k^2 + 255 = 269$$

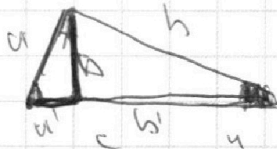
$$2k^2 = 34$$

$$k^2 = 17$$

$$k = \sqrt{17}$$

$$\frac{17}{2} - \frac{1}{2} = \frac{9}{2}$$

$$\frac{2a^2 + 2b^2 - c^2}{4}$$



$$\frac{a}{c} = \frac{a'}{b'}$$

$$\frac{h}{a'} = \frac{b'}{a'}$$

$$\frac{h}{a'} = \frac{b'}{a'}$$

$$\frac{h}{a'} = \frac{b'}{a'}$$

$$\frac{h}{a'} = \frac{b'}{a'}$$

$$\frac{h}{a'} = \frac{b'}{a'}$$

$$\frac{h}{a'} = \frac{b'}{a'}$$

$$\frac{h}{a'} = \frac{b'}{a'}$$

$$\frac{h}{a'} = \frac{b'}{a'}$$

$$\frac{h}{a'} = \frac{b'}{a'}$$

$$\frac{h}{a'} = \frac{b'}{a'}$$

$$\frac{h}{a'} = \frac{b'}{a'}$$

$$\frac{h}{a'} = \frac{b'}{a'}$$

$$\frac{h}{a'} = \frac{b'}{a'}$$

$$\frac{h}{a'} = \frac{b'}{a'}$$

$$\frac{h}{a'} = \frac{b'}{a'}$$

$$\frac{h}{a'} = \frac{b'}{a'}$$

$$\frac{h}{a'} = \frac{b'}{a'}$$

$$\frac{h}{a'} = \frac{b'}{a'}$$

$$\frac{h}{a'} = \frac{b'}{a'}$$

$$\frac{h}{a'} = \frac{b'}{a'}$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☒	☒	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{aligned} a &= 4^{\frac{1}{2}} \cdot 5^{\frac{1}{2}} \cdot 11^{\frac{1}{2}} \\ c &= 4^{\frac{1}{2}} \cdot 5^{\frac{1}{2}} \cdot 11^{\frac{1}{2}} \\ b &= 4^{\frac{1}{2}} \cdot 5^{\frac{1}{2}} \cdot 11^{\frac{1}{2}} \\ b &= 4^{\frac{1}{2}} \cdot 5^{\frac{1}{2}} \cdot 11^{\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a &= 4^{\frac{1}{2}} \cdot 5^{\frac{1}{2}} \cdot 11^{\frac{1}{2}} \\ c &= 4^{\frac{1}{2}} \cdot 5^{\frac{1}{2}} \cdot 11^{\frac{1}{2}} \\ b &= 158 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a:b &= 11 \\ c:b &= 18 \\ a:b:c &= 21 \\ a &= 11-b \\ c &= 18-b \\ 21-b &= 21 \\ b &= 8 \end{aligned}$$

$$a:b:m$$

$$a^2 - 2ab + b^2 : m$$

$$(a+b)^2 : m$$

$$a^2 + 2ab + b^2 : m$$

$$10ab : m$$

$$10:p \quad p=2, \quad p=5$$

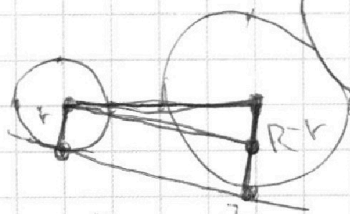
$$\frac{AC}{a+c}$$

$$9+49=16$$

$$\sqrt{2x^2-3x+4}$$

$$(2x-2)(x-2)$$

$$\frac{a+c}{a+b} = \frac{a+b}{a+c}$$

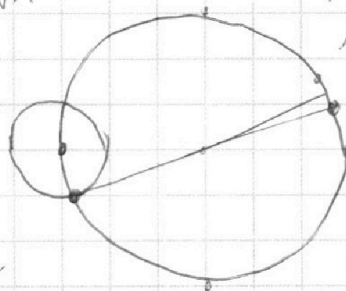


$$d^2 = (R-r)^2$$

$$\frac{a'}{a} = \frac{c}{b} \quad ab=ac$$

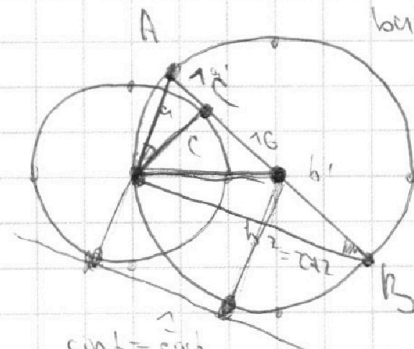
$$\sin k = \cos 90 - k$$

$$a' =$$



$$14^2 = 1^2 + k^2 = 16^2 + m^2$$

$$\frac{b}{b'} = \frac{a'}{a} \quad b'a = a'b'$$



$$\sin k = \cos k$$



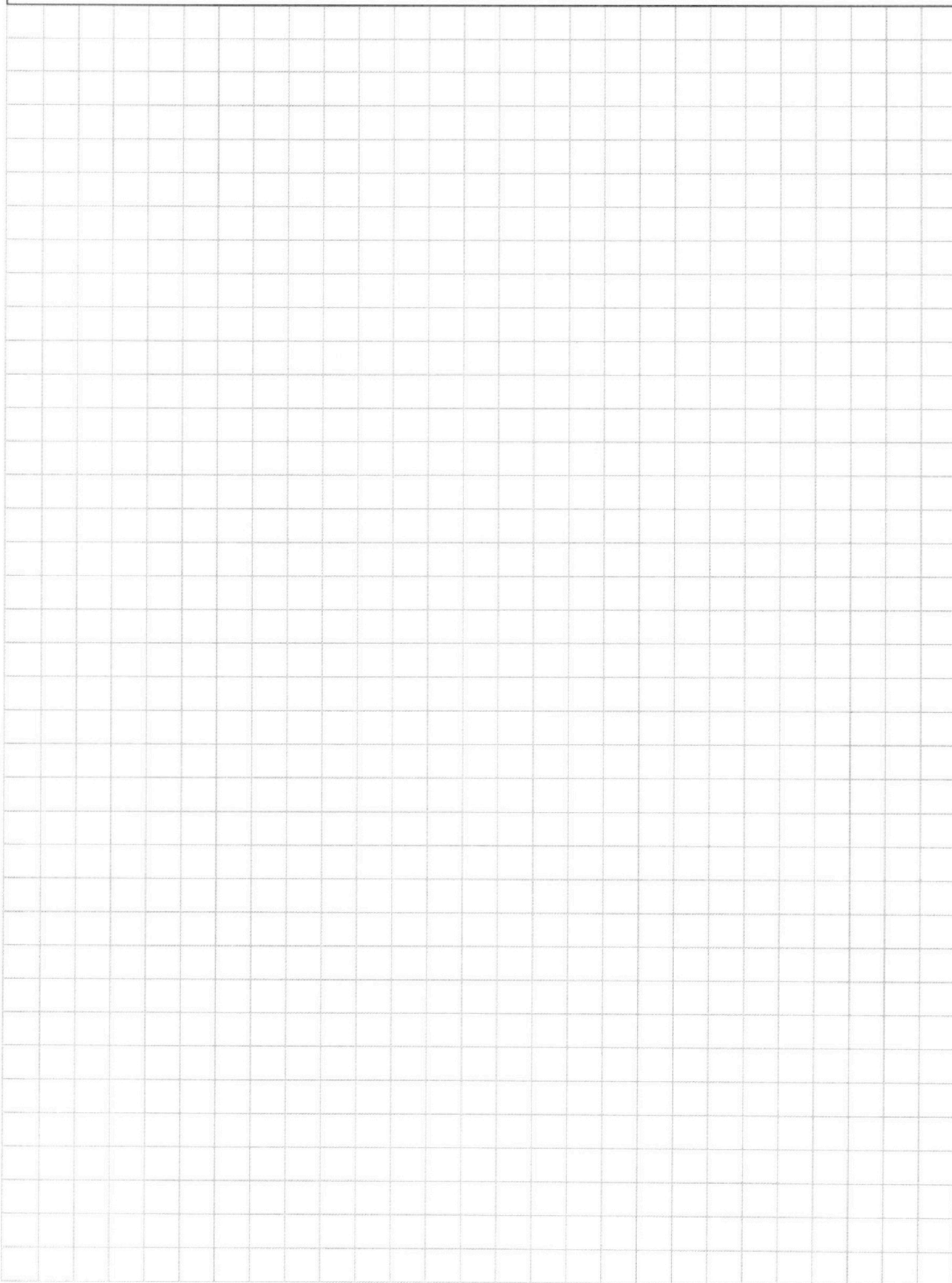
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!





На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

