



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

9 КЛАСС. Вариант 14



1. [4 балла] Натуральные числа a , b , c таковы, что ab делится на $3^{14}7^{13}$, bc делится на $3^{19}7^{17}$, ac делится на $3^{23}7^{42}$. Найдите наименьшее возможное значение произведения abc .

2. [4 балла] Известно, что дробь $\frac{a}{b}$ несократима ($a \in \mathbb{N}$, $b \in \mathbb{N}$). На доске записана дробь

$$\frac{a+b}{a^2-9ab+b^2}.$$

При каком наибольшем m могло оказаться, что числитель и знаменатель дроби можно сократить на m ?

3. [5 баллов] Решите уравнение

$$\sqrt{3x^2-5x+6}-\sqrt{3x^2+x+1}=5-6x.$$

4. [4 балла] Центр окружности ω лежит на окружности Ω , диаметр AB окружности Ω касается ω в точке C так, что $AC=1$ и $BC=25$. Найдите длину общей касательной к окружностям ω и Ω .

5. [4 балла] Ненулевые действительные числа x , y , z удовлетворяют равенствам

$$5x-y=3z \quad \text{и} \quad \frac{8}{x}+\frac{1}{y}=\frac{15}{z}.$$

Найдите наименьшее возможное значение выражения $\frac{25x^2-y^2-z^2}{y^2+3z^2}$.

6. [5 баллов] Из пункта A в пункт B выезжают одновременно велосипедист и мотоциклист. Оба они движутся с постоянной скоростью, и мотоциклист прибывает в пункт B на 1 час раньше велосипедиста. Если бы велосипедист ехал со своей скоростью в течение того времени, что понадобилось мотоциклисту на дорогу от A к B , а мотоциклист – в течение того времени, что понадобилось велосипедисту на этот путь, то мотоциклист проехал бы на 49 километров больше. Если бы скорость каждого из них возросла на 7 км/ч, то велосипедист приехал бы в B на 36 минут позже велосипедиста. Найдите расстояние между A и B .

7. [6 баллов] Вписанная окружность ω прямоугольного треугольника ABC с прямым углом B касается его сторон CA , AB , BC в точках D , E , F соответственно. Луч ED пересекает прямую, перпендикулярную BC , проходящую через вершину C , в точке Y ; X – вторая точка пересечения прямой FY с окружностью ω . Известно, что $EX=\sqrt{2}XY$. Найдите отношение $AD:DC$.



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☒	☐	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

✓ 1

Если ab делится на $3^{14} \cdot 7^{13}$, то
в разложении ab на множители
есть $3^{14} \cdot 7^{13}$, а значит
для bc и ac . Перемножив
 $ab \cdot bc \cdot ac$, мы в разложении
этого числа на множители
будем $3^{14+13+14} \cdot 7^{13+19+17} = 3^{41} \cdot 7^{49}$

$$ab \cdot bc \cdot ac = a^2 b^2 c^2$$

$$abc = \sqrt{a^2 b^2 c^2}$$

значит abc делится на

$$3^{\frac{41}{2}} \cdot 7^{\frac{49}{2}} = 3^{20} \cdot 7^{24}$$

натуральное
Наименьшее число, деленное

на $3^{20} \cdot 7^{24}$ — $3^{20} \cdot 7^{24}$ (a, b, c — натуралы)

Ответ: $3^{20} \cdot 7^{24}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☒	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



N 2

Заметим, что градус ^{максимум} многочлена
сопоставим на канонический
одному элементу множеству
и знаменателю.

~~Выводим~~ его по алгоритму
Евклида

$$\text{НОД}(a+b, a^2 - \overset{1-10ab^2}{ab} + b^2) = (a+b, a - 11ab)$$

Мы взяли из правой части
 $(a+b)$ при этом из НОД не

изменился, заметим, что
 $\text{НОД}(a, -b) = \text{НОД}(a, b)$

$$\text{НОД}(a+b, -11ab) = \text{НОД}(a+b, 11ab)$$

Пусть a, b делится на простое,
тогда a или b делится на p .

Пусть это a , но тогда b на него
не делится, иначе a сократится.

Сколько из них делится на p , а другое - нет.

Значит и их сумма не делится.



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☒	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Продолжение.

аналогично если в делится
на р. Значит $\text{НОД}(a+b, ab) = 1$,

если a и b взаимно просты
 $a+b$ не имеет общих множителей с
 ab , но по лемме деления Пр. 11,
получается $\text{НОД}(a+b, ab) = 1$
и $m = 11$

Пример $a = 5$ $b = 6$

$$\frac{5+6}{5^2 - 9 \cdot 5 \cdot 6 + 6^2} = \frac{11}{-209} = -\frac{1}{19}$$

Ответ: 11

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☒	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\sqrt{3x^2 - 5x + 6} - \sqrt{3x^2 + x + 1} = 5 - 6x \quad | \cdot (\sqrt{3x^2 - 5x + 6} + \sqrt{3x^2 + x + 1})$$

$$\sqrt{3x^2 - 5x + 6}^2 - \sqrt{3x^2 + x + 1}^2 = (5 - 6x)(\sqrt{3x^2 - 5x + 6} + \sqrt{3x^2 + x + 1})$$

$$-3x^2 - 5x + 6 - 3x^2 - x - 1 = 5(-6x + 5)(\sqrt{3x^2 - 5x + 6} + \sqrt{3x^2 + x + 1})$$

$$-6x + 5 = (-6x + 5)(\sqrt{3x^2 - 5x + 6} + \sqrt{3x^2 + x + 1})$$

Тогда переносим в левую часть, так как
 $3x^2 - 5x + 6$, $3x^2 + x + 1$ — многочлены

при заданных значениях x ,
 так как $D = 25 - 4 \cdot 3 \cdot 6 < 0$ и $D = 1 - 4 \cdot 3 \cdot 1 < 0$, то корни

нет, и старший коэффициент положительный,

$$0 = (-6x + 5)(\sqrt{3x^2 - 5x + 6} + \sqrt{3x^2 + x + 1} - 1)$$

Правая часть выражения равна 0

при $(-6x + 5) = 0$ или $(\sqrt{3x^2 - 5x + 6} + \sqrt{3x^2 + x + 1} - 1) = 0$
 $-6x + 5 = 0$ при $x = \frac{5}{6}$

$$\sqrt{3x^2 - 5x + 6} = \sqrt{3\left(x - \frac{5}{6}\right)^2 + 3\frac{11}{12}} > 1, \sqrt{3x^2 + x + 1} > 0,$$

$$\text{значит } \sqrt{3x^2 - 5x + 6} + \sqrt{3x^2 + x + 1} - 1 > 0$$

Получается $x = \frac{5}{6}$

Ответ: $\frac{5}{6}$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☒	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



Продолжение

$$OO'^2 = O'C'^2 + OC'^2$$

$$OC = \sqrt{OO'^2 - O'C'^2} = 4$$

И

$$OC = \sqrt{13^2 - 12^2}$$

$$OC = \sqrt{25} = 5 \Rightarrow OC = 5$$

Проведем окружность касательную
 DE на ω и E на Ω

Окружность перпендикулярна ω
и O на $O'E$. Получается про

прямоугольник $DEKO$

Углы $\angle ODE, \angle DEK$ равны 90° между
радиусом и касательной.

$\angle EKO = 90^\circ$ перпендикуляр к $O'E$

$$DE = KO = \sqrt{OO'^2 - KO'^2} \text{ по теор. Пифагора.}$$

$$OO' = 13 \quad KO' = 13 - EK = 13 - OD = 13 - 5 = 8$$

$$DE = KO = \sqrt{13^2 - 8^2} = \sqrt{169 - 64} = \sqrt{105}$$

Ответ. $\sqrt{105}$

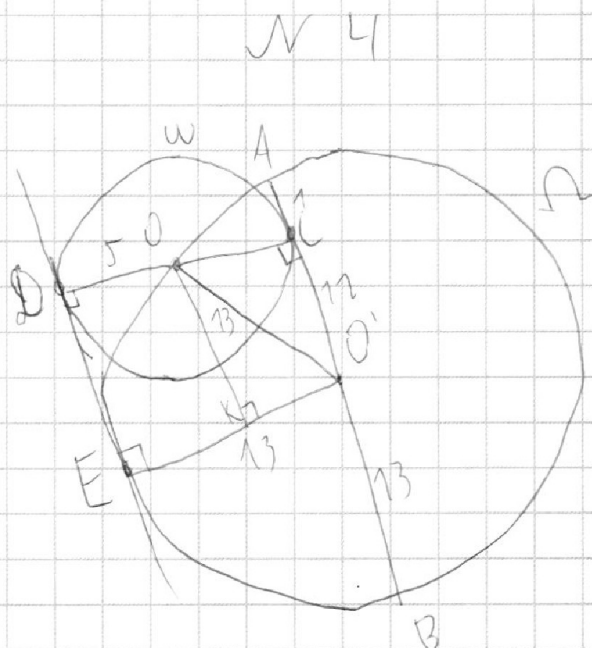
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☒	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



Пусть O, O' - центры ω и Ω сооснов.
Известно, ~~тогда~~

AB - диаметр Ω равен $AC + CB = 1 + 25 = 26$,

значит радиус $O'A = \frac{26}{2} = 13$

$O'O = 13$ - тоже радиус Ω

$O'C$ - касательная к ω в точке C ,

значит она перпендикулярна

радиусу OC по теореме

Пифагора $OO'^2 = OC^2 + CO'^2$

$CO'^2 = AO' - AC = 13 - 1 = 12$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☒	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

умножим

$$\frac{8}{x} + \frac{1}{y} = \frac{15}{2} \quad \text{и} \quad 5x - y = 3z$$

$$\left(\frac{8}{x} + \frac{1}{y}\right)(5x - y) = \frac{15}{2} \cdot 3z$$

$$40 - \frac{8y}{x} - 1 + \frac{5x}{y} = 45$$

$$6 = \frac{5x}{y} - \frac{8y}{x} \quad | \cdot \frac{x}{y}$$

$$6 \frac{x}{y} = \frac{5x^2}{y^2} - 8$$

введём замену $\frac{x}{y} = t$

$$5t^2 - 6t - 8 = 0$$

$$(5t + 4)(t - 2) = 0$$

$$\begin{cases} t = -\frac{4}{5} \\ t = 2 \end{cases}$$

введём

обратную замену

$$\begin{cases} \frac{x}{y} = -\frac{4}{5} \\ y = 2 \end{cases}$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☒	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$5x - y = 3z$$



$$5x = 3z + y$$

поделим на 5

$$\frac{8}{-x} + \frac{1}{y} = \frac{15}{z}$$



$$\frac{1}{x} = \frac{15}{z} - \frac{8}{y}$$

$$\frac{8}{5} = 5 + \frac{15y}{z} - 1 - \frac{3z}{y}$$

$$0 = \frac{12y}{5z} + \frac{15y^2}{z^2} - 3$$

введем замену $\frac{y}{z} = q$

$$0 = \frac{12}{5}q + 15q^2 - 3$$



$$0 = 12q + 75q^2 - 15$$



$$0 = q^2 - \frac{4}{15}q - \frac{1}{5}$$



$$0 = \left(q - \frac{2}{15}\right)^2 - \frac{1}{5} - \frac{4}{225}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☒	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



и б

Пусть расстояние от А до В l ,
скорость велосипедиста v
моториста v_b и v_m соответственно.
Когда ~~они~~ $\frac{l}{v_b}$ и $\frac{l}{v_m}$ - время,
за которое велосипедист и
моторист проехали от А до
В соответственно

Составим систему уравнений

$$\begin{cases} \frac{l}{v_b} - \frac{l}{v_m} = 17 \cdot l \cdot v_b \cdot v_m \\ \frac{l}{v_b} \cdot v_m - \frac{l}{v_m} \cdot v_b = 4 \text{ гсм} \cdot l \cdot v_b \cdot v_m \\ \frac{l}{v_b + 7 \frac{\text{км}}{\text{ч}}} - \frac{l}{v_m + 7 \frac{\text{км}}{\text{ч}}} = 0,6 \cdot l \cdot (v_b + 7 \frac{\text{км}}{\text{ч}}) \cdot (v_m + 7 \frac{\text{км}}{\text{ч}}) \end{cases}$$

$$\begin{cases} l v_m - l v_b = 17 \cdot l \cdot v_b \cdot v_m \\ l v_m^2 - l v_b^2 = 4 \text{ гсм} \cdot l \cdot v_b \cdot v_m \\ l (v_m + 7 \frac{\text{км}}{\text{ч}}) - l (v_b + 7 \frac{\text{км}}{\text{ч}}) = 0,6 \cdot l \cdot (v_b + 7 \frac{\text{км}}{\text{ч}}) \cdot (v_m + 7 \frac{\text{км}}{\text{ч}}) \end{cases}$$

$$l v_m^2 - l v_b^2 = 4 \text{ гсм} \cdot l \cdot v_b \cdot v_m \quad | : v_b^2$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☒	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

~~прогнозировать~~

~~$$l \frac{v_m^2}{v_b^2} - l = 49 \text{ км} \frac{v_m}{v_b}$$~~

~~Введём замену $\frac{v_m}{v_b} = k$~~

~~$$l k^2 - l - 49 \text{ км} k = 0$$~~

Введём замену

$$\frac{l}{v_m} = t_m \quad \frac{l}{v_b} = t_b$$

из треугольника $v_m = \frac{l}{t_m} \quad v_b = \frac{l}{t_b}$

$$t_b - t_m = 17$$

$$t_b \cdot \frac{l}{t_m} - t_m \frac{l}{t_b} = 49 \text{ км}$$

$$t_b = 17 + t_m$$

$$17 + t_m \frac{l}{t_m} - t_m \frac{l}{17 + t_m} = 49 \text{ км}$$

$$t_b = 17 + t_m$$

$$17 \frac{l}{t_m} + l - t_m \frac{l}{17 + t_m} = 49 \text{ км}$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

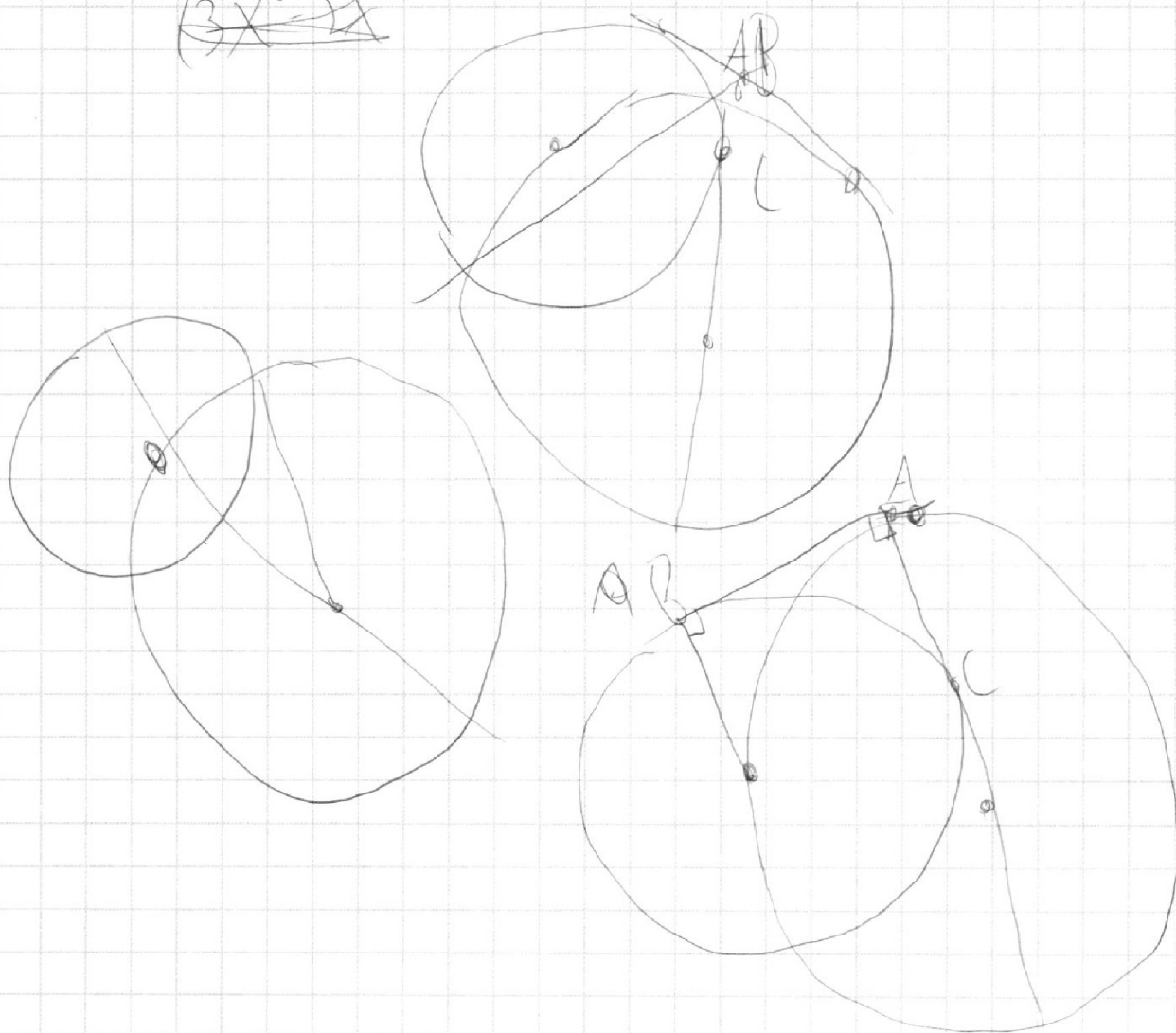
МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$(3x^2 - 5x + 6) / (3x^2 + x + 1)$$

$$9x^4 - 12x^3 + 16x^2 + x + 6$$

$$(3x^2 - 2x)$$



$$-6x + 5 = (5 - 6x) \left(\sqrt{3x^2 - 5x + 6} + \sqrt{3x^2 + x + 1} \right)$$

$$\sqrt{3x^2 - 5x + 6} = \frac{x^2 - 5x + 2}{\left(\sqrt{3}x - \frac{5}{\sqrt{3}} \right)^2 + 3}$$

