



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

9 КЛАСС. Вариант 9



1. [3 балла] Найдите все значения параметра t , при каждом из которых уравнение $x^2 + 2\sqrt{3}tx + 4t^2 - 4 = 0$ имеет два различных действительных корня, а их произведение положительно.
2. [4 балла] Натуральные числа a и b таковы, что их сумма равна 40, а значение выражения $a^2 - 2ab + b^2 + 15a - 15b$ равно $17p^5$, где p – некоторое простое число. Найдите числа a и b .
3. [5 баллов] На стороне BC треугольника ABC отмечены точки M и N так, что $BM = MN = NC$. Прямая, параллельная AN и проходящая через точку M , пересекает продолжение стороны AC за точку A в такой точке D , что $AB = CD$. Найдите AB , если $BC = 12$, $\cos(2\angle CDM) = -\frac{1}{4}$.
4. [5 баллов] В классе для занятий иностранным языком стоят три ряда парт, в каждом из которых по три парты, расположенных друг за другом. Парты рассчитаны на одного человека. Школьник хорошо видит доску в любом из следующих случаев (и только в них):
 - он сидит на первой парте в ряду,
 - ближайшая парта перед ним пуста,
 - за ближайшей партой перед ним сидит ученик меньшего роста.

Сколькими способами можно рассадить в классе 8 учеников группы так, чтобы всем было хорошо видно доску, если известно, что все школьники разного роста? Ответ дайте в виде числа или выражения, содержащего не более двух слагаемых (в слагаемые могут входить факториалы, биномиальные коэффициенты).

5. [5 баллов] Продолжение сторон BC (за точку C) и AD (за точку D) вписанного в окружность четырёхугольника $ABCD$ пересекаются в точке E . Центр O окружности, вписанной в треугольник ABE , лежит на отрезке CD . Найдите наименьшее возможное значение суммы $ED + DO$, если известно, что $BE = 10$.
6. [4 балла] На острове расположено несколько деревень. Между некоторыми деревнями проложены дороги. Известно, что из любой деревни в любую другую можно добраться, причём по единственному маршруту. Также известно, что есть четыре деревни, из которых выходят 3, 4, 5 и 7 дорог соответственно, а из остальных деревень выходит ровно по одной дороге. Сколько деревень может быть на острове?
7. [5 баллов] Найдите все пары целых чисел $(x; y)$, удовлетворяющие уравнению

$$\sqrt{2x + 2y - x^2 - y^2} + \sqrt{1 - |x + y - 2|} = 1.$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



СТРАНИЦА
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$x^2 + 2\sqrt{3}tx + 4t^2 - 4 = 0$; $\Delta = 4t^2 - 4$; $x_1, x_2 = \frac{-2\sqrt{3}t \pm \sqrt{4t^2 - 4}}{2} = -\sqrt{3}t \pm \sqrt{t^2 - 1}$
м.к. $x_1, x_2 > 0$ - тогда $\Rightarrow 4t^2 - 4 > 0 \Rightarrow 4t^2 > 4 \Rightarrow t^2 > 1 \Rightarrow |t| > 1$
 $D = 4t^2 - 4 > 0$; $D = (2\sqrt{3} \cdot 1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (4t^2 - 4) = 12t^2 - 16t^2 + 16 = -4t^2 + 16$
м.к. по ун. $\Rightarrow D > 0 \Rightarrow -4t^2 + 16 > 0$; $-4t^2 > -16$; $t^2 < 4$; $|t| < 2$
 $\begin{cases} |t| > 1 \\ |t| < 2 \end{cases} \Rightarrow t \in (-2; -1) \cup (1; 2)$

Ответ: $t \in (-2; -1) \cup (1; 2)$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☒	☐	☐	☐	☐	☐

СТРАНИЦА
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$a+b=40 \Rightarrow b=40-a$, к.к. Числовый

$$a^2 - 2ab + b^2 + 15a - 15b = 17p^5;$$

$$a^2 - 2ab + b^2 + 15a - 15b = (a-b)^2 + 15(a-b) = (a-b)(a-b+15) =$$

$$= (2a-40)(2a-25) = 17p^5; \quad 2a - 40m, \quad 40 - 25m, \quad 40m - 25m = 15m \Rightarrow$$

$$2a - 40 - 15m \Rightarrow 2a - 40 = 2 \Rightarrow 17p^5 : 2; \quad 17 \nmid 2 \Rightarrow p^5 : 2;$$

к.к. p - простое, то оно делится на 2 и на $p \Rightarrow$ если $p^5 : 2 \Rightarrow$

$$p=2 \Rightarrow 17p^5 = 17 \cdot 2^5 = 17 \cdot 32 = 544$$

$$(2a-40)(2a-25) = 544 \Rightarrow 4a^2 - 130a + 1000 = 544;$$

$$4a^2 - 130a + 456 = 0, \quad 2a^2 - 65a + 228 = 0 \Rightarrow$$

По теореме Виета:

$$\begin{cases} a_1 + a_2 = -\frac{b}{a} = 32,5 \\ a_1 \cdot a_2 = \frac{c}{a} = 114 \end{cases} \Rightarrow a_1 = 4; \quad a_2 = 28,5 \text{ - п.к., м.к. } a \in \mathbb{N} \text{ - не подходит}$$

$$\Rightarrow a=4; \quad a+b=40 \Rightarrow b=36$$

Ответ: $a=4; \quad b=36$.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

☐ ☐ ☐ ☒ ☐ ☐ ☐

СТРАНИЦА

1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Итого порт = $7 \cdot 3 = 9$ ^{из 10 человек} $\rightarrow$ если 9 мест для 8 человек = 7

1 место останется пустым. $\rightarrow$ Будем 2 пустых ряда

ряды x и y с пустой партой, Итого способов расставить

трех человек разного роста = 1 (по возрастанию роста),

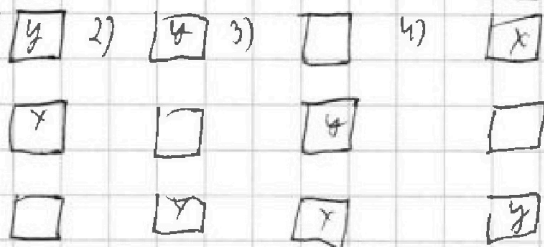
Итого способов заполнить пустой на ^{из 8 человек} заданный ряд $C_8^3 = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6}{3!}$,

На втором заданном ряду останется на выбор 5 человек $\rightarrow$ $C_5^3 = \frac{5 \cdot 4 \cdot 3}{3!}$, Итого второй ряд

останется для человека, пусть из ряда x и y состав, пусть $x \neq y$

$\rightarrow$ Итого способов расставить их, чтобы не было парно

Всего = 4 $\leftarrow$ даки.



Итого, мы у нас имеем все 3 ряда, на эти ряды можно

поставить людей и будем получать новые способы. Итого способов

поставить их людей = $3!$ $\rightarrow$ в итоге получаем

$$(C_8^3 \cdot C_5^3 \cdot 4) \cdot 3! = \left(\frac{8 \cdot 7 \cdot 6}{3!} \cdot \frac{5 \cdot 4 \cdot 3}{3!} \cdot 4 \right) \cdot 3!$$

$$\text{Ответ: } \left(\frac{8 \cdot 7 \cdot 6}{3!} \cdot \frac{5 \cdot 4 \cdot 3}{3!} \cdot 4 \right) \cdot 3!$$



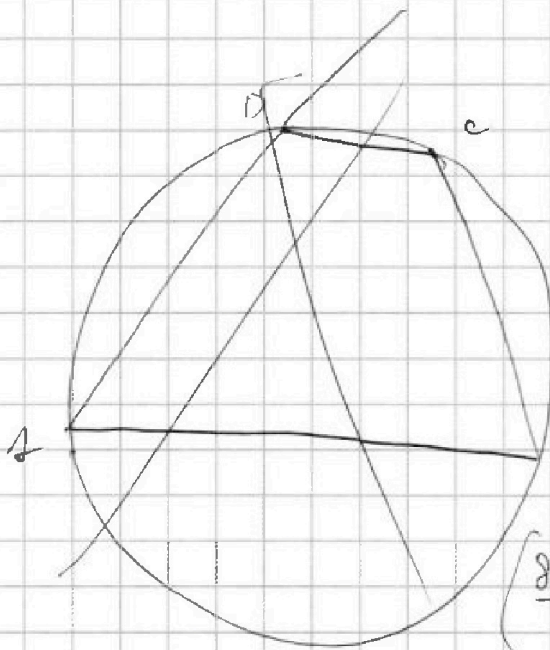
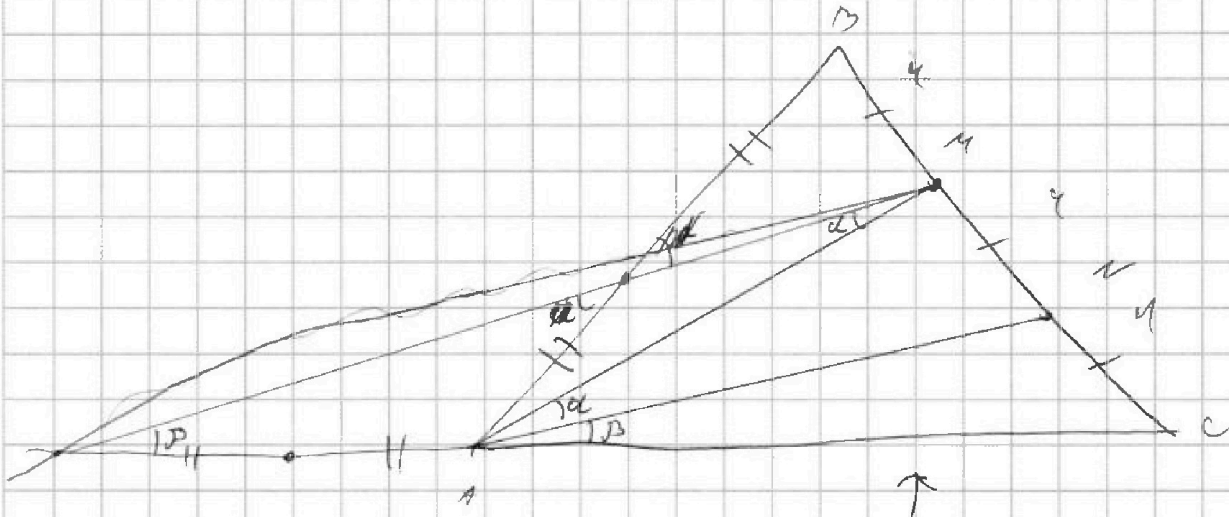
На одной странице можно оформлять **только одну задачу**. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Черновик



☐	☐	☐
☐	☐	☐
☐	☐	☐

1 < 2 < 3 < 4 < 5 < 6 < 7 < 8

$$\left(\frac{8 \cdot 7 \cdot 6}{3!} \cdot \frac{5 \cdot 4 \cdot 3}{3!} \cdot (4) \cdot (3!) \right)$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



СТРАНИЦА
2 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$2) \quad x+y=1; \quad \text{или} \quad x=1 \Rightarrow y^2=1; \quad 2(xy)-(x^2+y^2)=1 \Rightarrow$$

$$x^2+y^2=1; \quad \begin{cases} x^2+y^2=1 \\ x+y=1 \end{cases} \Rightarrow (x+y)^2=1^2 \Rightarrow x^2+2xy+y^2=1 \Rightarrow$$

$$(x^2+2xy+y^2)-(x^2+y^2)=1-1=0 \Rightarrow 2xy=0 \Rightarrow$$

$$x_1=0 \quad y_1=1; \quad x_2=1; \quad y_2=0.$$

$$\text{Ответ: } (0;1); (1;0); (1;1); (0;0); (0;0); (1;1)$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☒

СТРАНИЦА
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

№ задачи.

Пусть $1 \leq a \leq b$ и $a, b \geq 0$ и

$$a^2 = 2x + 2y - x^2 - y^2, \quad b^2 = 1 - |x + y - 2|;$$

~~$b^2 = 1 - |x + y - 2|$~~

т.к. $a \leq b = 1$ и $a, b \geq 0$, то $a \leq 1$; $b \leq 1$ и

a, b - целые, тогда наименьшее значение в выражении - не целое,

$2x + 2y - x^2 - y^2$ - целое, т.к. x и y - целые по теореме;

$2x$ - целое; $2y$ - целое; x^2 - целое (квадрат целого) и

y^2 - целое (аналогично) $\Rightarrow$ значит a и b - не

существуют $\Rightarrow$ либо I) $a = 0$ либо $b = 0$ - II

$b = 1$ $a = 1$

Рассмотрим I: $b = 1 \Rightarrow b^2 = 1 \Rightarrow 1 - |x + y - 2| = 1 \Rightarrow x + y = 2$

$$a = 0 \Rightarrow a^2 = 0 \Rightarrow 2(x + y) - (x^2 + y^2) = 0; \quad 2 \cdot 2 - (x^2 + y^2) = 0 \Rightarrow x^2 + y^2 = 4$$

$$\begin{cases} x + y = 2 \\ x^2 + y^2 = 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (x + y)^2 = 2^2 = x^2 + 2xy + y^2 = 4 \\ x^2 + y^2 = 4 \end{cases} \Rightarrow 2xy = 0 \Rightarrow \begin{matrix} x_1 = 0 & y_1 = 2 \\ x_2 = 2 & y_2 = 0 \end{matrix}$$

Рассмотрим II: $b = 0 \Rightarrow b^2 = 0 \Rightarrow 1 - |x + y - 2| = 0 \Rightarrow |x + y - 2| = 1 \Rightarrow x + y = 3 \Rightarrow y = 3 - x$

$$a = 1 \Rightarrow a^2 = 1 \Rightarrow 2(x + y) - (x^2 + y^2) = 1 \Rightarrow x^2 + y^2 = 5$$

$$x^2 + (3 - x)^2 = 5 \Rightarrow x^2 + 9 - 6x + x^2 = 5 \Rightarrow 2x^2 - 6x + 4 = 0$$

$x^2 - 3x + 2 = 0 \Rightarrow$ по теореме Виета:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} = 3 \\ x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a} = 2 \end{cases} \Rightarrow x_1 = 1; x_2 = 2 \Rightarrow y_1 = 2; y_2 = 1$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

СТРАНИЦА
из

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Черновики.

$$1 = 0, 1, 0, 7$$

$$(0, 1)^2$$

$$x^2 = 1x + 1y - x - y^2 \quad b^2 =$$

$$a + b = 1$$

$$2x + 2y - x^2 - y^2 = 0$$

$$1 - 1x + y - 2x = 1$$

ABDZ



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7
☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐

СТРАНИЦА
 ИЗ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Черновик.

$$y^2 + 2\sqrt{3}x + 4x^2 - 4 = 0$$

$$4x^2 - 4 > 0$$

$$|x| > 1$$

$$a, b \in \mathbb{R}$$

$$a + b = 40$$

$$b = 40 - a$$

$$a^2 - 2ab + b^2 + 15a - 15b = 17p^5$$

$$(a-b)^2 + 15(a-b) = (a-b)(a-b+15) = 17p^5$$

$$(2a-40)(2a-25) = 17p^5$$

$$2a \in [12, 5]$$

$$2a = 8$$

$$12$$

$$a = 4$$

$$12$$

$$2^x \cdot 2^y \cdot 17 \quad 2a - 25 = 0$$

$$(4, 4), (2, 9), (3, 8), (1, 10)$$

$$(2a-40)(2a-25) = 17 \cdot 2^5$$

$$4a^2 - 80a + 80a + 1000 = 17 \cdot 2^5$$

$$4a^2 - 130a + 1000 - 17 \cdot 2^5 = 0$$

$$a_1 + a_2 = \frac{130}{4} = 32,5$$

$$a_1 = 4, a_2 = 28,5$$

$$a_1 \cdot a_2 = 114$$

$$n-1 = n-1 - 2p^5$$

$$n-1 = (n-4) + 3 \cdot 4 + 6 + 7$$

$$n-1 = \frac{4+75}{2}$$

$$2n-2 = n+15$$

$$n = 17$$

$$0.54 \quad 0.621$$

$$32$$

$$\times 17$$

$$2 \quad 4$$

$$32$$

$$544$$