



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

10 КЛАСС. Вариант 7



1. [3 балла] Четвёртый член арифметической прогрессии равен $6 - 9x$, шестой член равен $(x^2 - 2x)^2$, а десятый равен $9x^2$. Найдите x .
2. [4 балла] Найдите наибольшее значение выражения $3y + 6x$ при условии

$$\begin{cases} |x - 2y| \leq 2 \\ |2x - y| \leq 1. \end{cases}$$

3. [5 баллов] Найдите все пары (m, n) натуральных чисел, для которых одно из чисел $A = m^2 + 4mn + 4n^2 - 7m - 14n$ и $B = m^2n + 2mn^2 + 9mn$ равно $11p^2$, а другое равно $75q^2$, где p и q — простые числа.
4. [5 баллов] Прямая, параллельная биссектрисе AX треугольника ABC , проходящая через середину M его стороны BC , пересекает сторону AB и продолжение стороны AC в точках Z и Y соответственно. Найдите BC , если $AC = 6$, $AZ = 3$, $YZ = 4$.
5. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \sqrt{x+2} - \sqrt{7-y} + 7 = 2\sqrt{14+5x-y^2}, \\ x^3 + 3x - \sqrt{2y} = y^3 - \sqrt{2x} + 3y. \end{cases}$$

6. [4 балла] На тетрадном листе нарисован квадрат 10×10 клеток (стороны квадрата идут вдоль границ клеток), а все узлы сетки внутри квадрата или на его границе покрашены в чёрный цвет. Найдите количество способов перекрасить два узла в белый цвет, если раскраски, получающиеся друг из друга поворотом, считаются одинаковыми.
7. [6 баллов] В треугольнике ABC на медиане AM и биссектрисе CL как на диаметрах построены окружности Ω и ω соответственно, пересекающиеся в точках P и Q . Отрезок PQ параллелен высоте треугольника ABC , проведённой из вершины B . Окружность Ω пересекает сторону AC повторно в точке N . Найдите длины сторон AC и BC , если $AB = 4$, $AN = 5$.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☒ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА

1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

1. a - первый член арифметической прогрессии

d - разность ариф. прогрессии

$$a_4 = a + 3d = 6 - 3x$$

$$a_6 = (x^2 - 2x)^2 = a + 5d$$

$$a_{10} = 9x^2 = a + 9d$$

$$a_6 - a_4 = 2d = (x^2 - 2x)^2 - 6 + 3x$$

$$a_{10} - a_6 = 4d = 9x^2 - (x^2 - 2x)^2$$

$$2 \cdot 2d = 2(x^2 - 2x)^2 - 6 + 3x = 4d = 9x^2 - (x^2 - 2x)^2$$

$$2(x^2 - 2x)^2 - 12 + 6x = 9x^2 - (x^2 - 2x)^2$$

$$3(x^2 - 2x)^2 = 9x^2 - 18x + 12 : 3$$

$$(x^2 - 2x)^2 = 3x^2 - 6x + 4$$

$$x^4 - 4x^3 + 4x^2 = 3x^2 - 6x + 4$$

$$x^4 - 4x^3 + x^2 + 6x - 4 = 0$$

$$x^4 - 4x^3 + x^2 + 6x - 4 = (x-1)^2(x^2 - 2x - 4) = 0$$

$$\text{Корни: } x_{1,2} = 1 \quad x_{3,4} = 1 \pm \sqrt{5}$$

Проверим:

$$\left. \begin{aligned} 1) \quad x=1 \quad a_4 &= 6 - 3x = 6 - 3 = 3 \\ a_6 &= (x^2 - 2x)^2 = (1 - 2)^2 = 1 \\ a_{10} &= 9x^2 = 9 \end{aligned} \right\} \Rightarrow d = \frac{1-3}{2} = \frac{3-1}{4} = 2. \quad \checkmark$$

$$\left. \begin{aligned} 2) \quad x=1+\sqrt{5} \\ a_4 &= 6 - 3 - 3\sqrt{5} = -3 - 3\sqrt{5} \\ a_6 &= (6 + 2\sqrt{5} - 2 - 2\sqrt{5})^2 = 16 \\ a_{10} &= 9(6 + 2\sqrt{5}) = 54 + 18\sqrt{5} \end{aligned} \right\} d = \frac{16 + 3 + 3\sqrt{5}}{2} = \frac{54 + 18\sqrt{5} - 16}{4} = \frac{19}{2} + \frac{3\sqrt{5}}{2}. \quad \checkmark$$

$$\left. \begin{aligned} 3) \quad x=1-\sqrt{5} \\ a_4 &= 6 - 3 + 3\sqrt{5} = -3 + 3\sqrt{5} \\ a_6 &= (6 - 2\sqrt{5} - 2 + 2\sqrt{5})^2 = 16 \\ a_{10} &= 9(6 - 2\sqrt{5}) = 54 - 18\sqrt{5} \end{aligned} \right\} d = \frac{16 + 3 - 3\sqrt{5}}{2} = \frac{54 - 18\sqrt{5} - 16}{2} = \frac{19}{2} - \frac{3\sqrt{5}}{2}. \quad \checkmark$$

$$\text{Ответ: } x_1 = 1 \\ x_2 = 1 + \sqrt{5} \\ x_3 = 1 - \sqrt{5}$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☒ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

2.

$$3y + 6x$$

$$3(y + 2x)$$

$$\text{Пусть } 2x + y = k$$

$$y = k - 2x$$

$$6x + 3y = 3k$$

$$\begin{cases} |x - 2k - 2x| = |x + 4x - 2k| \leq 2 & |5x - 2k| \leq 2 \\ |2x - k + 2x| = |4x - k| \leq 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -2 \leq 5x - 2k \leq 2 \\ -1 \leq 4x - k \leq 1 \end{cases} \quad \begin{cases} 5x - 2 \leq 2k \leq 5x + 2 \\ 4x - 1 \leq k \leq 4x + 1 \end{cases}$$

$$2,5x - 1 \leq k \leq 2,5x + 1$$

$$4x - 1 \leq k \leq 4x + 1$$

$$1,5x \leq 2$$

$$2,5x - 1 \leq k \leq 4x + 1$$

$$-2 \leq 1,5x$$

$$-2 \leq \frac{3}{2}x \leq 2$$

$$-\frac{4}{3} \leq x \leq \frac{4}{3}$$

$$x = \frac{k - y}{2}$$

$$\begin{cases} |x - 2y| = \left| \frac{k - y}{2} - 2y \right| \leq 2 & \left| \frac{k - 5y}{2} \right| \leq 2 \\ |2x - y| = |k - y - y| \leq 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -2 \leq \frac{k - 5y}{2} \leq 2 \\ -1 \leq k - 2y \leq 1 \end{cases} \quad \begin{cases} -4 \leq k - 5y \leq 4 \\ 2y - 1 \leq k \leq 2y + 1 \end{cases} \quad \begin{cases} 5y - 4 \leq k \leq 5y + 4 \\ 3y \leq 5 \\ -5 \leq 3y \leq 5 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 5y - 4 \leq k \leq 2y + 1 \\ 2y - 1 \leq k \leq 5y + 4 \end{cases} \quad \begin{cases} 3y \leq 5 \\ -5 \leq 3y \end{cases} \quad \begin{cases} -5 \leq 3y \leq 5 \\ -\frac{5}{3} \leq y \leq \frac{5}{3} \end{cases}$$

$$x \leq \frac{4}{3} \quad y \leq \frac{5}{3}$$

$$6x \leq 8 \quad 3y \leq 5$$

$$6x + 3y \leq 8 + 5$$

$$6x + 3y = 13.$$

Пример при $3k = 13$:

$$x = \frac{4}{3} \quad y = \frac{5}{3}$$

$$6x + 3y = 8 + 5 = 13 \quad \checkmark$$

$$|x - 2y| = \left| \frac{4}{3} - \frac{10}{3} \right| = \left| -2 \right| \leq 2 \quad \checkmark$$

$$|2x - y| = \left| \frac{8}{3} - \frac{5}{3} \right| = \left| 1 \right| \leq 1 \quad \checkmark$$

Ответ: 13



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☒	☐	☐	☐	☐

СТРАНИЦА
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

3.

$$m, n \in \mathbb{N}$$

$$\begin{cases} A = m^2 + 4mn + 4n^2 - 7m - 14n \\ B = m^2n + 2mn^2 + 3mn \end{cases}$$

$$A = (m+2n)^2 - 7(m+2n) = (m+2n)(m+2n-7)$$

$$B = mn(m+2n+3)$$

$$\text{пусть } m+2n = a$$

$$mn = b$$

$$A = a^2 - 7a$$

$$B = b(a+3)$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

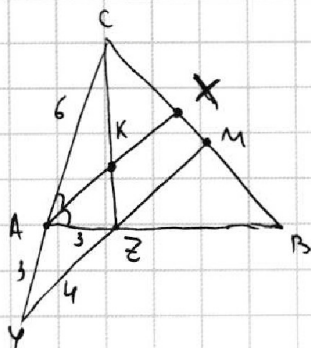


1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☒ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

4.



BC-?

AX - медиана $\angle CAB$ M - середина BC

AX $\parallel$ YM

AZ=3 AC=6 YZ=4

K = AX $\cap$ CZ

AX - медиана $\angle CAB \Rightarrow AK$ - медиана $\angle CAZ$

по свойству медиан в $\triangle ACZ$:

$$\frac{AC}{AZ} = \frac{CK}{ZK} \Rightarrow \frac{6}{3} = \frac{2}{1} = \frac{CK}{ZK} \Rightarrow \angle ZK = CK$$

$$AX \parallel YM \Rightarrow KX \parallel ZM \Rightarrow \frac{CK}{KZ} = \frac{CX}{XM} \Rightarrow \frac{2}{1} = \frac{CX}{XM} \Rightarrow CX = 2XM$$

$$BM = CM = CK + XM = 3XM$$

$$XB = XM + BM = XM + 3XM = 4XM$$

по свойству медиан в $\triangle ABC$: $\frac{AC}{AB} = \frac{CX}{XB} \Rightarrow \frac{AC}{AB} = \frac{2XM}{4XM} = \frac{1}{2} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \frac{6}{AB} = \frac{1}{2} \Rightarrow AB = 12$$

AX $\parallel$ YM $\Rightarrow$ AK $\parallel$ YZ $\Rightarrow \frac{AC}{AY} = \frac{CK}{YZ} \Rightarrow \frac{6}{AY} = \frac{2}{4} \Rightarrow AY = 3$

по теореме косинусов в $\triangle AYZ$:

$$4^2 = 3^2 + 3^2 - 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot \cos \angle YAZ \Rightarrow 16 = 18 - 18 \cdot \cos \angle YAZ \Rightarrow \cos \angle YAZ = -\frac{1}{9}$$

$$\Rightarrow \cos \angle CAB = \cos (180^\circ - \angle YAZ) = -\frac{1}{9}$$

по теореме косинусов в $\triangle ABC$:

$$BC^2 = 6^2 + 12^2 - 2 \cdot 6 \cdot 12 \cdot \left(-\frac{1}{9}\right) = 180 + 4^2 \cdot 3 \cdot \frac{1}{3} = 196 = 14^2$$

$$\Rightarrow BC = 14.$$

Ответ: BC=14.



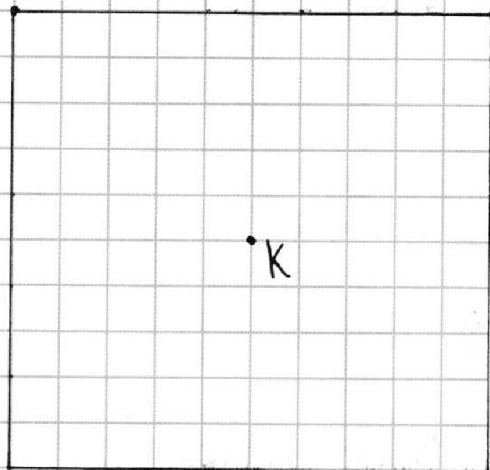
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7
☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☒ ☐

СТРАНИЦА
 1 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

6.



(Точка К - центр квадрата)

Там одного способа, который соответствует условию.

2) 2 способа являются поворотами 1 случая, который соответствует условию.

Например (на квадрате 2×2):



Пусть в квадрате 10×10 способов 1-вида было x , а второго вида - y . Тогда $C_{121}^2 = 4 \cdot x + 2 \cdot y$ (т.к. каждый способ 1-вида был посчитан 4 раза, а второго вида - 2 раза.)

Посчитаем сколько способов 2-вида есть в кв. 10×10 .

Заметим, что в способах 2-вида две перекрашенные точки расположены симметрично относительно центра квадрата К.

Значит, чтобы посчитать ~~каждое~~ кол-во способов второго вида нужно выбрать любую точку (кроме центра К) и разделить полученное кол-во выборов на 4. Т.к. при выборе любой точки А и взрав симметричную ей точку В относительно центра К, мы получим два одинаковых способа: (А, В) и (В, А).

После, повернув квадрат на 90°, отметим точки куда попадут А и В буквами С и D соответственно.



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☒	☐

СТРАНИЦА
2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

6. C и D также симметричны друг другу относительно центра K. Точки C и D дадут нам еще два ~~способа~~ одинаковых способа: (C, D) и (D, C), которое в то же время равно изначальным способам (A, B) и (B, A).

Т.е. ^{также} выбрав 1 точку (кроме K), получаем ¹ способ, который будет ^{также} получен при выборе других 3 точек.

В квадрате 10x10 кроме центра можно ~~выбрать~~ выбрать 120 точек.

$$\Rightarrow y = \frac{120}{4} = 30$$

$$4x + 2y = C_{121} = 4x + 2 \cdot 30 = \frac{120 \cdot 121}{2} = 60 \cdot 121$$

$$x = \frac{60 \cdot 121 - 2 \cdot 30}{4} = 15 \cdot 121 - 15 = 15 \cdot 120 = 1800$$

Значит, способов 1-го вида - 1800, 2-го вида - 30.

Тогда общее кол-во способов равно $x + y = 1800 + 30 = 1830$.

Ответ: 1830



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7
☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐

СТРАНИЦА
 _ ИЗ _

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

5.

$$\begin{cases} \sqrt{x+2} - \sqrt{7-y} + 7 = 2\sqrt{4+x-y^2} \\ x^3 + 3x - \sqrt{2}y = y^3 - \sqrt{2}x + 3y \end{cases}$$

$$x^3 - y^3 + 3x - 3y + \sqrt{2}x - \sqrt{2}y = (x-y)(x^2 + xy + y^2) + 3(x-y) + \sqrt{2}(x-y) = 0$$

$$= (\sqrt{x} - \sqrt{y})(\sqrt{x} + \sqrt{y})(x^2 + xy + y^2 + 3) + \sqrt{2}(\sqrt{x} - \sqrt{y}) = 0$$

$$1) (\sqrt{x} + \sqrt{y})(x^2 + xy + y^2 + 3) + \sqrt{2} = 0$$

$$\text{если } x=y=0, \text{ то } \sqrt{2} - \sqrt{2} + 7 = 2\sqrt{4}$$

Тогда хотя бы один из x и y больше

$$3(y+2x)$$

$$\begin{cases} |x-2y| \leq 2 \\ |2x-y| \leq 1 \end{cases}$$

$$1) -2 \leq x-2y \leq 2$$

$$-1 \leq 2x-y \leq 1$$

$$3x-3y \leq 3$$

$$x-y \leq 1$$

$$2(y+1) \leq x \leq 2(y+1)$$

$$2(y-1) \leq x \leq 2(y+1)$$

$$\frac{1}{2}(y-1) \leq x \leq \frac{1}{2}(y+1)$$

$$2x \leq 4y+2$$

$$5y-2 \leq 2x+y \leq 5y+2$$

$$5y-2 \leq \sqrt{21}$$

$$y \leq \frac{\sqrt{21}-2}{5}$$

$$y = \frac{\sqrt{21}-2}{5}$$

$$\frac{\sqrt{21}-2}{5} + \frac{2(2\sqrt{21}+1)}{5} = \sqrt{21}$$

$$x = \frac{2\sqrt{21}+1}{5}$$

$$y = \frac{\sqrt{21}-2}{5}$$

$$x-2y = \frac{2\sqrt{21}+1-2\sqrt{21}+4}{5}$$

$$2x-y = \frac{4\sqrt{21}+2-\sqrt{21}+2}{5} = 3\sqrt{21}+4$$

$$x+y = \sqrt{21}$$

$$x = \sqrt{21}-y$$

$$|\sqrt{21}-3y| \leq 2$$

$$|2\sqrt{21}-3y| \leq 1$$

$$-2 \leq \sqrt{21}-3y \leq 2$$

$$-1 \leq 2\sqrt{21}-3y \leq 1$$

$$\sqrt{21}-2 \leq 3y \leq \sqrt{21}+2$$

$$2\sqrt{21}-1 \leq 3y \leq 2\sqrt{21}+3$$

$$2\sqrt{21}-1 \leq 3y \leq 2\sqrt{21}+3$$

$$\sqrt{21} > 3$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1
☐

2
☐

3
☐

4
☐

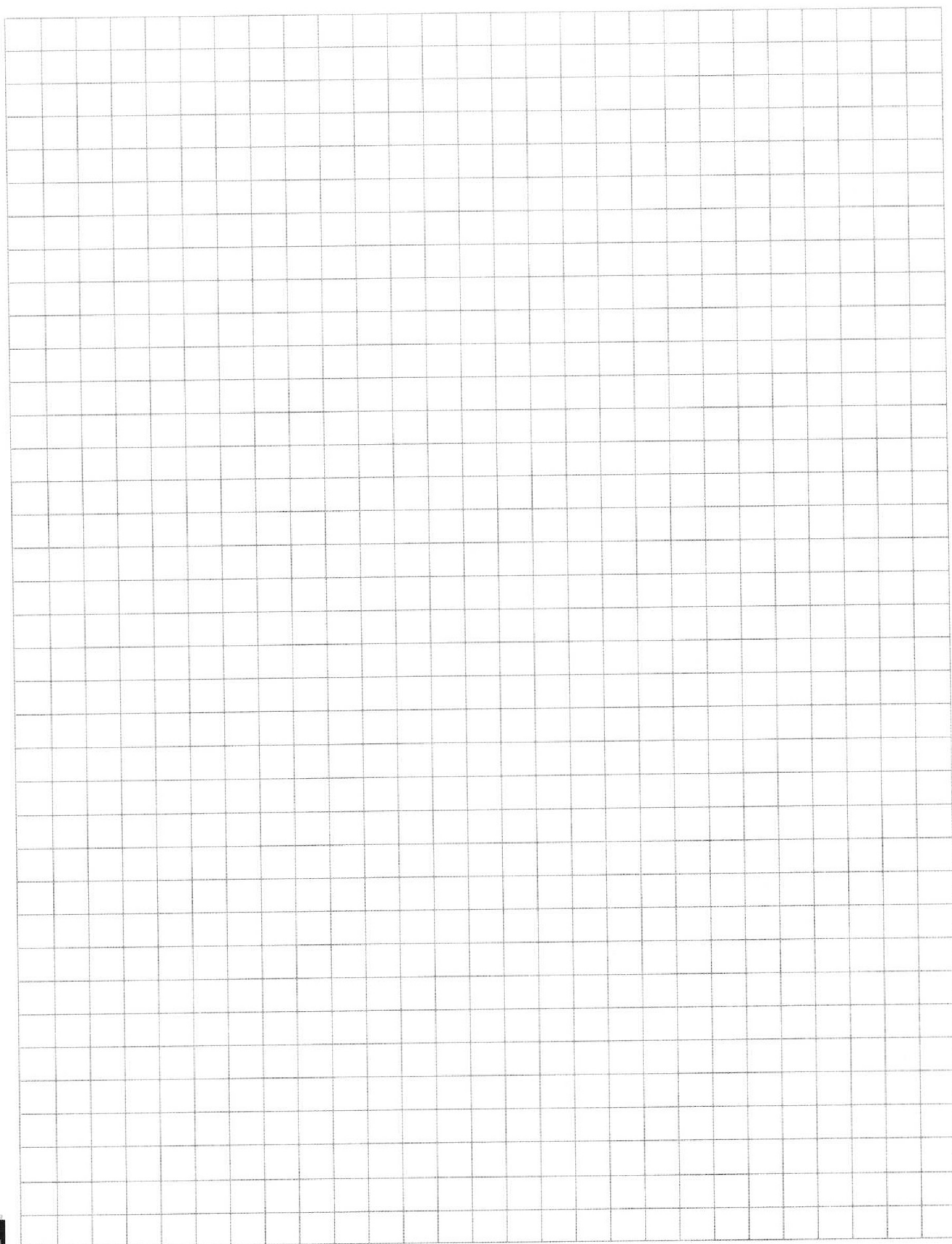
5
☐

6
☐

7
☐

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!





На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

1) $m, n \in \mathbb{N}$ $(m, n) = ?$

$$A = m^2 + 4mn + 4n^2 - 7m - 14n = 11p^2$$

$$B = m^2n + 2mn^2 + 3mn = 75q^2$$

$$(m+2n)^2 - 7(m+2n) = 11p^2$$

$$mn(m+2n+3) = 75q^2$$

$$m+2n = a \quad mn = b \quad a, b \in \mathbb{N}$$

$$a^2 - 7 = 11p^2$$

$$a^2 - 4p^2 = 7p^2 + 7$$

$$b(a+3) = 75q^2$$

$$(a-2p)(a+2p) = 7(p^2+1)$$

$$(a^2 - 4p^2) - 7mn$$

$$a^2 - 7 = 81 + 81 = 11p^2$$

$$(a-3)(a+3) = 11p^2 - 74$$

$$(a+3) = \frac{75q^2}{b}$$

$$(a-3) \cdot \frac{75q^2}{b} = 11p^2 - 74$$

$$(a-3) \cdot 75q^2 = b(11p^2 - 74)$$

$$x = \frac{4}{3} \quad y = \frac{5}{3}$$

$$\frac{4}{3} - \frac{10}{3} =$$

$$\frac{8}{3} - \frac{15}{3} =$$

$$30 \cdot 2 =$$

121 точка

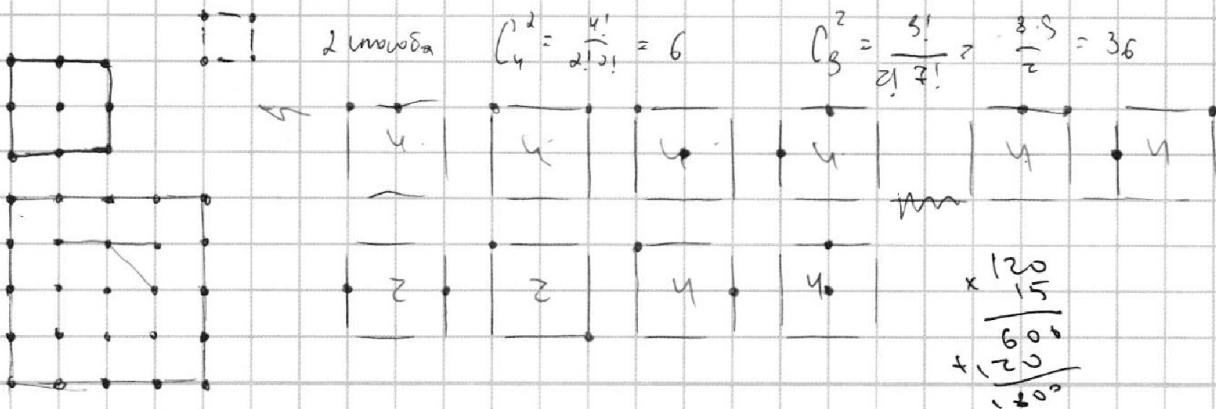
$$\frac{120}{4} = 30$$

$$\frac{C_4^2 - 30 \cdot 2}{4} =$$

$$\frac{\frac{120 \cdot 121}{2} - 60}{4} = \frac{15 \cdot 121 - 15}{4} = \frac{1800}{4}$$

$$120 - 1 = 120$$

$$8 \cdot 4 + 2 \cdot 2 = 36$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



$$\begin{cases} \sqrt{x+2} = \sqrt{7-y} + 7 = 2\sqrt{14+5x-y^2} \\ x^3 + 3x - 52y = y^3 - 52x + 3y \end{cases}$$

$$x^3 - y^3 + 3(x-y) + 52(\sqrt{x} - \sqrt{y}) = 0$$

$$(x-y)(x^2 + xy + y^2 + 3) + 52(\sqrt{x} - \sqrt{y}) = 0$$

$$(\sqrt{x} - \sqrt{y})(\sqrt{x} + \sqrt{y})(x^2 + xy + y^2 + 3) + 52(\sqrt{x} - \sqrt{y}) = 0$$

$$1) \sqrt{x} = \sqrt{y} \Rightarrow x = y$$

$$\sqrt{x+2} + \sqrt{7-x} + 7 = 2\sqrt{14+5x-x^2}$$

$$\sqrt{x+2} + \sqrt{7-x} = 2\sqrt{14+5x-x^2} - 7$$

$$x+2 + 7-x + 2\sqrt{14+5x-x^2} = 4(14+5x-x^2) + 49 - 28\sqrt{14+5x-x^2}$$

$$30\sqrt{14+5x-x^2} = 56 + 20x - 4x^2 + 49 - 3 = 20x - 4x^2 + 96$$

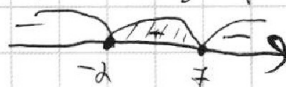
$$15\sqrt{14+5x-x^2} = 10x - x^2 + 48$$

$$15^2(14+5x-x^2) = 100x^2 + x^4 + 48^2 + 20x \cdot 48 - 20x^3 - 2 \cdot 48 \cdot x^2$$

&

$$14+5x-x^2 \geq 0$$

$$x_1 = -2 \quad x_2 = 7$$



$$2) x^2 + xy + y^2 + 3 \leq 0$$

$$3xy \leq x^2 + xy + y^2 + 3$$

$$3xy \leq 0$$

кр

$$\frac{3(x^2+y^2)}{2} + 3 \leq 0$$

$$\frac{x^2+y^2}{2} + 1 \leq 0$$



$$1) x = y$$

$$\sqrt{x+2} = \sqrt{7-x} + 7 = 2\sqrt{14+5x-x^2}$$

$$x+2 + 7-x - 2\sqrt{14+5x-x^2} = 4(14+5x-x^2) + 49 - 28\sqrt{14+5x-x^2}$$

$$26\sqrt{14+5x-x^2} = 4(14+5x-x^2) + 49$$

$$13\sqrt{14+5x-x^2} = 28 + 10x - 2x^2 + 49 = 10x + 48 - 2x^2$$

$$169(14+5x-x^2) = 100x^2 + 48^2 + 4x^4 + 20x \cdot 48 - 20x \cdot 2x^2 - 2 \cdot 48 \cdot 2x^2$$

$$2 + 7 + 48 + 14\sqrt{2} = 14\sqrt{2} + 2\sqrt{14}$$

$$\sqrt{2} - \sqrt{7} + 7 = 2\sqrt{14}$$

$$\sqrt{2} + 7 = 2\sqrt{14} + \sqrt{7} = \sqrt{7}(2\sqrt{2} + 1)$$

$$\sqrt{2} = \sqrt{7}(2\sqrt{2} + 1 - \sqrt{7})$$

$$\frac{1}{\sqrt{7}}(\sqrt{14} - 7) = 2\sqrt{14} - 7 = \sqrt{14} - 7 + \sqrt{7}$$

$$(\sqrt{14} - 7)(\frac{1}{\sqrt{7}} - 1) = \sqrt{14}$$

$$1 + 98 + 14\sqrt{2} = 343 + 14 + 14$$

$$2 + 14\sqrt{2} = 14\sqrt{2} + 2\sqrt{14}$$

$$1 + 7\sqrt{2} = 7\sqrt{2} + \sqrt{14}$$

$$= \sqrt{7}(7 + \sqrt{2})$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

2.

$$\max(3y+6x) = 3 - \max(y+2x)$$

$$\begin{cases} |x-2y| \leq 2 \\ |2x-y| \leq 1 \end{cases}$$

$$x^2 - 4xy + 4y^2 \leq 4$$

$$4x^2 - 4xy + y^2 \leq 1$$

$$4x^2 + y^2 - 4xy \leq 5$$

$$x^2 + y^2 - xy \leq 1$$

$$xy \leq (x+y)^2 - 3xy \leq 1$$

$$5x^2 - 8xy + 5y^2 \leq 5$$

$$20xy - 18xy \leq 5(x+y)^2 - 18xy \leq 5$$

$$2xy \leq 5 \quad xy \leq \frac{5}{2}$$

$$4x^2 + y^2 \leq 11 \quad + 4xy$$

$$4x^2 + 4xy + y^2 \leq 11 + 4xy \leq 21$$

$$(2x+y)^2 \leq 21$$

$$|2x+y| \leq \sqrt{21}$$

$$-\sqrt{21} \leq 2x+y \leq \sqrt{21}$$

$$2x+y = \sqrt{21}$$

$$2x+y = \sqrt{21}$$

$$x=y$$

$$3x = \sqrt{21} = \sqrt{3} \cdot \sqrt{7}$$

$$x = \frac{\sqrt{7}}{\sqrt{3}}$$

$$\left| \frac{\sqrt{7}}{\sqrt{3}} - \frac{2\sqrt{7}}{\sqrt{3}} \right| = \frac{\sqrt{7}}{\sqrt{3}} \leq 2 \quad \Rightarrow \quad \sqrt{7} \leq 2\sqrt{3}$$

$$\frac{\sqrt{7}}{4} + \frac{\sqrt{21}}{2}$$

$$2 \cdot \frac{\sqrt{21}}{5} + \frac{3\sqrt{21}}{5}$$

$$\frac{\sqrt{21}}{4} - \frac{\sqrt{21}}{2} = -\frac{\sqrt{21}}{4}$$

$$\frac{\sqrt{21}}{5} - \frac{6\sqrt{21}}{5}$$

$$\frac{5\sqrt{21}}{9}$$

$$\frac{4\sqrt{21}}{9}$$

$$\frac{(10-21)\sqrt{21}}{9}$$

$$4 \sim \frac{3\sqrt{21}}{5}$$

$$2 \cdot \frac{2\sqrt{21}}{5} + \frac{\sqrt{21}}{5}$$

$$\frac{2\sqrt{21}}{5} - \frac{2\sqrt{21}}{5} = 0$$

$$\frac{4\sqrt{21}}{5} - \frac{\sqrt{21}}{5} = \frac{3\sqrt{21}}{5}$$

$$2 \cdot a - b = \frac{\sqrt{21}}{5}$$

$$6\sqrt{21} -$$

$$\frac{4\sqrt{21}}{7}$$

$$\frac{3\sqrt{21}}{7}$$

$$(8-3)\frac{\sqrt{21}}{7}$$

$$4 - \frac{6\sqrt{21}}{7}$$

$$\frac{2\sqrt{21}}{7}$$

$$\leq 1$$

$$a - 2b = \frac{2\sqrt{21}}{5}$$

$$a - b = \frac{\sqrt{21}}{5}$$

$$a + b = \frac{\sqrt{21}}{3}$$

$$2a = \frac{6\sqrt{21}}{5}$$

$$a = \frac{3\sqrt{21}}{5}$$

$$b = \frac{2\sqrt{21}}{5}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



1 2 3 4 5 6 7
☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐

СТРАНИЦА
 _ ИЗ _

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$a_1 = a \quad d$$

$$a_n = \cancel{a+3d} \quad a+3d = 6-9x \quad x=?$$

$$a_6 = a+5d = (x^2-2x)^2$$

$$a_{10} = a+9d = 9x^2$$

$$a_6 - a_n = 2d = x^2(x-2)^2 - 6 + 9x$$

$$a_{10} - a_6 = 4d = 9x^2 - x^2(x-2)^2 = (3x+x^2-2x)(3x-x^2+2x) = (x^2+x)(5x-x^2)$$

$$2 \cdot 2d = 2(x^2-2x)^2 + 18x - 12 = (x^2+x)(5x-x^2)$$

$$2(x^4 - 4x^3 + 4x^2) + 18x - 12 = 5x^3 - x^4 + 5x^2 - x^3 = 4x^3 - x^4 + 5x^2$$

$$2x^4 - 8x^3 + 8x^2 + 18x - 12 = 4x^3 - x^4 + 5x^2$$

$$3x^4 - 12x^3 + 3x^2 + 18x - 12 = 0$$

$$x^4 - 4x^3 + x^2 + 6x - 4 = 0$$

$$x=1: 1-4+1+6-4=0$$

$$1 \quad -4 \quad 1 \quad 6 \quad -4$$

1

$$1 \quad -3 \quad -2 \quad 4 \quad 0$$

$$x^4 - 4x^3 + x^2 + 6x - 4 = (x-1)(x^3 - 3x^2 - 2x + 4) = 0$$

1

$$1 \quad -2 \quad -4 \quad 0$$

$$x^4 - 4x^3 + x^2 + 6x - 4 = (x-1)^2(x^2 - 2x - 4) = 0$$

$$D = 4 + 4 \cdot 4 = 20$$

$$x_{1,2} = \frac{2 \pm \sqrt{20}}{2} = 1 \pm \sqrt{5}$$

$$x=1$$

$$a_n = 6-9 = -3$$

$$a_6 = (1-2)^2 = 1 \quad \checkmark$$

$$a_{10} = 9$$

$$a_n = 6-9-9\sqrt{5} = -3-9\sqrt{5} \quad +18+9\sqrt{5}$$

$$a_6 = (1+\sqrt{5}+2\sqrt{5}-2-2\sqrt{5})^2 = 16 \quad +38+18\sqrt{5}$$

$$a_{10} = 9(1+5+2\sqrt{5}) = 54+18\sqrt{5} \quad \checkmark$$

$$a_n = 6-9+9\sqrt{5} = -3+9\sqrt{5} \quad +18-9\sqrt{5}$$

$$a_6 = (1+5-2\sqrt{5}-2+2\sqrt{5})^2 = 16 \quad +38-18\sqrt{5}$$

$$a_{10} = 9(1+5-2\sqrt{5}) = 54-18\sqrt{5} \quad \checkmark$$

$$(x^2-2x+1)(x^2-2x-4)=0$$

$$x^4 - 2x^3 - 4x^2 - 2x^3 + 4x^2 + 8x + x^2 - 2x - 4 =$$

$$x^4 - 4x^3 + 8x^2 - 2x - 4 + x^2$$

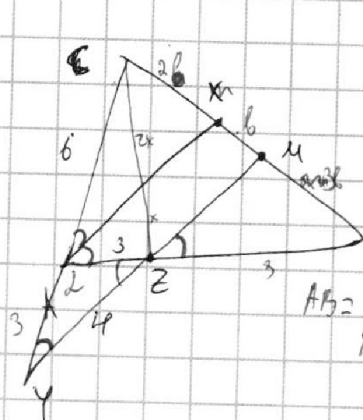


На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



$$BC = ? \quad AC = 6 \quad AB = 3 \quad \angle B = 4$$

$$AB = 3 \quad BZ = 2$$
$$16 = 3 \cdot 3 - 2 \cdot 3 \cdot \cos 2$$

$$2 \cdot 3 \cdot \cos 2 = 18 - 16 = 2$$

$$\cos 2 = \frac{1}{3}$$

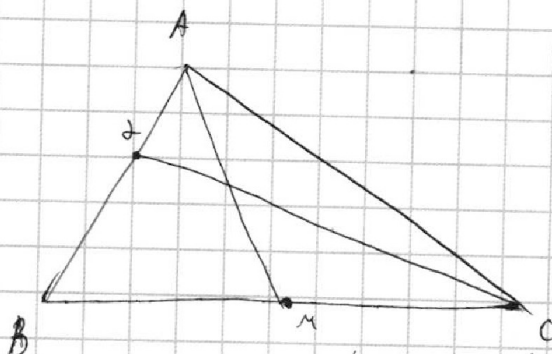
$$\cos(180 - 2) = -\frac{1}{3}$$

$$x^2 = 36 + 144 - 144 \cdot \left(-\frac{1}{3}\right)$$

$$36 + 180 + 16 = 136$$

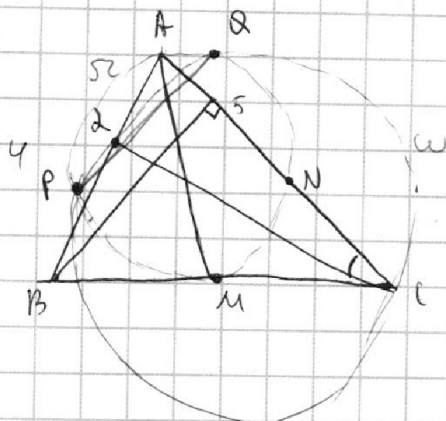
$$x = 14$$

7.



AC, BC - ?

$$AB = 4 \quad AN = 5$$



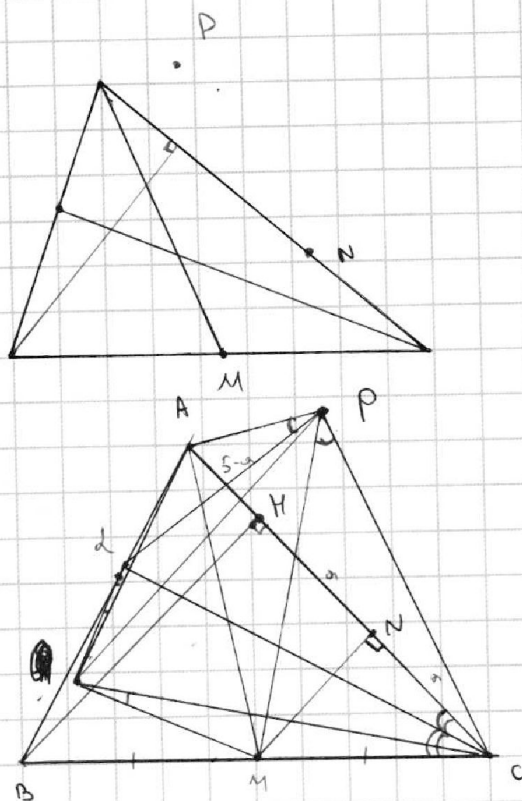


На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



APN ~ Q
CP ~ Q
AB = 4 AN = 5