



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

10 КЛАСС. Вариант 10



1. [4 балла] Натуральные числа a , b , c таковы, что ab делится на $2^{15}7^{11}$, bc делится на $2^{17}7^{18}$, ac делится на $2^{23}7^{39}$. Найдите наименьшее возможное значение произведения abc .

2. [4 балла] Известно, что дробь $\frac{a}{b}$ несократима ($a \in \mathbb{N}$, $b \in \mathbb{N}$). На доске записана дробь

$$\frac{a+b}{a^2-7ab+b^2}.$$

При каком наибольшем m могло оказаться, что числитель и знаменатель дроби можно сократить на m ?

3. [4 балла] Центр окружности ω лежит на окружности Ω , хорда AB окружности Ω касается ω в точке C так, что $AC : CB = 17 : 7$. Найдите длину AB , если известно, что радиусы ω и Ω равны 7 и 13 соответственно.

4. [5 баллов] Решите уравнение

$$\sqrt{3x^2 - 6x + 2} - \sqrt{3x^2 + 3x + 1} = 1 - 9x.$$

5. [5 баллов] На координатной плоскости дан параллелограмм с вершинами в точках $O(0; 0)$, $P(-13; 26)$, $Q(3; 26)$ и $R(16; 0)$. Найдите количество пар точек $A(x_1; y_1)$ и $B(x_2; y_2)$ с целыми координатами, лежащих в этом параллелограмме (возможно, на границе) и таких, что $2x_2 - 2x_1 + y_2 - y_1 = 14$.

6. [5 баллов] Найдите все значения параметра a , для каждого из которых найдётся значение параметра b , при котором система

$$\begin{cases} ax + y - 8b = 0, \\ (x^2 + y^2 - 1)(x^2 + (y - 12)^2 - 16) \leq 0 \end{cases}$$

имеет ровно 2 решения.

7. [6 баллов] Треугольник ABC вписан в окружность. Пусть M – середина той дуги AB описанной окружности, которая не содержит точку C ; N – середина той дуги AC описанной окружности, которая не содержит точку B . Найдите расстояние от вершины A до центра окружности, вписанной в треугольник ABC , если расстояния от точек M и N до сторон AB и AC соответственно равны 5 и 2,5.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☒	☐	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Заменим, что $abc : 7^{39}$, т.к. $ac : 7^{39}$

Пусть $\text{ord}_2(a) = t_a$; $\text{ord}_2(b) = t_b$; $\text{ord}_2(c) = t_c$,
тогда

$$t \begin{cases} t_a + t_b \geq 15, & \text{т.к. } ab : 2^{15} \\ t_b + t_c \geq 17, & \text{т.к. } bc : 2^{17} \\ t_a + t_c \geq 23, & \text{т.к. } ac : 2^{23} \end{cases}$$

$$2(t_a + t_b + t_c) \geq 55$$

$$t_a + t_b + t_c \geq 27,5$$

Но t_a, t_b, t_c — целые числа или 0, тогда $t_a + t_b + t_c \geq 28$

Получим, что $abc \geq 2^{28} \cdot 7^{39}$, т.к. $abc : 2^{28} \cdot 7^{39}$.

Пример: $a = 2^{11} \cdot 7^{16}$; $b = 2^4$; $c = 2^{13} \cdot 7^{23}$

$$ab = 2^{11} \cdot 7^{16} \cdot 2^4 = 2^{15} \cdot 7^{16} : 2^{15} \cdot 7^{11}$$

$$bc = 2^4 \cdot 2^{13} \cdot 7^{23} = 2^{17} \cdot 7^{23} : 2^{17} \cdot 7^{16}$$

$$ac = 2^{11} \cdot 7^{16} \cdot 2^{13} \cdot 7^{23} = 2^{24} \cdot 7^{39} : 2^{23} \cdot 7^{39}$$

$$abc = 2^{28} \cdot 7^{39}$$

Ответ: $abc \geq 2^{28} \cdot 7^{39}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☒	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Из условия следует, что $(a; b) = 1$ ($(a; b) = \text{НОД}(a; b)$).

$$\frac{a+b}{a^2-7ab+b^2} = \frac{a+b}{(a+b)^2-9ab}$$

Предположим, что эту дробь можно сократить на k ,
тогда $a+b \div k$, т.е. a и b не делятся
на k (или одно из них делится на k ,
но и второе тоже, но $(a; b) = 1$). Тогда и $(a+b)^2-9ab \div k$,
значит и $-9ab \div k$, значит $9 \div k$, т.к. $(a; k) = 1; (b; k) = 1$.
Получили $9 \div k$, тогда $9 \geq k$.

Значит, дробь можно сократить на m . Получим 9.

Пример: $a=100; b=17$:

$$\frac{a}{b} = \frac{100}{17} - \text{несократима}$$

$$\frac{a+b}{a^2-7ab+b^2} = \frac{100+17}{100^2-7 \cdot 17 \cdot 100 + 17^2} = \frac{117}{-1611} = -\frac{13}{179}$$

Ответ: $n=9$.

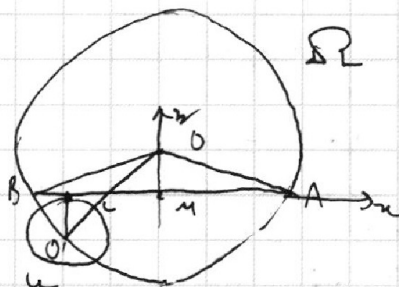
На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☒ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



Решение:

- 1) Пусть центр $\omega - O'$, а $\Omega - O$
Значит, $O'C \perp BA$
Проведем перпендикуляр OM на
 AB , значит, $BM = MA$

- 2) Введем систему координат
с центром в точке M и осью
 MA и MO .

- 3) Пусть координаты $O(0; b)$, а точки $A(a; 0)$,
тогда координаты $C(-\frac{5}{12}a; 0)$ и координаты
 $O'(-\frac{5}{12}a; -7)$.

$$\left(\begin{array}{l} \frac{BM}{MA} = \frac{1}{1} \\ \frac{BO}{OA} = \frac{7}{12} \end{array} \right)$$

- 4) $\triangle OBM$ - прямоугольный:
 $a^2 + b^2 = 13^2$

Расстояние от O' до O равно 13: $(b+7)^2 + (\frac{5}{12}a)^2 = 13$

$$\begin{cases} a^2 + b^2 = 13^2 & (1) \\ (b+7)^2 + (\frac{5}{12}a)^2 = 13^2 & (2) \end{cases}$$

$$\begin{array}{r} b^2 + 49 + 14b + \frac{25}{144}(169 - b^2) = 169 \\ 144b^2 + (7 \cdot 14)^2 + 14 \cdot 12^2 b + 65^2 - 25b^2 = (13 \cdot 12)^2 \\ 119b^2 + 1764 + 2016b + 4225 = 144 \cdot 169 \end{array}$$

$$(1) \quad a^2 = \frac{144}{25} (13^2 - (b+7)^2)$$

(2) $b(1)$:

$$\frac{144}{25} (13^2 - (b+7)^2) + b^2 = 13^2$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☒	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$\sqrt{3x^2 - 6x + 2} - \sqrt{3x^2 + 3x + 1} = 1 - 9x$$

$$\sqrt{3x^2 - 6x + 2} - (1 - 9x) = \sqrt{3x^2 + 3x + 1}$$

Получим, что $\sqrt{3x^2 - 6x + 2} - (1 - 9x) \geq 0$ (1)

$$3x^2 - 6x + 2 + (1 - 9x)^2 - 2(1 - 9x)\sqrt{3x^2 - 6x + 2} = 3x^2 + 3x + 1$$

$$1 - 9x + (1 - 9x)^2 - 2(1 - 9x)\sqrt{3x^2 - 6x + 2} = 0$$

$$(1 - 9x)(1 + 1 - 9x - 2\sqrt{3x^2 - 6x + 2}) = 0$$

I Положим $x = \frac{1}{9}$;

$$\sqrt{\frac{1}{27} - \frac{2}{3} + 2} - \sqrt{\frac{1}{27} + \frac{1}{3} + 1} = 0$$

$$\sqrt{1\frac{1}{3} + \frac{1}{3}} - \sqrt{1\frac{1}{3} + \frac{1}{3}} = 0$$

Получим, что $x = \frac{1}{9}$ - корень.

II $1 - 9x - 2\sqrt{3x^2 - 6x + 2} = 0$

$$2\sqrt{3x^2 - 6x + 2} = 1 - 9x, \text{ получим, что } 1 - 9x \geq 0 \quad (2)$$

$$4(3x^2 - 6x + 2) = 1 - 18x + 81x^2 - 36x$$

$$12x^2 - 24x + 8 = 1 - 18x + 81x^2 - 36x$$

$$69x^2 - 24x - 7 = 0$$

$$69x^2 - 24x - 7 = 0$$

$$D_4 = 36 + 4 \cdot 69 =$$

$$x_1 = \frac{6 + 2\sqrt{6 \cdot 13}}{69}$$

$$x_2 = \frac{6 - 2\sqrt{6 \cdot 13}}{69}$$

Проверим корни:

$$(1): 1 - 9 \cdot \frac{6 + 2\sqrt{6 \cdot 13}}{69} \geq 0$$

$$26 \geq 18 + 6\sqrt{6 \cdot 13}$$

$$8 \geq 6\sqrt{6 \cdot 13}$$

$$x \neq \frac{6 + 2\sqrt{6 \cdot 13}}{69}$$

$$(2): 1 - 9 \cdot \frac{6 - 2\sqrt{6 \cdot 13}}{69} \geq 0$$

$$26 \geq 18 - 6\sqrt{6 \cdot 13}$$

$$8 \geq 9 - 6\sqrt{6 \cdot 13} \quad \checkmark$$

$$(1): \sqrt{3x^2 - 6x + 2} - (1 - 9x) = 1 > 0$$

Ответ: $\left\{ \frac{1}{9}; \frac{6 - 2\sqrt{6 \cdot 13}}{69} \right\}$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☒	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Завершили B , тогда $y_1 = (2x_2 + y_2 - 14) - 2x_1$.
Минимум главной, причем, если
 $2x_2 + y_2 - 14$ принимает какое-то целое
значение на отрезке $[0; 32]$, то будет целочислен
13 координат A , т.к. координаты
при x равен -2 , а $\tan \angle QPO = -2$.

$$2x_2 + y_2 - 14 = c$$

$$y_2 = c + 14 - 2x_2$$

Точка B лежит в параллелограмме, поэтому
 $c + 14$ принимает целые значения от 0 до 32 .
 c принимает значения от 0 до 32 ,
тогда $c \in \mathbb{Z}$ и $c \in [0; 18]$. При каждом c
целочислен 13 точек B .

Получили, что всего удовлетворяющих условию
точек $19 \cdot 13 \cdot 13$

Ответ: $19 \cdot 13^2$.

* и все целые точки внутри параллелограмма
лежат на прямой $y = k - 2x$, где $k \in \mathbb{Z}; k \in [0; 32]$

1 2 3 4 5 6 7
☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☒ ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$\begin{cases} ax + y - 8b = 0 & (1) \\ (x^2 + y^2 - 1)(x^2 + (y - 12)^2 - 16) \geq 0 & (2) \end{cases}$$

12: $(x^2 + y^2 - 1)(x^2 + (y - 12)^2 - 16) \leq 0$

$$x^2 + y^2 - 1 = 0$$

$$x^2 + y^2 = 1$$

Это окружность с центром
в точке $(0; 0)$ и радиусом 1

$$x^2 + (y - 12)^2 - 16 = 0$$

$$x^2 + (y - 12)^2 = 16$$

Это окружность с центром
в точке $(0; 12)$ и радиусом 4.

Рассуждая, что неравенство
удовлетворяется все точки
внутри окружностей и
на их границах

a): $ax + y - 8b = 0$

Это прямая, заметим,
если она пересекает хотя бы
одну из окружностей, то
решений будет бесконечно
много, значит эта прямая
касается одной из окружностей.

Заметим, что если из центра окружности,
пересекающей одну из окружностей внутренно,
провести в точку $(0; 12)$, а второй - в точку $(0; -4)$,
тогда все точки касания пересекают хотя
бы одну из окружностей.

I $\begin{cases} y = 12 - ax \\ x^2 + y^2 = 1 \end{cases}$

$$x^2(1 + a^2) - 24ax + 144 = 0$$

$$D = 576a^2 - 4(144 - 144a^2) = 0$$

$$a^2 = 1/3$$

$$a = \pm \sqrt{1/3}$$

Получим $b = 0, 3$

Ответ: $\{\sqrt{1/3}, 1/3; -\sqrt{1/3}, 1/3\}$

II $\begin{cases} y = -4 - ax \\ x^2 + y^2 = 16 \end{cases}$

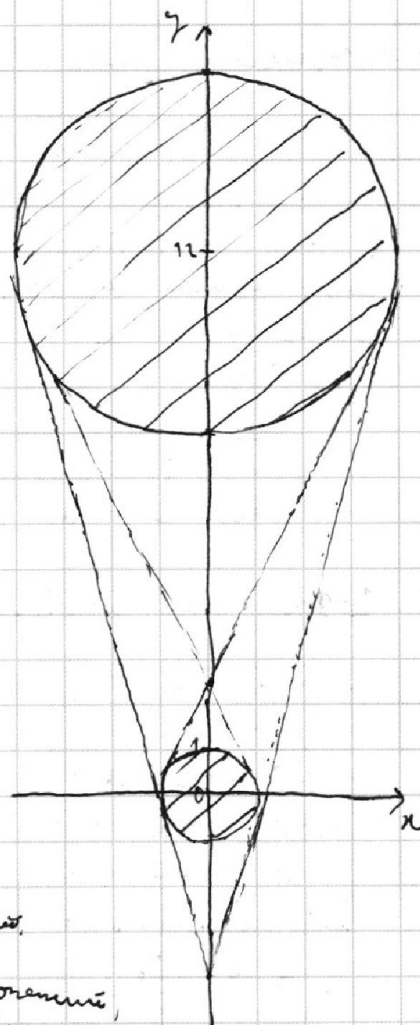
$$(a^2 + 1)x^2 + 8ax + 16 = 0$$

$$D = 64a^2 - 16(a^2 + 1) = 0$$

$$a^2 = 1/5$$

$$a = \pm \sqrt{1/5}$$

Получим $b = -1/2$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7
☒ ☒ ☒ ☒ ☒ ☒ ☒

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$\sqrt{3x^2 - 6x + 2} - \sqrt{3x^2 + 3x + 1} = 1 - 9x$$

Найдем область определения:

$$1 - \frac{\sqrt{3}}{3} \leq x \leq 1 + \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$-9 + 3\sqrt{3} \geq -9x \geq -9 - 3\sqrt{3}$$

$$0 > -9 + 3\sqrt{3} \geq 1 - 9x \geq -9 - 3\sqrt{3}$$

Проверим, что верности
интервала меньше нуля

$$\sqrt{3x^2 - 6x + 2} - \sqrt{3x^2 + 3x + 1} \checkmark 0$$

$$\sqrt{3x^2 - 6x + 2} \leq \sqrt{3x^2 + 3x + 1}$$

Извлекая из
выражений не
меньше нуля!

$$3x^2 - 6x + 2 \leq 3x^2 + 3x + 1$$

$$1 - 9x < 0$$

Проверим, что верности
интервала меньше нуля:

$$\sqrt{3x^2 - 6x + 2} - \sqrt{3x^2 + 3x + 1} = 1 - 9x$$

$$\sqrt{3x^2 - 6x + 2} - (1 - 9x) = \sqrt{3x^2 + 3x + 1} \quad (\text{с каждой стороны
выносим больше
нулей})$$

$$3x^2 - 6x + 2 - 2(1 - 9x) \sqrt{3x^2 - 6x + 2} + (1 - 9x)^2 = 3x^2 + 3x + 1$$

$$1 - 9x - 2(1 - 9x) \sqrt{3x^2 - 6x + 2} + (1 - 9x)^2 = 0$$

$$(1 - 9x)(1 - 2\sqrt{3x^2 - 6x + 2} + 1 - 9x) = 0$$

$$\uparrow < 0$$

$$2 - 9x - 2\sqrt{3x^2 - 6x + 2} = 0$$

не больше нуля

$$0 > -7 + 3\sqrt{3} \geq 2 - 9x \geq -7 - 3\sqrt{3}$$

Проверим, что корни нет.

$$2 - \frac{18 - 6\sqrt{6 \cdot 73}}{13} \checkmark 0$$

$$26 \checkmark 18 - 6\sqrt{6 \cdot 73}$$

$$\begin{cases} 3x^2 - 6x + 2 \geq 0 & (1) \\ 3x^2 + 3x + 1 \geq 0 \end{cases}$$

$$(1) \quad 3x^2 - 6x + 2 \geq 0$$

$$D = 36 - 24 = 12$$

$$x_1 = \frac{6 + 2\sqrt{3}}{6} = 1 + \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$x_2 = \frac{6 - 2\sqrt{3}}{6} = 1 - \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$1 - \frac{\sqrt{3}}{3} \leq x \leq 1 + \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$(2) \quad 3x^2 + 3x + 1 \geq 0$$

$$D = 9 - 12 < 0$$

Самый маленький

равен нулю, значит

$$3x^2 + 3x + 1 \geq 0 \quad \forall x \in (-\infty; +\infty)$$

$$\text{Проверим, что } 1 - \frac{\sqrt{3}}{3} \leq x \leq 1 + \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$\times 4$$

$$69$$

$$36$$

$$24$$

$$+ 276$$

$$36$$

$$- 312$$

$$3$$

$$- 12$$

$$4$$

$$3 \cdot 4 \cdot 26$$

$$13$$

$$104$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☒ 2 ☒ 3 ☒ 4 ☒ 5 ☒ 6 ☒ 7 ☒

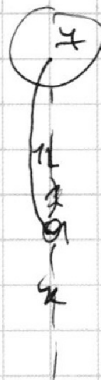
МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$\sqrt{(b+c-a)^2 + r^2} = \frac{b+c-a}{\frac{2+ab^2+ac^2}{bc}}$$

$$(b+c-a)^2 + r^2 = \frac{bc(b+c-a)^2}{2+ab^2+ac^2}$$



$$\frac{x}{n} = \frac{n+n}{4}$$

$$4n = n + 12$$

$$3n = 12$$

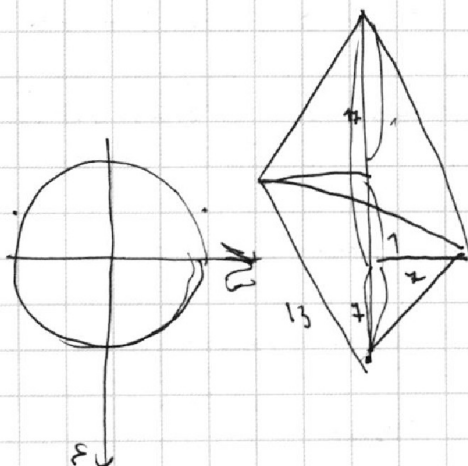
$$n = 4$$

$$\frac{1}{n} = \frac{4}{n-2}$$

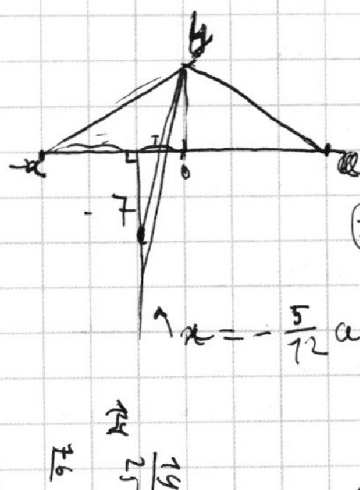
$$12 - n = 4n$$

$$12 = 5n$$

$$n = 2,4$$



12
12
12



x

13
23
39
13
119

$$(7+b)^2 + \frac{5}{12}a^2 = 13^2$$

$$49 + 14b + b^2 + \frac{5}{12}a^2 = 169$$

$$a^2 + b^2 = 13^2$$

$$49 + 14b +$$

$$b = \sqrt{13^2 - a^2}$$

$$(7 + \sqrt{13^2 - a^2})^2 + \frac{5}{12}a^2 = 169$$

$$a^2 = \frac{144}{25} (13^2 - (b+7)^2)$$

$$5 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 13^2 - 5 \cdot 7 \cdot 6 (b+7)^2 = 13^2$$

$$13^2 \cdot 7 \cdot 6 = 5 \cdot 7 \cdot 6 (b+7)^2$$

$$13^2 \cdot 119 = 5 \cdot 44 (b+7)^2$$

$$b+7 = \sqrt{\frac{13^2 \cdot 119}{5 \cdot 44}}$$

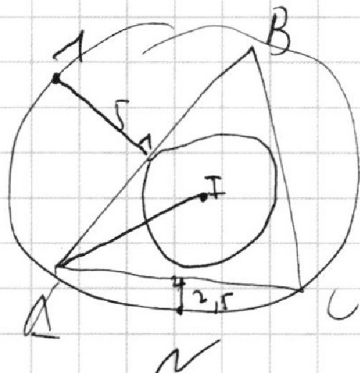
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☒ 2 ☒ 3 ☐ 4 ☒ 5 ☒ 6 ☒ 7 ☒

МФТИ

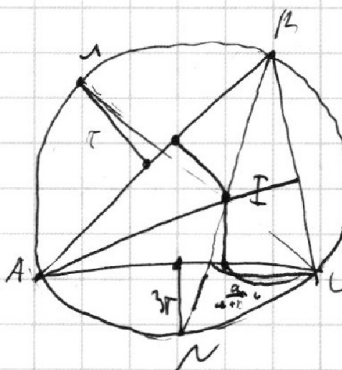
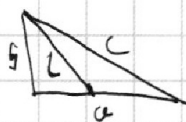
Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$\cos \alpha = \cos^2 \frac{\alpha}{2} - \sin^2 \frac{\alpha}{2} =$$

$$= 1 - 2 \sin^2 \frac{\alpha}{2}$$

$$\sin^2 \frac{\alpha}{2} = \frac{1 - \cos \alpha}{2}$$



$$\cos \alpha = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$$

$$\frac{a}{b}$$

$$AI = \frac{r}{\sin \frac{\alpha}{2}}$$

$$= \frac{r}{\sqrt{\frac{1 - \cos \alpha}{2}}} = \frac{\frac{b+c-a}{2}}{\cos \frac{\alpha}{2}} =$$

$$= \frac{\frac{b+c-a}{2}}{\sqrt{\frac{1 - \frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}}{2}}} = \frac{\frac{b+c-a}{2}}{\sqrt{\frac{1 + \frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}}{2}}} = \frac{b+c-a}{\sqrt{\frac{2+b^2+c^2-a^2}{bc}}}$$

$$\frac{1}{2} \left(\frac{a+b-c}{a+b} \right) =$$

$$= \left(\frac{a+b-c}{2(a+b)} \right) =$$

$$= \frac{c(b-a)}{2(a+b)}$$

$$\frac{7^2}{12^2} + \frac{7^2}{13^2} = 91$$

$$\frac{7^2}{12^2} = \frac{b^2 \left(\frac{c-a}{2(a+b)} \right)}{(a-b)(a+b)} =$$

$$\frac{b \left(\frac{c-a}{2(a+b)} \right)}{a+b} = \frac{a}{a+b}$$

$$\frac{14}{144}$$

$$7 \cdot$$

$$= \frac{b}{a+b}$$

$$r = \frac{2 \cdot 5 \cdot (a+b-c)}{b} = \frac{5(a+b-c)}{c}$$

$$\frac{-c + a + b}{2} - \frac{ab}{a+b} =$$

$$7^2 \cdot 12^2 + 7^2 \cdot 13^2 - 13^2 \cdot 12^2 =$$

$$= 7^2 (12^2 + 13^2) - 13^2 \cdot 12^2 = 2 \cdot \frac{(a+b-c) \cdot c}{(a+b-c) \cdot b}$$

$$= \frac{(a+b)(a+b-c) - 2ab}{2(a+b)} =$$

$$= 7^2 \cdot 12^2 + 7^2$$

$$= \frac{a^2 + ab - ac + ca + cb - c^2 - 2ab}{2(a+b)} =$$

$$= \frac{c-a}{2(a+b)} \cdot \frac{(a-b+c)}{2(a+b)}$$

$$= \frac{a^2 - ab - ac + ca + cb - c^2}{2(a+b)} =$$

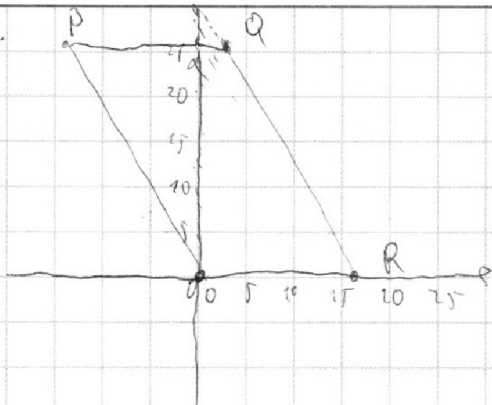
На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☒	☒	☒	☒	☒	☒	☒

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$2x_1 = 2x_2 + y_2 - y_1 = 14$$

$$2x_1 + y_1 = 2x_2 + y_2$$

$$2x_1 + y_1 + 14 = 2x_2 + y_2$$

$$y_1 = (2x_2 + y_2 - 14) - 2x_1$$

$$2x_2 + y_2 - 14 \in [0; 18]$$

$$2x_2 + y_2 - 14 = 0$$

$$y_2 = 14 - 2x_2$$

$$2\sqrt{13^2 - a^2} = \frac{14}{144} a^2 - 4$$

$$C \in [0; 32]$$

$$C \in [0; 32]$$

$$C \in [0; 18]$$

$$\begin{array}{r} 119 \mid 7 \\ 70 \mid 77 \\ \hline 49 \end{array}$$

$$y = -4 - ax$$

$$x^2 + y^2 = 1$$

$$\sqrt{13^2 - a^2} + 2 + \frac{5}{12} a^2 = 13$$

$$13^2 - a^2 + 49 + 14\sqrt{13^2 - a^2} + \frac{25}{144} a^2 = 13^2$$

$$14\sqrt{13^2 - a^2} = -\frac{119}{144} a^2 - 49$$

$$\begin{cases} y = 2,4 - ax \\ x^2 + y^2 = 1 \end{cases}$$

$$x^2 + (2,4 - ax)^2 = 1$$

$$x^2 + a^2 x^2 - 4,8ax + 5,76 = 1$$

$$(1+a^2)x^2 - 4,8ax + 4,76 = 0$$

$$D = 5,76a^2 - 4,76 = 0$$

$$a = 2,4$$

$$1 - 4,76a^2 = 0$$

$$a^2 = \frac{1}{4,76}$$

$$a = \pm \sqrt{\frac{1}{4,76}}$$

$$x^2 + 16 + a^2 x^2 + 14x = 9$$

$$(a^2 + 1)x^2 + 14x + 7 = 0$$

$$D = 46a^2 - 12a - 12 = 0$$

$$4a^2 = 12$$

$$a^2 = 3$$

$$(a^2 + 1)x^2 + 8xa = 0$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7
☒ ☒ ☒ ☒ ☒ ☒ ☒

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$ab : 2^{15} 7^{11}$$

$$bc : 2^{17} 7^{18}$$

$$ac : 2^{23} 7^{39}$$

$$a^2 b^2 c^2 : 2^{15+17+23} 7^{11+18+39}$$

$$a^2 b^2 c^2 : 2^{55} 7^{68}$$

$$\begin{array}{r} 14 \\ + 14 \\ \hline 28 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 32 \\ + 23 \\ \hline 55 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 50 \\ + 18 \\ \hline 68 \end{array}$$

$$abc : 2^{28} 7^{44}$$

$$abc : 2^{28} 7^{44}$$

$$a = 2^{11} 7^{16}$$

$$b = 2^4$$

$$c = 2^{13} 7^{23}$$

$$m_a + m_b \geq 11$$

$$m_c + m_b \geq 18$$

$$m_a + m_c \geq 39$$

$$a = 2^{t_a} 7^{m_a}$$

$$t_a + t_b \geq 15$$

$$t_a = t_b + t_c = 28$$

$$28 - t_c \geq 15$$

$$t_c \leq 13$$

$$t_b + t_c \geq 14$$

$$28 + t_a \geq 17$$

$$t_a \leq 11$$

$$\begin{array}{r} 2^{11} \\ 2^4 \\ 2^{13} \\ \hline 2^6 \\ 2^7 \\ 2^3 \end{array}$$

$$m_a + m_b + m_c \geq 29 - m_b$$

$$\begin{array}{r} 23 \\ 16 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} x \quad b \\ 17 \\ \hline 49 \\ 7 \\ \hline 719 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 17 \\ 17 \\ \hline 119 \\ 17 \\ \hline 289 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 11900 \\ - 10289 \\ \hline 1611 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 10000 \\ - 289 \\ \hline 9711 \\ - 10289 \\ \hline 711 \\ - 11900 \\ \hline 89 \end{array}$$

$$m_a + m_b \geq 11$$

$$39 - m_c \geq 11$$

$$m_c \leq 28$$

$$10000 + 289 - 11900$$

$$11219$$

$$\begin{array}{r} 1611 \\ 4 \\ \hline 119 \\ 71 \\ \hline 63 \\ 89 \end{array}$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☒ 2 ☒ 3 ☒ 4 ☒ 5 ☒ 6 ☒ 7 ☒

МФТИ

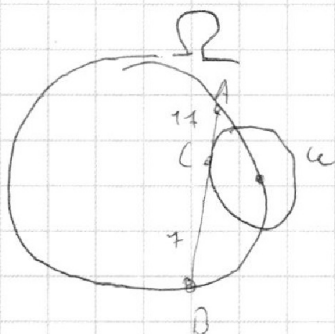
Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$(a, b) = 1$$

$$49b^2 - 4b^2$$

13



$$\frac{a+b \cdot p}{(a+b)^2 - 9ab}$$

$$a+b \cdot p$$

$$\text{сокр. } p$$

$$g, p$$

$$g$$

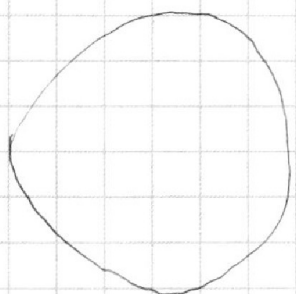
$$\begin{array}{r} 100 + 8 \\ 100 + 8 \\ \hline 10000 + 64 - 4 \cdot 1008 \\ 108 \\ 10064 - 4000 = 6064 \\ 11 \cdot 7 \end{array}$$

$$a = 4$$

$$b = 5$$

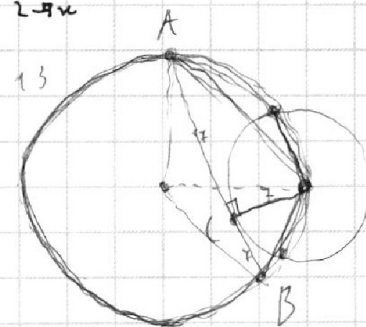
$$\frac{4+5}{16 - 4 \cdot 5 + 25}$$

$$\frac{11+7}{11+49-4 \cdot 7 \cdot 11}$$



$$(1-9u)(1-2\sqrt{3u^2-6u+2}+1-9u)=0$$

$$1-9u-2\sqrt{3u^2-6u+2}=0$$



$$\begin{array}{r} -7 + 3\sqrt{3} < 0 \\ 3\sqrt{3} \sqrt{4} \\ 27 \sqrt{49} \end{array}$$

1

$$3u^2 - 6u + 2 \geq 0$$

$$D = 9 - 6 = 3$$

$$u_{1,2} = \frac{3 \pm \sqrt{3}}{3} = 1 \pm \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$3u^2 + 3u + 1 \geq 0$$

$$D = 9 - 4 \cdot 3 =$$

$$\sqrt{3u^2-6u+2} = \sqrt{3u^2+3u+1}$$

$$3u^2-6u+2 \leq 3u^2+3u+1$$

$$1-9u \leq 0$$

$$\sqrt{3u^2-6u+2} - 1 + 9u = \sqrt{3u^2+3u+1}$$

$$3u^2-6u+2 - 2(1-9u)\sqrt{3u^2-6u+2} + (1-9u)^2 = 3u^2+3u+1$$

$$(1-9u) - 2(1-9u)\sqrt{3u^2-6u+2} + (1-9u)^2 = 0$$

