



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

10 КЛАСС. Вариант 9



1. [4 балла] Натуральные числа a , b , c таковы, что ab делится на $2^{14}7^{10}$, bc делится на $2^{17}7^{17}$, ac делится на $2^{20}7^{37}$. Найдите наименьшее возможное значение произведения abc .
2. [4 балла] Известно, что дробь $\frac{a}{b}$ несократима ($a \in \mathbb{N}$, $b \in \mathbb{N}$). На доске записана дробь

$$\frac{a+b}{a^2-6ab+b^2}.$$

При каком наибольшем m могло оказаться, что числитель и знаменатель дроби можно сократить на m ?

3. [4 балла] Центр окружности ω лежит на окружности Ω , хорда AB окружности Ω касается ω в точке C так, что $AC : CB = 7$. Найдите длину AB , если известно, что радиусы ω и Ω равны 1 и 5 соответственно.
4. [5 баллов] Решите уравнение

$$\sqrt{2x^2 - 5x + 3} - \sqrt{2x^2 + 2x + 1} = 2 - 7x.$$

5. [5 баллов] На координатной плоскости дан параллелограмм с вершинами в точках $O(0;0)$, $P(-12;24)$, $Q(3;24)$ и $R(15;0)$. Найдите количество пар точек $A(x_1; y_1)$ и $B(x_2; y_2)$ с целыми координатами, лежащих в этом параллелограмме (возможно, на границе) и таких, что $2x_2 - 2x_1 + y_2 - y_1 = 12$.
6. [5 баллов] Найдите все значения параметра a , для каждого из которых найдётся значение параметра b , при котором система

$$\begin{cases} ax - y + 10b = 0, \\ ((x+8)^2 + y^2 - 1)(x^2 + y^2 - 4) \leq 0 \end{cases}$$

имеет ровно 2 решения.

7. [6 баллов] Треугольник ABC вписан в окружность. Пусть M – середина той дуги AB описанной окружности, которая не содержит точку C ; N – середина той дуги AC описанной окружности, которая не содержит точку B . Найдите расстояние от вершины A до центра окружности, вписанной в треугольник ABC , если расстояния от точек M и N до сторон AB и AC соответственно равны 4,5 и 2.



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☒	☐	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$\sqrt{1}$

$$ab = m \cdot 2^{14} \cdot 7^{10}, bc = k \cdot 2^{18} \cdot 7^{17}, ac = 2^{20} \cdot 7^{37} \cdot r$$

$$ab^2c = mk \cdot 2^{51} \cdot 7^{64} \Rightarrow b^2 = \frac{mk}{r} \cdot 2^{11} \cdot 7^{10}, \frac{mk}{r}_{\min} = 2^1 \cdot 7^{10}$$

$$abc^2 = kr \cdot 2^{37} \cdot 7^{54} \Rightarrow c^2 = \frac{kr}{m} \cdot 2^{23} \cdot 7^{44}, \frac{kr}{m}_{\min} = 2^6$$

$$a^2bc = mr \cdot 2^{34} \cdot 7^{44} \Rightarrow a^2 = \frac{mr}{k} \cdot 2^{16} \cdot 7^{30}, \frac{mr}{k}_{\min} = 2^8$$

$$a^2b^2c^2 = 2^{51} \cdot 7^{64} \cdot mrk, mrk_{\min} = 2^1 \cdot 7^{10} \cdot 2^6 \cdot 2^8 = 7^{10} \cdot 2^{25}$$

$$\Rightarrow abc = \sqrt{2^{51} \cdot 7^{64} \cdot 7^{10} \cdot 2^{25}} = 7^{37} \cdot 2^{26}$$

$$\text{Ответ: } abc_{\min} = 7^{37} \cdot 2^{26}$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☒	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\sqrt{2}$$

$$\frac{a+b}{a^2 - 6ab + b^2}, b = a + r : \frac{2a+r}{a^2 + 4a^2 + 2ar + r^2 - 6a(a+r)} =$$

$$= \frac{2a+r}{2a^2 + r^2 + 2ar - 6a^2 - 6ar} = \frac{2a+r}{r^2 - 4a^2 - 4ar - r^2 + r^2} =$$

$$= \frac{2a+r}{-(2a+r)^2 + 2r^2}, 2a+r = mk, -(2a+r)^2 + 2r^2 = m\ell$$

$$- m^2 k^2 + 2r^2 = m\ell, m \frac{k^2}{\ell} = -\frac{1}{(2a+r) + \frac{2r^2}{2a+r}}$$

$$\frac{m^2 k^2}{m\ell} = m \frac{k^2}{\ell} : \frac{\ell}{mk^2} = \frac{2r^2}{(2a+r)^2}$$

Ответ: $m = 4$

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☒	☐	☐	☐	☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$\sqrt{3}$

Дано:

$$AC:CB = 7:1, R=5, r=1$$

R -радиус окр. Ω

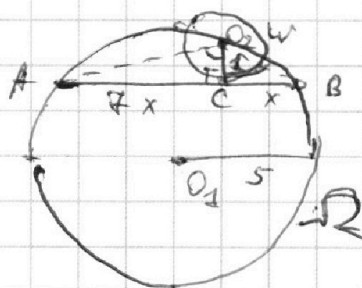
r -радиус окр. ω

Найти: AB

Решение:

1. Для $\triangle AO_2B$:

$$\frac{8x}{\sin \angle AO_2B} = 2R = 10.$$



$$\sin \angle AO_2B = \sin(\angle AO_2C + \angle CO_2B) = \sin \angle AO_2C \cos \angle CO_2B + \sin \angle CO_2B \cos \angle AO_2C$$

$$\sin \angle AO_2C = \frac{7x}{\sqrt{49x^2+1}}, \cos \angle AO_2C = \frac{1}{\sqrt{49x^2+1}}, \sin \angle CO_2B = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}},$$

$$\cos \angle CO_2B = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}, \Rightarrow \sin \angle AO_2B = \frac{7x}{\sqrt{49x^2+1}} \cdot \frac{1}{\sqrt{x^2+1}} + \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} \cdot \frac{1}{\sqrt{49x^2+1}} = \frac{8x}{\sqrt{x^2+1} \sqrt{49x^2+1}}$$

$$\Rightarrow 8x \cdot \frac{1}{\sin \angle AO_2B} = 8x \cdot \frac{\sqrt{x^2+1} \sqrt{49x^2+1}}{8x} = 10,$$

$$(x^2+1)(49x^2+1) = 100, 49x^4 + 50x^2 - 99 = 0, 49t^2 + 50t - 99 = 0,$$

$$t = \frac{-50 \pm \sqrt{4(5^2 + 7^2 \cdot 99)}}{2 \cdot 49} = \frac{2\sqrt{1369} - 25}{49} = x^2, x = \frac{\sqrt{2\sqrt{1369} - 25}}{7}$$

$$AB = 8x = \frac{8}{7} \sqrt{2\sqrt{1369} - 25}$$

$$\text{Ответ: } \frac{8}{7} \sqrt{2\sqrt{1369} - 25}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☒	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$\sqrt{2x^2 - 5x + 3} \stackrel{a}{=} \sqrt{2x^2 + 2x + 1} \stackrel{b}{=} \sqrt{4} = 2 - 7x$$

$$\begin{cases} a^2 - b^2 = 2 - 7x & (a-b)(a+b) = a-b \\ a-b = 2-7x \end{cases}$$

$$a=b: \sqrt{2x^2 - 5x + 3} = \sqrt{2x^2 + 2x + 1}, \Rightarrow 2 - 7x = 0, \\ \boxed{x = \frac{2}{7}}$$

$$\text{ОДЗ: } 2x^2 - 5x + 3 \geq 0, \quad x = \frac{5 \pm \sqrt{1}}{4} = \frac{3}{2}; 1.$$

$$\begin{array}{c} + \quad - \quad + \\ \hline 1 \quad \frac{3}{2} \end{array}$$

$$2x^2 + 2x + 1, \quad D = 4 - 8 < 0, \\ x \in \text{любых}$$

$$a \neq b: \quad a+b=1, \quad \sqrt{2x^2 - 5x + 3} = 1 - \sqrt{2x^2 + 2x + 1},$$

$$2x^2 - 5x + 3 = 1 + 2x^2 + 2x + 1 - 2\sqrt{2x^2 + 2x + 1}$$

$$2\sqrt{2x^2 + 2x + 1} = 7x - 1, \quad 7x - 1 \geq 0, \quad x > \frac{1}{7}:$$

$$8x^2 + 8x + 4 = 49x^2 - 14x + 1, \quad 41x^2 - 22x - 3 = 0,$$

$$x = \frac{22 \pm \sqrt{484 + 492}}{41 \cdot 2} = \frac{11 \pm 2\sqrt{61}}{41}, \quad \boxed{x = \frac{11 + 2\sqrt{61}}{41}}$$

$$\text{Ответ: } x = \frac{2}{7}; \frac{11 + 2\sqrt{61}}{41}$$

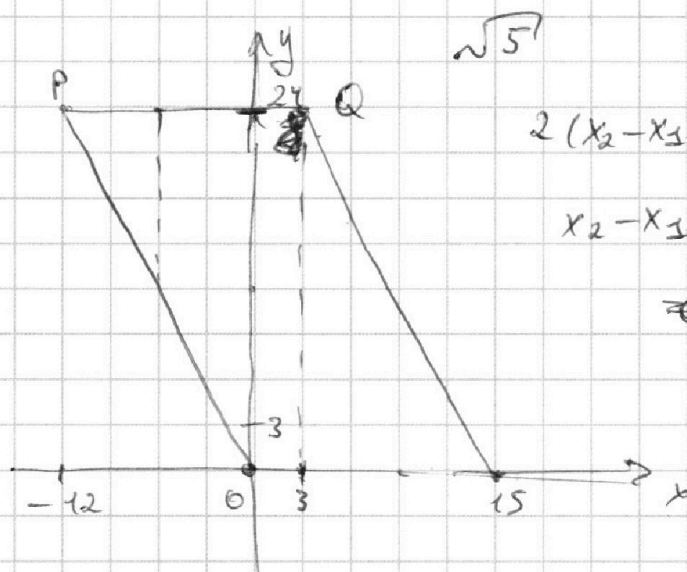
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☒	☐	☐



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$\sqrt{5}$

$$2(x_2 - x_1) + (y_2 - y_1) = 12.$$

$$x_2 - x_1 = 0 : (\cancel{15} + 13) = 28 =$$

$$= 28 \cdot (1 + \dots + 13/2) =$$

$$= 7 \cdot 13 \cdot 2$$

$$x_2 - x_1 = 1 : 15 \cdot 3 \cdot 2 +$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☒ ☐

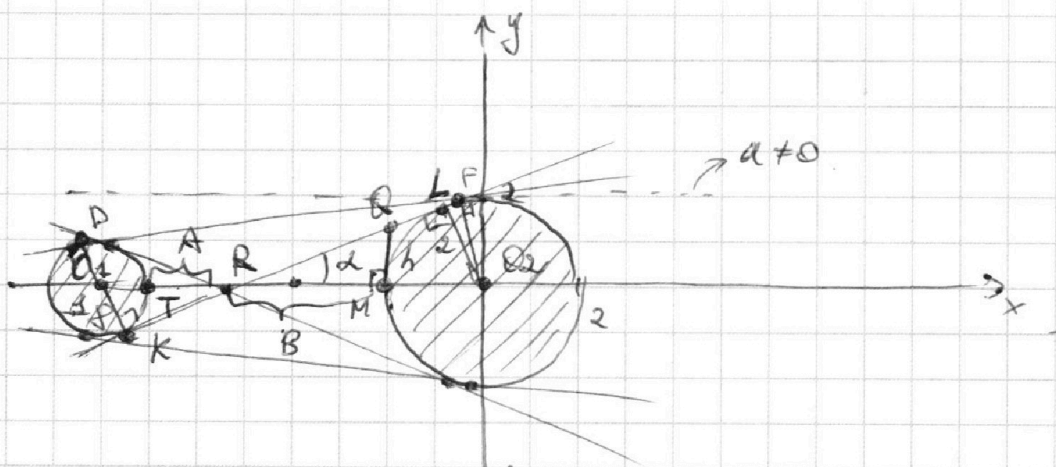
Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

$$\sqrt{67}$$

$$((x+8)^2 + y^2 - 1)(x^2 + y^2 - 4) \leq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 - 4 \leq 0 \\ (x+8)^2 + y^2 - 1 \geq 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - 4 \geq 0 \\ (x+8)^2 + y^2 - 1 \leq 0 \end{cases}$$


$$\Delta O_1 K R \sim \Delta R L O_2, k = \frac{1}{2}. \text{ Since } TR = A, RM = B, \alpha = \angle O_2 R L$$

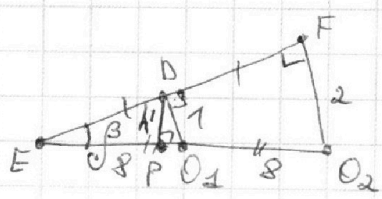
Тогда проведём из M перпендикуляр h . (MQ).

$$\Delta MQR \sim \Delta RLQ_2: \frac{B}{RL} = \frac{h}{2}$$

$$\triangle O_1KR \sim \triangle RLO_2: (A+1) \cdot 2 = B+2, A+B=5, A=\frac{5}{3}$$

$$B = \frac{10}{3}, RL = \sqrt{(B+2)^2 - 2^2} = \sqrt{\frac{4 \cdot 55}{9}} = \frac{2}{3} \sqrt{55}$$

$$\Rightarrow h = \frac{2B}{RL} = \frac{20}{3} \cdot \frac{3}{2\sqrt{55}} = \frac{10}{\sqrt{55}}, \Rightarrow a_1 = \lg a = \frac{h}{B} = \frac{10}{\sqrt{55}} \cdot \frac{3}{20} = \frac{3}{\sqrt{55}}, a_2 = -\frac{3}{\sqrt{55}}$$



h' - перпендикуляр на EO_2 из D (DP)

$$\triangle EDP \sim \triangle EFQ: \frac{h'}{2} = \frac{\sqrt{63}}{16} \quad h' = \frac{\sqrt{63}}{8}$$

$$EP = \sqrt{8^2 - 1^2} = \sqrt{63}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☒	☐

 МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$\sqrt{63}$ (предположение)

Итого $a_3 = \tan \beta = \frac{h_1}{EP}$, $EP = \cancel{63} = 8 - \sqrt{1 - (h_1')^2} =$
 $= 8 - \sqrt{1 - \frac{63'}{64}} = \frac{63}{8}$, $\Rightarrow \tan \beta = \frac{\sqrt{63}}{8} \cdot \frac{8}{63} = \frac{1}{\sqrt{63}} = a_3$,
 $a_4 = -\frac{\sqrt{63}}{63}$

Ответ: $a = \cancel{\frac{3\sqrt{55}}{55}} \pm \frac{3\sqrt{55}}{55}; \pm \frac{\sqrt{63}}{63}$



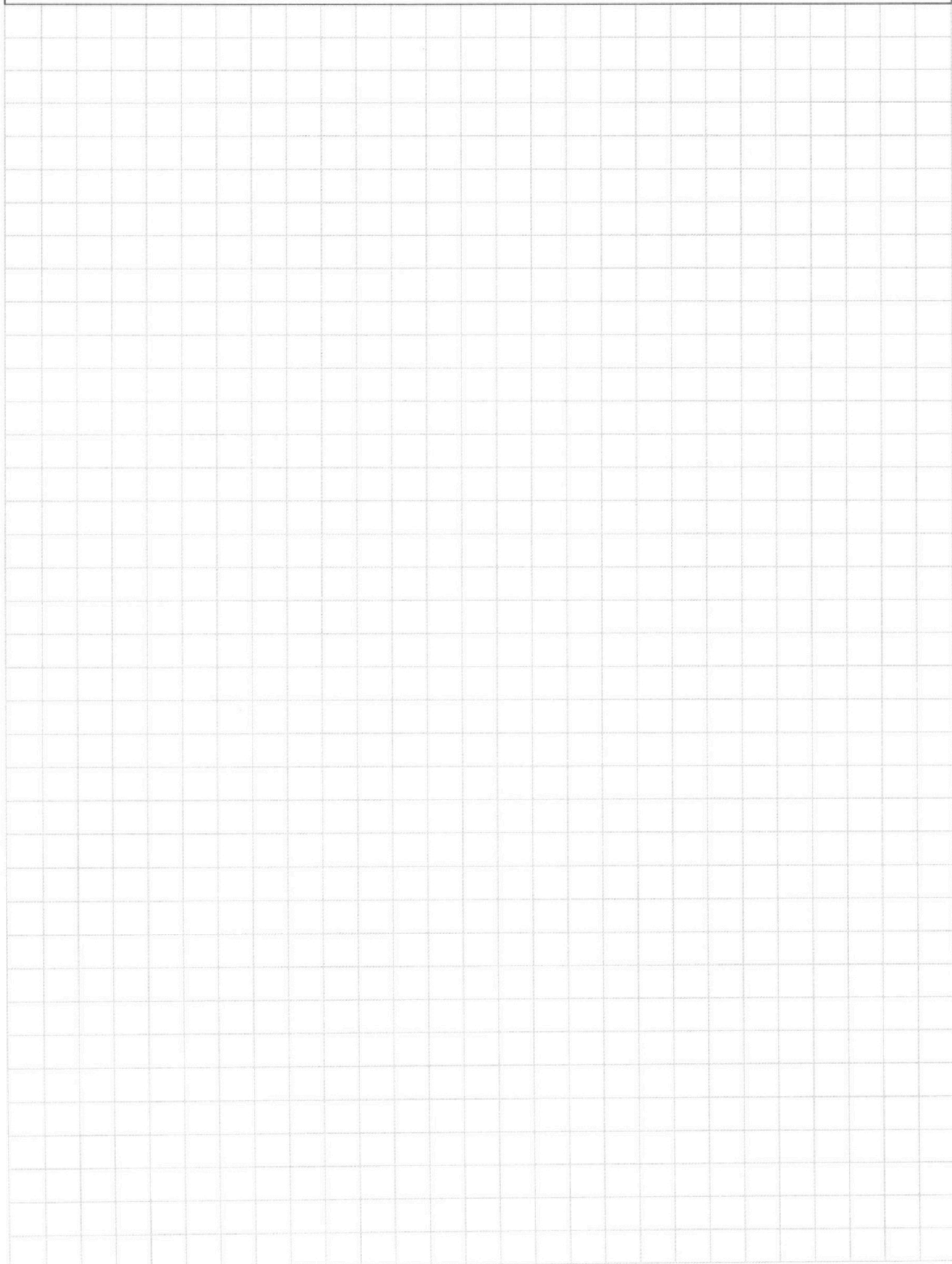
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!





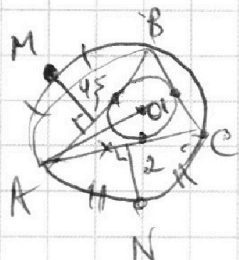
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$mk = 2^a \cdot 7^{10} \cdot 2^{b+c} \quad | \text{or}$$

$$mkr = 2^a \cdot 7^{10} \cdot 2^{b+c} \quad | \text{or}$$

$$2^b \cdot 2^c = 7^{10} \cdot 2^{a+b+c} = 7^{10} \cdot 2^1$$

$$a+b+c = 1$$

$$\Rightarrow 7^{10} \cdot 2$$

$$\begin{array}{r} 1369 \overline{) 16} \\ - 128 \overline{) 8} \\ \hline 89 \end{array}$$
$$\sqrt{2r} = p(2a+n)$$
$$p^2 = 2 \cdot 16$$
$$p = 4$$
$$1369 \overline{) 16} \\ - 128 \overline{) 8} \\ \hline 89$$

$$\frac{1369}{2} = 684.5$$

$$\frac{3 \cdot 1369}{2} = 2053.5$$

$$d = 5$$

$$mk \cdot kr \cdot mr \cdot nr$$

$$abc = \sqrt{2^{51} \cdot 7^{64} \cdot mkr} \cdot kmr$$
$$= 2^{\frac{51}{2}} \cdot 7^{\frac{32}{2}} \cdot \sqrt{mkr}$$

$$a^2 b^2 c^2 = 2^{34} \cdot 7^4$$

$$bc = 2^{17} \cdot 7^2$$

$$a^2 = 2^{17} \cdot 7^{30} \cdot \left(\frac{mk}{k}\right) = 2^3$$
$$a = 2^{\frac{17}{2}} \cdot 7^{15}$$

$$abc = \sqrt{2^{51} \cdot 7^{64} \cdot 2^{40} \cdot 7^{10}} = 2^{52.5} \cdot 7^{37}$$

$$\frac{mr}{k} = 2, \quad \frac{mk}{r} = 2 \cdot 7^{10}$$

$$\frac{kr}{m} = 2$$

$$\sqrt{2^{54} \cdot 7^{74}} = \sqrt{2^{27} \cdot 7^{37} \cdot 2^{27} \cdot 7^{37}} = 2^{27} \cdot 7^{37}$$

$$\frac{mr}{k} = 2$$

$$\frac{mr}{k} \cdot \frac{kr}{m} = 4 = 2^2 \cdot 2^0 = r^2$$
$$r^2 = 4$$
$$r = 2$$

$$\frac{mk}{r} = 2^a \cdot 7^{10}, \quad \frac{kr}{m} = 2^b$$

$$\frac{mr}{k} = 2^b, \quad \frac{mk}{r} = 2^a$$

$$\boxed{r^{\frac{3}{2}} = 2^{\frac{b+c}{2}}}$$

$$r = 2, \quad \frac{k^2}{2} = 2 \cdot 7^{10}, \quad \frac{m}{k} = 1$$

$$k^2 = 4 \cdot 7^{10}, \quad k = 2 \cdot 7^5$$

$$\boxed{r = 2}$$

$$\boxed{k = 2 \cdot 7^5 = m}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$x^2 = t \quad 49t^2 + 50t - 99 = 0$$

$$\frac{a}{b} = \text{крестр.}$$

$$t = \frac{-50 \pm \sqrt{50^2 + 49 \cdot 99}}{98}$$

$$a + b = mA \quad a^2 - 6ab + b^2 = mB$$

$$a^2 + b^2 + 2ab = m^2 A^2$$

$$a^2 + b^2 - 6ab = mB$$

$$49x^2 + 2 + 49x + x^2 = 100$$

$$= 49x^4 + 50x^2 + x^2 = 99$$

$$C = mA^2 - B$$

$$2+3=6$$

$$8ab = m^2 A^2 - mB = m(mA^2 - B)$$

$$ab \div m$$

$$ab \div mA^2 - B$$

$$\frac{a+b}{6} \cdot (1+x^2) \cdot 100$$

$$a(a-cb) + b^2$$

$$a(a-cb) + b^2$$

$$b = a + r$$

$$8x \sqrt{1+x^2} = 10$$

$$\sin x = \frac{7x}{\sqrt{49x^2+1}}$$

$$b^2 \div (a-cb)$$

$$b^2 = (a-cb)/k$$

$$(a+k)(a-cb) \quad k \neq b$$

$$a+b$$

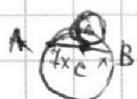
$$50^2 + 49 \cdot 99 \cdot 4$$

$$x^2 = \sqrt{7+x^2} \cdot (\sqrt{1+x^2} - 1)$$

$$O_2 B = \sqrt{1+x^2}$$

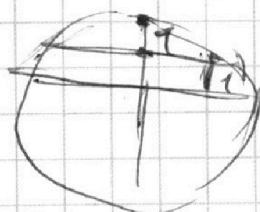
$$x^2 = 1+x^2 - \sqrt{1+x^2}$$

$$AB = 8x$$

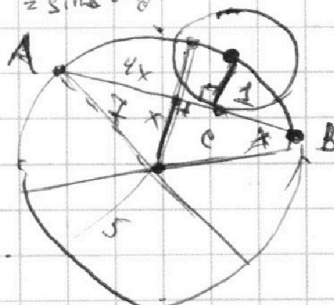


$$\frac{8x}{\sin x} = 10 = 2 \cdot R$$

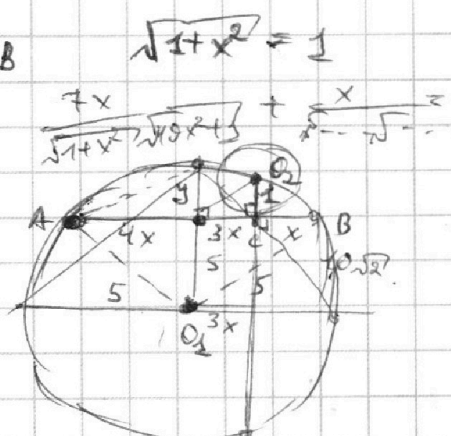
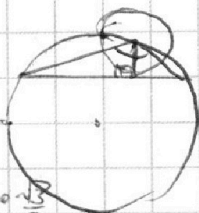
$$\frac{8x}{\sqrt{1+x^2} \sqrt{49x^2+1}} = \sin x$$



$$\sin(\alpha+\beta) = \sin \alpha \cos \beta + \sin \beta \cos \alpha$$



$$FB =$$



$$\sin(60) = \sin \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \right)$$

$$\cos \beta = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$$

$$\sin \beta = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

 **МФТИ**

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$9ax - y + 10b = 0,$$

$$y = ax + b$$

$$\sum ((x+y)^2 + y^2 - 1)(x^2 + y^2 - 4) \leq 0.$$

$$1(x^2 + y^2 - 4) \geq 0$$

$$\sqrt{x^2 + y^2}$$

$$A \subseteq \{(x, y) \mid (x+1)^2 + y^2 - 1 \leq 0\}$$

$$(x+8)^2 + y^2$$

$$\textcircled{9} \quad x^2 + y^2 - 4 \leq 0$$

c) $x^2 + y^2 \leq 4$

$$L \{ (x^2 + y^2 - 1) \geq 0 \}$$

$$(x+p)^2 + y^2 \geq 1$$

$$b' = \frac{53}{2}$$

Q 70

五

2 2 3

$$\frac{2\sqrt{63}}{18}$$

$$a = 0$$

$$y = 10b \Rightarrow a \neq 0.$$

$$(x+8)^2 + 4^2 = 10$$

$$c = \sqrt{(b+2)^2 - 2^2}$$

$$y^2 = 1 - (x+1)^2$$

$$y = \sqrt{1 - (x + \frac{1}{2})^2}$$

$$-\sqrt{1-(x+p)^2} = dx + i\phi$$

$$\frac{B}{C} = \frac{h}{2}$$

$$1 - (x + b)^2 = a^2 x^2 + 20axb + 100b^2$$

$$\frac{10}{3} + \frac{6}{3} = \frac{16}{3}$$

$$3A = 5$$
$$A = \frac{5}{3}$$

$$B = \frac{10}{3}$$

$$(A+1) \cdot 2 = B+2$$

$$2A + 2 = B + 2$$

$$2A = B$$

$$A + B = 5$$

$$a = b \cdot q \cdot \alpha \quad (2)$$

$$2 = \frac{106}{16}$$

$$\frac{h}{B}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$t = \frac{-50 + \sqrt{50^2 + 49 \cdot 99 \cdot 4}}{49 \cdot 2} = 5^4 \cdot 4 + 7^2 \cdot 99 \cdot 11 \cdot 4 = (a+b)^2 - 8ab$$

$$= 4(5^4 + 7^2 \cdot 99) = 4 \cdot 5476 = 4 \cdot 401369$$

$$5^2 \cdot 25 = 625$$

$$(5^2 \cdot 2)^2 = 5^4 \cdot 2^2$$

$$2a+r = mk$$

$$-50 + \sqrt{1369} = \frac{1}{m} = -1$$

$$= \frac{2\sqrt{1369} - 25}{49}$$

$$X^2 = \frac{2\sqrt{1369} - 25}{49}$$

$$X = \frac{\sqrt{2\sqrt{1369} - 25}}{7}$$

$$b = a + r$$

$$\frac{a}{b} = \text{кратокр.}$$

$$\frac{a+r}{a} = 2$$

$$\frac{a+b}{a^2 - 6ab + b^2} = \frac{2+2}{4a^2 + 4ar + r^2} = 1$$

$$a^2 - 6a(a+r) + a^2 + 2ar + r^2 = 2a + r$$

$$4a^2 + 4ar + r^2 = 2a^2 + 2ar + r^2 - 6a^2 - 6ar$$

$$r^2 - 4a^2 - 4ar = 0$$

$$r^2 - 4(a^2 + ar) = 0$$

$$a = 1, r = 4$$

