



МОСКОВСКИЙ  
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ  
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"  
ПО МАТЕМАТИКЕ

10 КЛАСС. Вариант 10



1. [4 балла] Натуральные числа  $a$ ,  $b$ ,  $c$  таковы, что  $ab$  делится на  $2^{15}7^{11}$ ,  $bc$  делится на  $2^{17}7^{18}$ ,  $ac$  делится на  $2^{23}7^{39}$ . Найдите наименьшее возможное значение произведения  $abc$ .

2. [4 балла] Известно, что дробь  $\frac{a}{b}$  несократима ( $a \in \mathbb{N}$ ,  $b \in \mathbb{N}$ ). На доске записана дробь

$$\frac{a+b}{a^2-7ab+b^2}.$$

При каком наибольшем  $m$  могло оказаться, что числитель и знаменатель дроби можно сократить на  $m$ ?

3. [4 балла] Центр окружности  $\omega$  лежит на окружности  $\Omega$ , хорда  $AB$  окружности  $\Omega$  касается  $\omega$  в точке  $C$  так, что  $AC : CB = 17 : 7$ . Найдите длину  $AB$ , если известно, что радиусы  $\omega$  и  $\Omega$  равны 7 и 13 соответственно.

4. [5 баллов] Решите уравнение

$$\sqrt{3x^2 - 6x + 2} - \sqrt{3x^2 + 3x + 1} = 1 - 9x.$$

5. [5 баллов] На координатной плоскости дан параллелограмм с вершинами в точках  $O(0; 0)$ ,  $P(-13; 26)$ ,  $Q(3; 26)$  и  $R(16; 0)$ . Найдите количество пар точек  $A(x_1; y_1)$  и  $B(x_2; y_2)$  с целыми координатами, лежащих в этом параллелограмме (возможно, на границе) и таких, что  $2x_2 - 2x_1 + y_2 - y_1 = 14$ .

6. [5 баллов] Найдите все значения параметра  $a$ , для каждого из которых найдётся значение параметра  $b$ , при котором система

$$\begin{cases} ax + y - 8b = 0, \\ (x^2 + y^2 - 1)(x^2 + (y - 12)^2 - 16) \leq 0 \end{cases}$$

имеет ровно 2 решения.

7. [6 баллов] Треугольник  $ABC$  вписан в окружность. Пусть  $M$  – середина той дуги  $AB$  описанной окружности, которая не содержит точку  $C$ ;  $N$  – середина той дуги  $AC$  описанной окружности, которая не содержит точку  $B$ . Найдите расстояние от вершины  $A$  до центра окружности, вписанной в треугольник  $ABC$ , если расстояния от точек  $M$  и  $N$  до сторон  $AB$  и  $AC$  соответственно равны 5 и 2,5.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

|                          |                          |                          |                                     |                          |                          |                          |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1                        | 2                        | 3                        | 4                                   | 5                        | 6                        | 7                        |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

**МФТИ**

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

№4

$$\sqrt{3x^2 - 6x + 2} - \sqrt{3x^2 + 3x + 1} = 1 - 9x$$

~~Обозначим~~ Пусть:

$$a = \sqrt{3x^2 - 6x + 2}$$

$$b = \sqrt{3x^2 + 3x + 1}$$

Тогда заметим, что  $a^2 - b^2 = 3x^2 - 6x + 2 - 3x^2 - 3x - 1 = -9x + 1$ .  
(оставим уравнение:

$$a - b = a^2 - b^2$$

$$a^2 - b^2 - (a - b) = 0$$

$$(a - b)(a + b - 1) = 0$$

$$a \sqrt{3x^2 - 6x + 2} - \sqrt{3x^2 + 3x + 1} = 0$$

$$\sqrt{3x^2 - 6x + 2} + \sqrt{3x^2 + 3x + 1} - 1 = 0$$

$$1) \sqrt{3x^2 - 6x + 2} = \sqrt{3x^2 + 3x + 1} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x^2 - 6x + 2 = 3x^2 + 3x + 1 \\ x \in (-\infty; 1 - \frac{\sqrt{3}}{3}] \cup [\frac{1 + \sqrt{3}}{3}; +\infty) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 9x = 1 \\ x \in (-\infty; 1 - \frac{\sqrt{3}}{3}] \cup [\frac{1 + \sqrt{3}}{3}; +\infty) \end{cases} \Rightarrow x = \frac{1}{9}$$

$$2) \sqrt{3x^2 - 6x + 2} + \sqrt{3x^2 + 3x + 1} = 1$$

$\Downarrow$

$$\begin{cases} \sqrt{3x^2 - 6x + 2} = 1 - \sqrt{3x^2 + 3x + 1} \\ x \in [-1; 0] \end{cases}$$

$\Updownarrow$

$$\begin{cases} 3x^2 - 6x + 2 = 1 - 2\sqrt{3x^2 + 3x + 1} + 3x^2 + 3x + 1 \\ -1 \leq x \leq 0 \end{cases}$$

$$2\sqrt{3x^2 + 3x + 1}$$

$$\begin{cases} \sqrt{3x^2 - 6x + 2} = 1 - \sqrt{3x^2 + 3x + 1} \\ -1 \leq x \leq 0 \end{cases}$$

$\Updownarrow$

$$3x^2 - 6x + 2 = 1 + 3x^2 + 3x + 1 - 2\sqrt{3x^2 + 3x + 1}$$

$$\begin{cases} 2\sqrt{3x^2 + 3x + 1} = 9x, \text{ но т.к. } 3x^2 + 3x + 1 > 0, \text{ при } \forall x \Rightarrow \\ -1 \leq x \leq 0 \Rightarrow \sqrt{3x^2 + 3x + 1} > 0, \text{ при } \forall x \Rightarrow \\ 9x \geq 0 \end{cases}$$

решений нет

Ответ:  $\frac{1}{9}$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

|                          |                          |                          |                          |                                     |                          |                          |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1                        | 2                        | 3                        | 4                        | 5                                   | 6                        | 7                        |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

№5

Построим для  
т.А = (0; 0) все возможные  
т.В, удовл. условию:  
 $2(x_b - x_a) + y_b - y_a = 14$

Они образуют график  
функции  $y = -2x + 14$   
в ~~целых~~ целых числах.

При смещении т.А  
по оси Ox на  $\Delta x$ ,  
коэффициент ~~у~~ образ-  
ующейся прямой  
равен  $k = 14 - 2\Delta x$

Для ~~каждой~~ т.А в

~~параллелогра~~ парал-ме РМНО

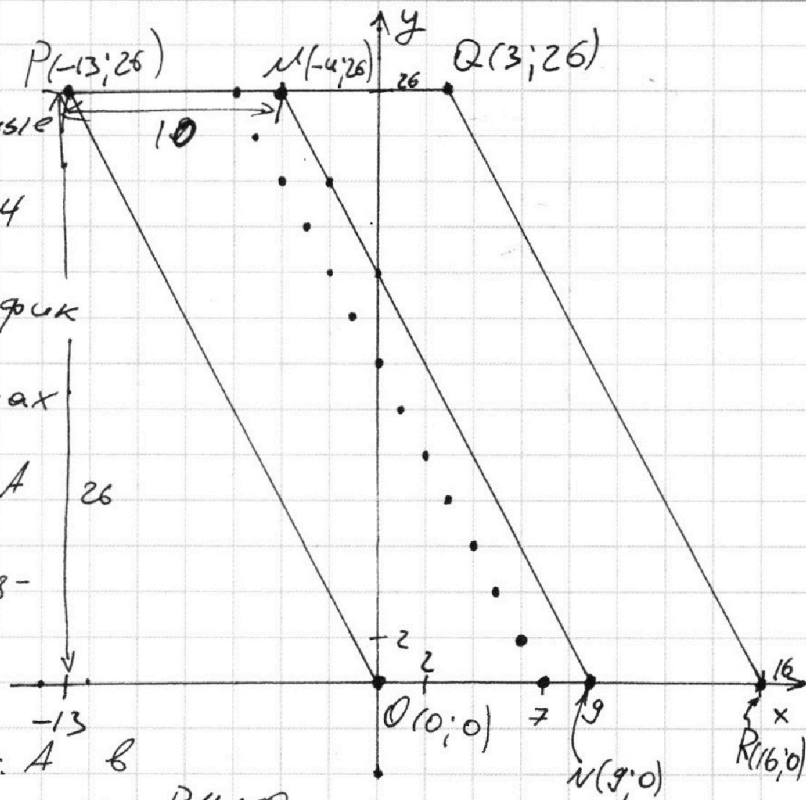
соответствует 14 точек  $\Rightarrow$  Всего таких пар

Всего точек внутри РМНО  $\leftarrow$  будет  ~~$26 \cdot 9,5 + 10$~~   $(26 \cdot 9,5 + 10) \cdot 14$

Примечание:

т.А не может лежать внутри ~~парал-мо~~ парал-мо  
и QRM (на всех ~~границах~~ границах кроме MN), так  
как для любой такой точки А, все т.В  
будут лежать вне ОРQR

Ответ: 34720



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

|                          |                          |                          |                          |                          |                                     |                          |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|
| 1                        | 2                        | 3                        | 4                        | 5                        | 6                                   | 7                        |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

МФТИ

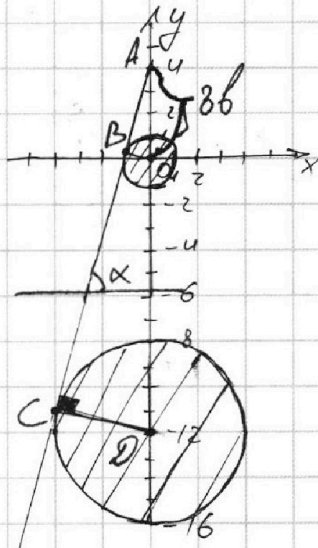
Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

№6

$$\begin{cases} ax + y - 8b = 0 \\ (x^2 + y^2 - 1)(x^2 + (y - 12)^2 - 16) \leq 0 \end{cases}$$

Графиком второго уравнения является  
два круга.

Ровно 2 решения системы  
достигается только в случаях  
касания



1 случай

Т.А - точка пересеч. графиков  
 $ax + y - 8b = 0$  с осью Oy

Т.В - точка касания  $ax + y - 8b = 0$  и  $x^2 + y^2 - 1 = 0$

Т.С - точка касания  $ax + y - 8b = 0$  и  $x^2 + (y - 12)^2 - 16 = 0$

Т.О - центр малого круга.

Т.Д - центр большого круга.

Тогда  $AO = 8b$ .

$$\begin{aligned} \triangle AOB \sim \triangle ADC &\Rightarrow \frac{AO}{OB} = \frac{AD}{DC} \\ \frac{8b}{1} &= \frac{8b + 12}{4} \\ 32b &= 8b + 12 \\ b &= 0.5 \\ 8b &= 4 \end{aligned}$$

$\alpha$  - угол наклона графика  $y = 8b - ax$   
 $-\alpha = \text{tg } \alpha$

$\angle \alpha = \angle ADC$  (стороны углов попарно перпендикулярны)

$$\begin{aligned} \text{tg } \angle ADC &= -\alpha \\ \text{tg } \angle ADC &= \frac{AC}{DC} = \frac{\sqrt{16^2 - 4^2}}{4} = \sqrt{15} = -\alpha \Rightarrow \alpha = -\sqrt{15} \end{aligned}$$

Т.к. графики симметричны относительно Oy, то  
и подходит решение  $\alpha = \sqrt{15}$

Ответ:  $\pm\sqrt{15}$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

|                          |                          |                          |                          |                          |                                     |                          |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|
| 1                        | 2                        | 3                        | 4                        | 5                        | 6                                   | 7                        |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

2 случай:

$$y = 8b - ax$$

Т. О (0; 0)

Т. D (0; -12)

Т. А - точка касания малого круга и прямой

Т. В - точка касания большого круга и прямой

Т. С - точка пересечения прямой оси Oy

$$\triangle BCD \sim \triangle ACO \Rightarrow \frac{AO}{OC} = \frac{BD}{CD}$$

$$\frac{1}{8b} = \frac{4}{12 - 8b}$$

$$12 - 8b = 32b$$

$$b = \frac{12}{40} = 0,3$$

$$8b = 2,4$$

$\alpha$  - угол наклона прямой

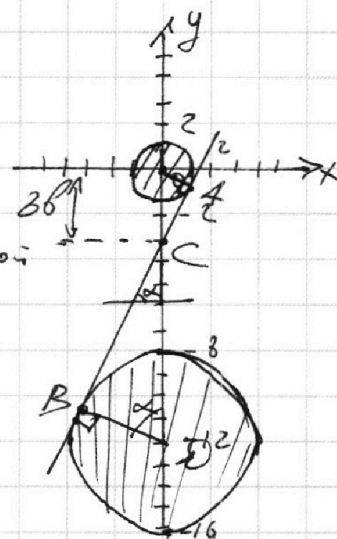
$$\tan \alpha = -a$$

$\angle \alpha = \angle \angle B$  (стороны углов попарно перпендикулярны)

$$\tan \angle COA = \frac{\sqrt{2,4^2 - 1}}{1} = \frac{\sqrt{119}}{5} = -a \Rightarrow a = -\frac{\sqrt{119}}{5}$$

Поскольку графики симметричны относительно Oy,  
то и подходит и решение  $a = \frac{\sqrt{119}}{5}$

$$\text{Ответ: } \pm \sqrt{15} \text{ и } \pm \frac{\sqrt{119}}{5}$$



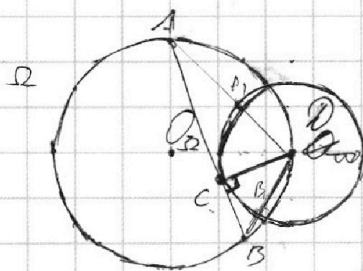
На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

|                          |                          |                          |                          |                          |                          |                          |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1                        | 2                        | 3                        | 4                        | 5                        | 6                        | 7                        |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$\frac{AC}{BC} = \frac{17}{7}$$

$$R_1 = 13$$

$$R_2 = 7$$

$$AA_1 \cdot AD = AC^2$$

$$AA_1 (AA_1 + 7) = AC^2$$

$$AA_1 (AA_1 + 7) = 289x^2$$

$$AD(AD - 7) = 17x$$

$$AD^2 - 7AD = 17x$$

$$289x^2 + 49 - 7AD = 17x$$

$$272x^2 + 49 - 7AD$$

$$AD = \frac{272x^2 + 49}{7}$$

$$AD \cdot BC = CD$$

$$(BD - 7) \cdot CD = BC^2$$

$$AD(AD - 7) = AC^2 = 289x^2$$

$$AD^2 - 7AD = 289x^2$$

$$289x^2 + 49 - 7AD = 289x^2$$

$$AD = 7$$

$$AD^2 = AC^2 + CD^2 = 289x^2 + 49$$

$$AD(AD - 7) = 289x^2$$

$$AD^2 - 7AD = 289x^2$$

$$289x^2 + 49 - 7AD = 289x^2$$

$$AD = 7$$

$$(y - 12)^2 = 16$$

$$(y - 12)^2 = 16$$

$$y - 12 = 4$$

$$y = 16$$

$$y = 16$$

$$y = 16$$

$$y = 16$$

$$y = 16$$

$$y = 16$$

$$y = 16$$

$$y = 16$$

$$y = 16$$

$$y = 16$$

$$y = 16$$

$$y = 16$$

$$y = 16$$

$$y = 16$$

$$y = 16$$

$$\begin{array}{r} \times 17 \\ 16 \\ \hline 48 \\ 6 \\ \hline 17 \\ \hline 272 \end{array}$$

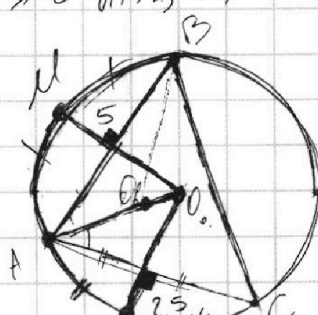
$$AD = \sqrt{AC^2 + DC^2} = \sqrt{(17x)^2 + 49} = \sqrt{289x^2 + 49}$$

$$272x^2 + 49 = 7$$

$$272x^2 + 49 = \sqrt{289x^2 + 49}$$

$$\frac{272x^2 + 49}{7}$$

$$AD = \sqrt{(17x)^2 + 49}$$



$$\left(\frac{24}{10}\right)^2 - 8 - 1 = 2$$

$$\frac{(24)^2 - 100}{10} = 2$$

$$\frac{24^2 - 100}{10} = 2$$

$$\frac{24^2 - 100}{10} = 2$$

$$\frac{24^2 - 100}{10} = 2$$

$$\frac{24^2 - 100}{10} = 2$$

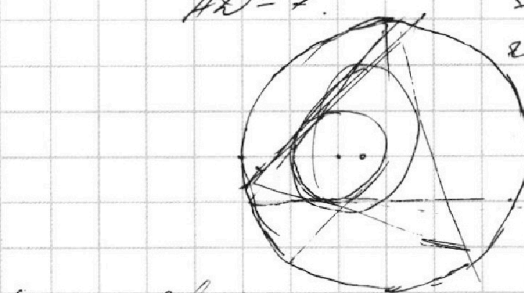
$$\frac{24^2 - 100}{10} = 2$$

$$\frac{24^2 - 100}{10} = 2$$

$$\frac{24^2 - 100}{10} = 2$$

$$\frac{24^2 - 100}{10} = 2$$

$$\begin{array}{r} \times 7 \\ 17 \\ \hline 49 \\ 7 \\ \hline 119 \end{array}$$



$$x + y - 88 = 0$$

$$(x^2 + y^2 - 1)(x^2 + (y - 12)^2 - 16) \leq 0$$

$$(0 + 144 - 1)(0 + 0 - 16) \leq 0$$

$$(143)(-16) \leq 0$$

$$-2288 \leq 0$$

$$-2288 \leq 0$$

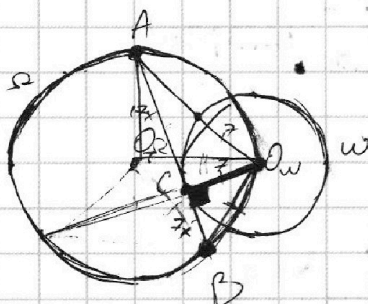
$$-2288 \leq 0$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!


$$AC + BC$$

~~$8 + 10 + 11$~~

$12 + 15 + 2$

19-15

$$AO_w (AO_w - 7) = AC^2$$

$$AO_w^2 = AC^2 + 14 \cdot AO_w$$

$$AO_w^2 = AC^2 + CB^2 \cdot 49$$

$$AD_w^2 - 7AD_w = AC$$

~~$100^2 + 49 = AC = 7500$~~

$$\sqrt{3x^2 - 5x + 2} = \sqrt{3x^2 + 3x + 4} = 1 - 9x$$

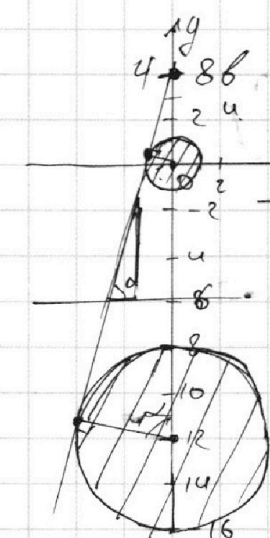
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

|                          |                          |                          |                          |                          |                          |                          |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1                        | 2                        | 3                        | 4                        | 5                        | 6                        | 7                        |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

**МФТИ**

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$\begin{array}{r} 86 \\ \times 14 \\ \hline 36 \\ \times 14 \\ \hline 126 \end{array}$$

$$\frac{86}{1} = \frac{86+12}{4}$$

$$126 = 86+12$$

$$46 = 12$$

$$86 = 46+40$$

$$\cos \alpha = \frac{1}{4}$$

$$\lg 2 = \frac{1}{2} \lg 4 = \frac{1}{2} \lg (4^2 - 1) = \frac{1}{2} \lg 15$$

$$a = \pm \sqrt{15}, b = \frac{1}{2}$$

$$\begin{array}{r} 86 \\ \times 14 \\ \hline 36 \\ \times 14 \\ \hline 126 \end{array}$$

$$126 = 86+12$$

$$46 = 12$$

$$86 = 46+40$$

$$\begin{array}{r} 100+26^2 \\ \times 26 \\ \hline 26 \\ \times 26 \\ \hline 56 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 26 \\ \times 26 \\ \hline 56 \end{array}$$

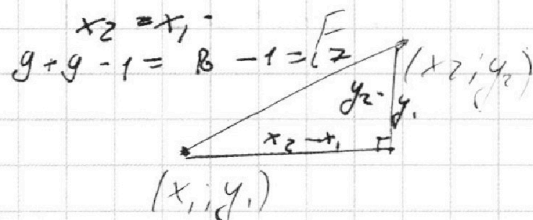
$$\begin{array}{r} 26 \\ \times 26 \\ \hline 56 \end{array}$$

$$2(x_2 - x_1) + (y_2^2 - y_1^2) = 14$$

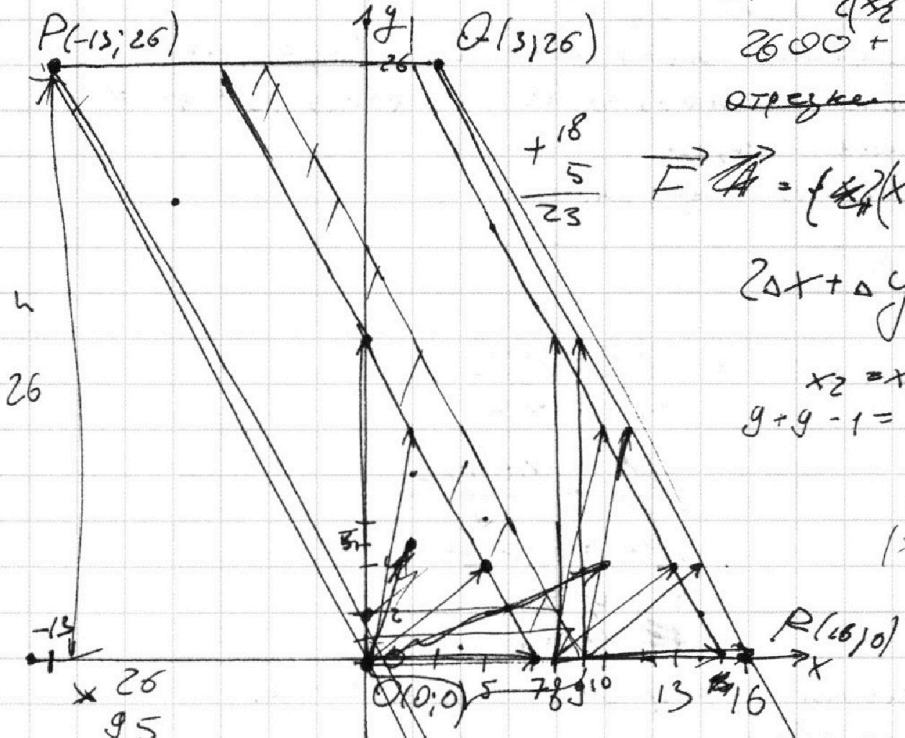
отрезки

$$\vec{F} = \{x_2 - x_1; y_2 - y_1\}$$

$$2\Delta x + \Delta y = 14$$



$$\begin{array}{r} 140 \\ - 14 \\ \hline 126 \end{array}$$



$$\begin{array}{r} 26 \\ \times 26 \\ \hline 95 \\ \times 26 \\ \hline 130 \\ \times 26 \\ \hline 234 \\ \times 26 \\ \hline 2470 \end{array}$$

$$10 + 4 = 14$$

$$a + b = m \cdot g$$

$$(0;0) - (9;0) - 9^2 - 7ab + b^2 = m \cdot g$$

$$\begin{array}{r} 2480 \\ \times 26 \\ \hline 16 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 2480 \\ \times 26 \\ \hline 14 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 992 \\ 248 \\ \hline 34720 \end{array}$$





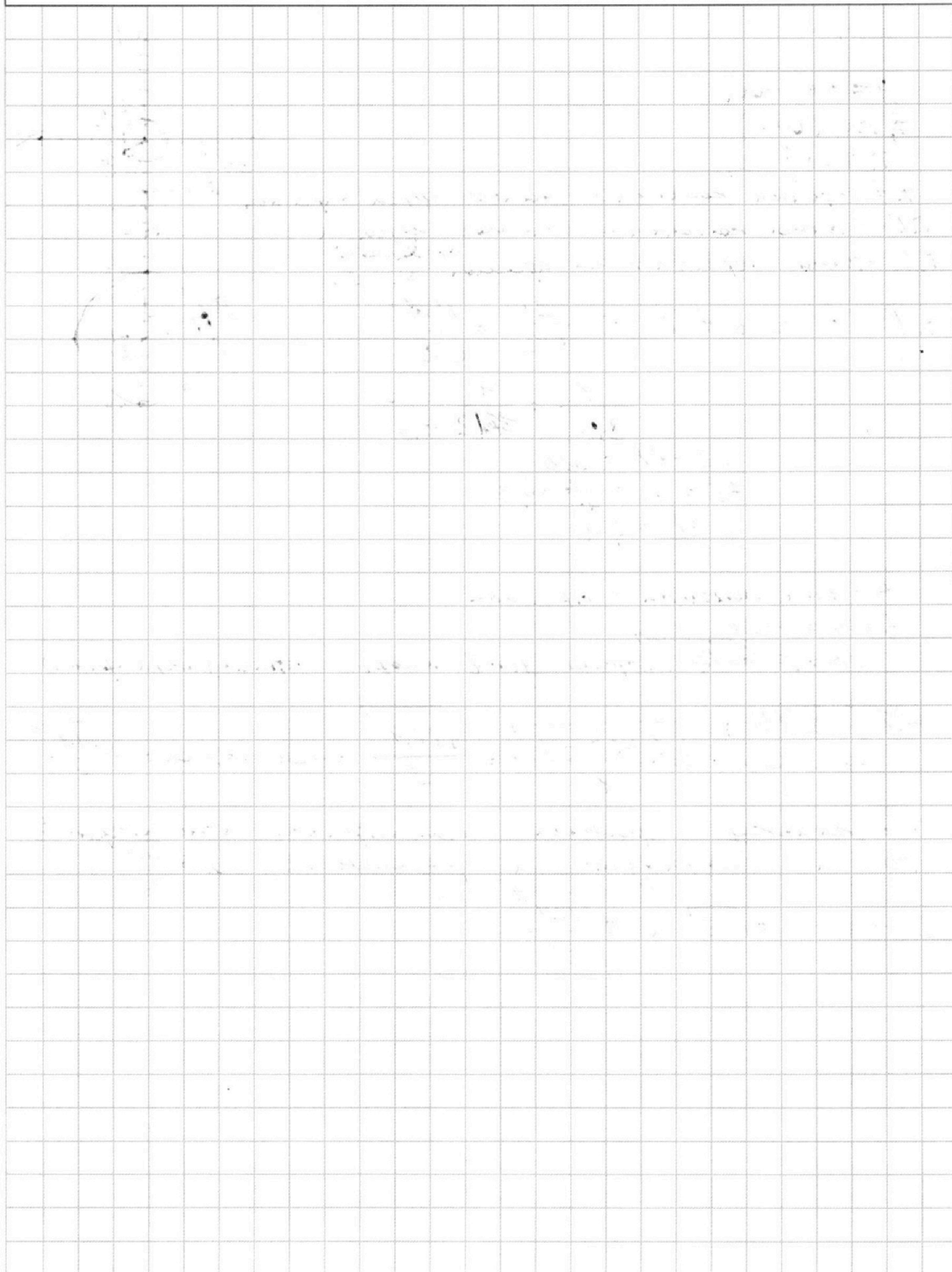
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

|                          |                          |                          |                          |                          |                          |                          |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1                        | 2                        | 3                        | 4                        | 5                        | 6                        | 7                        |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!





На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

|                                     |                                     |                          |                          |                          |                          |                          |
|-------------------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1                                   | 2                                   | 3                        | 4                        | 5                        | 6                        | 7                        |
| <input checked="" type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$\sqrt{3x^2-6x+2} + \sqrt{3x^2+3x+1} - 1 = 0$   
 $\sqrt{3x^2-6x+2} = 1 - \sqrt{3x^2+3x+1}$   
 $ab: 2^{15} \cdot 7^{11} \Rightarrow ab$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

|                          |                          |                          |                          |                          |                          |                          |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1                        | 2                        | 3                        | 4                        | 5                        | 6                        | 7                        |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

$$\sqrt{3x^2 - 6x + 2} - \sqrt{3x^2 + 3x + 1} = 1 - 9x$$

$$1 - 9x = 0$$