



МОСКОВСКИЙ  
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ  
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"  
ПО МАТЕМАТИКЕ

10 КЛАСС. Вариант 9



1. [4 балла] Натуральные числа  $a$ ,  $b$ ,  $c$  таковы, что  $ab$  делится на  $2^{14}7^{10}$ ,  $bc$  делится на  $2^{17}7^{17}$ ,  $ac$  делится на  $2^{20}7^{37}$ . Найдите наименьшее возможное значение произведения  $abc$ .

2. [4 балла] Известно, что дробь  $\frac{a}{b}$  несократима ( $a \in \mathbb{N}$ ,  $b \in \mathbb{N}$ ). На доске записана дробь

$$\frac{a+b}{a^2-6ab+b^2}.$$

При каком наибольшем  $m$  могло оказаться, что числитель и знаменатель дроби можно сократить на  $m$ ?

3. [4 балла] Центр окружности  $\omega$  лежит на окружности  $\Omega$ , хорда  $AB$  окружности  $\Omega$  касается  $\omega$  в точке  $C$  так, что  $AC : CB = 7$ . Найдите длину  $AB$ , если известно, что радиусы  $\omega$  и  $\Omega$  равны 1 и 5 соответственно.

4. [5 баллов] Решите уравнение

$$\sqrt{2x^2 - 5x + 3} - \sqrt{2x^2 + 2x + 1} = 2 - 7x.$$

5. [5 баллов] На координатной плоскости дан параллелограмм с вершинами в точках  $O(0; 0)$ ,  $P(-12; 24)$ ,  $Q(3; 24)$  и  $R(15; 0)$ . Найдите количество пар точек  $A(x_1; y_1)$  и  $B(x_2; y_2)$  с целыми координатами, лежащих в этом параллелограмме (возможно, на границе) и таких, что  $2x_2 - 2x_1 + y_2 - y_1 = 12$ .

6. [5 баллов] Найдите все значения параметра  $a$ , для каждого из которых найдётся значение параметра  $b$ , при котором система

$$\begin{cases} ax - y + 10b = 0, \\ ((x+8)^2 + y^2 - 1)(x^2 + y^2 - 4) \leq 0 \end{cases}$$

имеет ровно 2 решения.

7. [6 баллов] Треугольник  $ABC$  вписан в окружность. Пусть  $M$  – середина той дуги  $AB$  описанной окружности, которая не содержит точку  $C$ ;  $N$  – середина той дуги  $AC$  описанной окружности, которая не содержит точку  $B$ . Найдите расстояние от вершины  $A$  до центра окружности, вписанной в треугольник  $ABC$ , если расстояния от точек  $M$  и  $N$  до сторон  $AB$  и  $AC$  соответственно равны 4,5 и 2.



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

|                                     |                          |                          |                          |                          |                          |                          |
|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1                                   | 2                        | 3                        | 4                        | 5                        | 6                        | 7                        |
| <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Задача 1.

1. По условию:

$$\begin{cases} ab : 2^{14} \cdot 7^{10} \\ bc : 2^{17} \cdot 7^{17} \\ ac : 2^{20} \cdot 7^{37} \end{cases}$$

2. Найдём наименьшее возможное значение произведения

$abc$ :

$$\underbrace{abc}_{2^{14} \cdot 7^{10}} \overset{2^{17} \cdot 7^{17}}{\leftarrow} \overset{2^{20} \cdot 7^{37}}{=} 2^{20} \cdot 7^{37}$$

(т.к.  $abc$

Ответ:  $abc = 2^{20} \cdot 7^{37}$   
(наим)



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

|                          |                                     |                          |                          |                          |                          |                          |
|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1                        | 2                                   | 3                        | 4                        | 5                        | 6                        | 7                        |
| <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Задача 2.

$\frac{a}{b}$  - несократима,  $a \in \mathbb{N}$ ,  $b \in \mathbb{N}$ .

$$\frac{a+b}{a^2-6ab+b^2} \quad (*)$$

При каком наиб  $m$  числитель и знаменатель  $(*) \div m$ :

Решение:

1.  $\frac{a}{b}$  - несократима.

$$2. \quad a^2-6ab+b^2 = a^2-4ab-2ab+b^2 = (a-b)^2-2ab.$$

$$a^2-6ab+b^2 = a^2+2ab-8ab+b^2 = (a+b)^2-8ab.$$

$$\frac{a+b}{a^2-6ab+b^2} = \frac{a+b}{(a+b)^2-8ab}$$

$$\frac{a+b}{2} \leq ab$$

$$a+b \leq 2ab.$$

$$\text{Берём наименьшее, } \Rightarrow a+b=2ab \\ (a+b)^2=4a^2b^2.$$

$$(a+b)^2 \leq 4a^2b^2$$

$$\Rightarrow \text{дробь примет вид: } \frac{2ab}{4a^2b^2-8ab} = \frac{\cancel{2ab}}{\cancel{4ab}(ab-2)} = \frac{1}{2(ab-2)}$$

$\Rightarrow$  для сокращения  $m_{\text{наиб}} = 1$

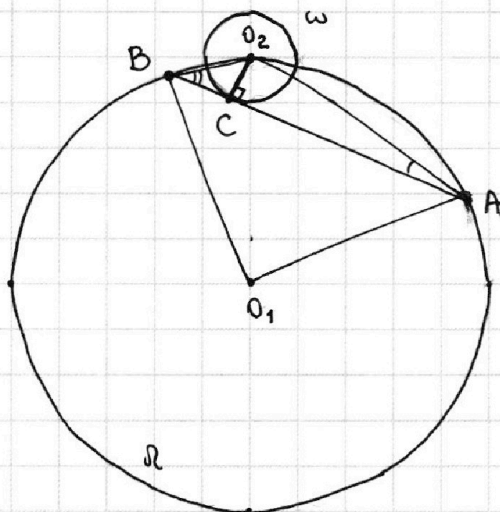
Ответ:  $m = 1$

|                          |                          |                                     |                          |                          |                          |                          |
|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1                        | 2                        | 3                                   | 4                        | 5                        | 6                        | 7                        |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



### Задача 3



Дано: Окр.  $\Omega$  ( $O_1; R$ )  
Окр.  $\omega$  ( $O_2; r$ ).  
 $R = 5; r = 1$ .  
 $O_2C \perp AB$ . ( $AB$  - касат.  
к (окр) Окр. ( $O_2; r$ )).  
 $AC:CB = 7$ .  
Найти:  $AB$  - ?

### Решение:

1.  $\frac{AC}{CB} = 7, \Rightarrow AC = 7CB$ . Пусть  $CB = x, \Rightarrow AC = 7x$ .

2.  $O_2C \perp AB$  - как радиус, проведённый в точку касания.

3.  $O_2C \perp AB, \Rightarrow \angle O_2CB = \angle O_2CA = 90^\circ$ .

4. Рассмотрим  $\triangle BCO_2$  - н/у ( $\angle BCO_2 = 90^\circ$ ):

по т. Пифагора:  $BO_2 = \sqrt{BC^2 + O_2C^2} = \sqrt{BC^2 + r^2} = \sqrt{x^2 + 1}$

$$\sin \angle O_2BC = \frac{O_2C}{BO_2} = \frac{r}{BO_2} = \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}}$$

5. Рассмотрим  $\triangle AO_2C$  - н/у ( $\angle O_2CA = 90^\circ$ ):

по т. Пифагора:  $AO_2 = \sqrt{O_2C^2 + AC^2} = \sqrt{1 + 49x^2}$

$$\sin \angle O_2AC = \frac{O_2C}{AO_2} = \frac{r}{AO_2} = \frac{1}{\sqrt{49x^2 + 1}}$$

6.  $\triangle ABO_2$  - вписанный  $\triangle$  (из условия): в Окр.  $\Omega$ :

$\Rightarrow$  по т. Синусов:  $\frac{AO_2}{\sin \angle O_2BC} = \frac{BO_2}{\sin \angle O_2AB} = 2R$

$$\Rightarrow \sqrt{49x^2 + 1} \cdot \sqrt{x^2 + 1} = 2 \cdot 5 \quad |^2$$

$$(49x^2 + 1)(x^2 + 1) = 100$$

$$49x^4 + 49x^2 + x^2 + 1 = 100 = 0$$

$$49x^4 + 50x^2 - 99 = 0$$

Очевидно, что  $x = 1$  - корень ( $49 + 50 - 99 = 0$  (б)).

Проверим, есть ли у ур-я другие корни:





На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

|                          |                          |                                     |                          |                          |                          |                          |
|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1                        | 2                        | 3                                   | 4                        | 5                        | 6                        | 7                        |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{array}{r} 49x^4 + 50x^2 - 99 = 0 \\ - 49x^4 + 49x^3 \quad | \quad x-1 \\ \hline 49x^3 + 50x^2 - 99 \\ - 49x^3 - 49x^2 \\ \hline 99x^2 - 99 \\ - 99x^2 + 99x \\ \hline 99x - 99 \\ - 99x + 99 \\ \hline 0 \end{array}$$

$$\Rightarrow 49x^4 + 50x^2 - 99 = (x-1)(49x^3 + 49x^2 + 99x + 99).$$

Очевидно, что для второй скобки не существует положительных  $x$ , при которых она бы обращалась в ноль.

$$\Rightarrow x = 1. \Rightarrow CB = 1 \Rightarrow AC = 7.$$

$$7. AB = AC + CB = 7 + 1 = 8.$$

Ответ:  $AB = 8$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

|                          |                          |                          |                                     |                          |                          |                          |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1                        | 2                        | 3                        | 4                                   | 5                        | 6                        | 7                        |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Задача 4

$$\sqrt{2x^2 - 5x + 3} - \sqrt{2x^2 + 2x + 1} = 2 - 7x.$$

Начальное условие:  $\begin{cases} 2x^2 - 5x + 3 \geq 0 (1) \\ 2x^2 + 2x + 1 \geq 0 (2) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x^2 - 3x - 2x + 3 \geq 0 \\ 2x^2 + 2x + 1 > 0 \text{ при } \forall x \in \mathbb{R} \end{cases} \Leftrightarrow$   
 $\Delta = 4 - 4 \cdot 2 \cdot 1 < 0.$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x(x-1) - 3(x-1) \geq 0 \\ x \in \mathbb{R} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (2x-3)(x-1) \geq 0 \\ x \in \mathbb{R} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \in (-\infty; 1] \cup [\frac{3}{2}; +\infty) \\ x \in \mathbb{R} \end{cases} \Leftrightarrow x \in (-\infty; -1] \cup [\frac{3}{2}; +\infty)$$

Домножим обе части ур-е на  $(\sqrt{2x^2 - 5x + 3} + \sqrt{2x^2 + 2x + 1}) > 0$ :

$$\Rightarrow (2x^2 - 5x + 3 - 2x^2 - 2x - 1) = (2 - 7x)(\sqrt{2x^2 - 5x + 3} + \sqrt{2x^2 + 2x + 1})$$

$$(-7x + 2) - (-7x + 2)(\sqrt{2x^2 - 5x + 3} + \sqrt{2x^2 + 2x + 1}) = 0$$

$$(-7x + 2)(1 - \sqrt{2x^2 - 5x + 3} - \sqrt{2x^2 + 2x + 1}) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -7x + 2 = 0 \Rightarrow x = \frac{2}{7} - \text{подходит по нач. усл.} \\ 1 = \sqrt{2x^2 - 5x + 3} + \sqrt{2x^2 + 2x + 1} \quad (3). \end{cases}$$

Выйдем из совокупности:

$$(3) \quad \sqrt{2x^2 - 5x + 3} + \sqrt{2x^2 + 2x + 1} = 1 \quad |^2$$

$$2x^2 - 5x + 3 + 2x^2 + 2x + 1 + 2\sqrt{(2x^2 - 5x + 3)(2x^2 + 2x + 1)} = 1$$

$$4x^2 - 3x + 4 + 2\sqrt{(4x^4 + 4x^3 + 2x^2 - 10x^3 - 10x^2 - 5x + 6x^2 + 6x + 3)} = 1$$

$$4x^2 - 3x + 3 + 2\sqrt{4x^4 - 6x^3 - 2x^2 + x + 3} = 0$$

$$2\sqrt{4x^4 - 6x^3 - 2x^2 + x + 3} = -4x^2 + 3x - 3. \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 4(4x^4 - 6x^3 - 2x^2 + x + 3) = (-4x^2 + 3x - 3)^2 \quad (4) \\ -4x^2 + 3x - 3 \geq 0 \Rightarrow 4x^2 - 3x + 3 \leq 0 \end{cases}$$

$$\Delta = 9 - 4 \cdot 3 \cdot 4 = 9 - 48 = -41 < 0, \Rightarrow 4x^2 - 3x + 3 > 0 \text{ при } \forall x \in \mathbb{R}.$$

Выйдем из системы

$$(4): \underline{16x^4 - 24x^3 - 8x^2 + 4x + 12} = \underline{16x^4 - 24x^3 + 33x^2 - 18x + 9}$$

$$41x^2 - 22x - 3 = 0.$$

$$\Delta = 22^2 + 4 \cdot 3 \cdot 41 = 484 + 492 = 976 = 16 \cdot 61 = (4\sqrt{61})^2$$

$$x_1 = \frac{22 + 4\sqrt{61}}{2 \cdot 41} = \frac{11 + 2\sqrt{61}}{41}; \quad x_2 = \frac{22 - 4\sqrt{61}}{2 \cdot 41} = \frac{11 - 2\sqrt{61}}{41}$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

|                          |                          |                          |                                     |                          |                          |                          |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1                        | 2                        | 3                        | 4                                   | 5                        | 6                        | 7                        |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Но! Корни  $x_1$  и  $x_2$  не подходят, т.к.  
 $4x^2 - 3x + 3 > 0$  при  $\forall x \in \mathbb{R}$

Ответ:  $x = \frac{2}{7}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

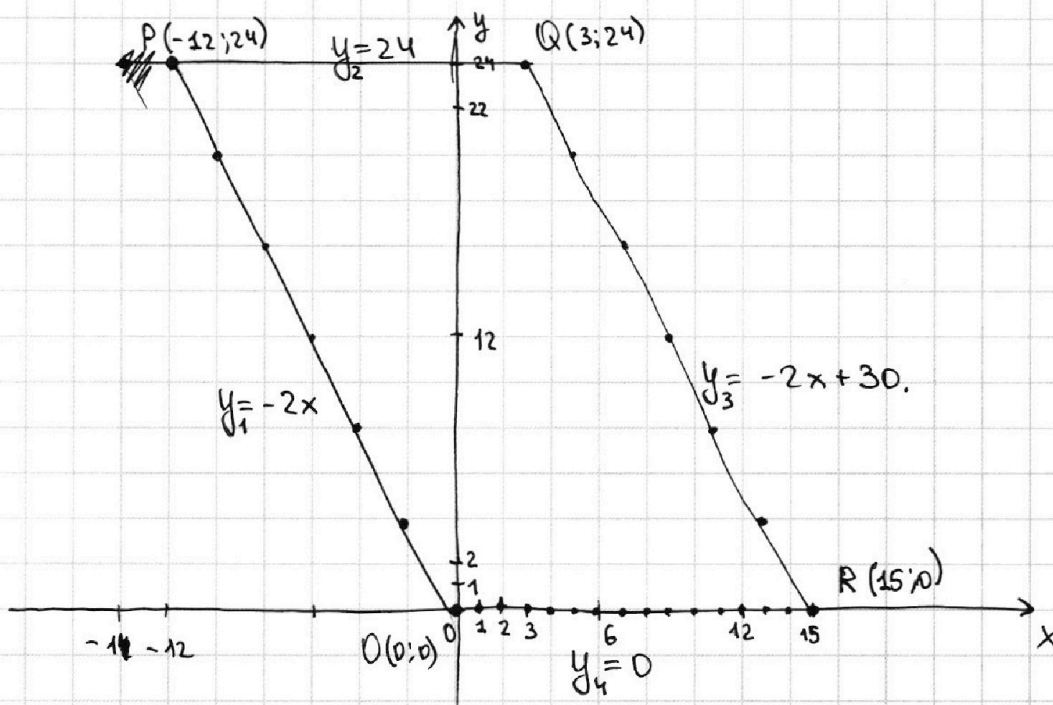
Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

|                          |                          |                          |                          |                                     |                          |                          |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1                        | 2                        | 3                        | 4                        | 5                                   | 6                        | 7                        |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Задача 5.



1. Составим ур-я сторон пар-ма:

PO:  $y_1 = -2x$

PQ:  $y_2 = 24$

OR:  $y_4 = 0$

QR:  $y_3 = -2x + 30$

$$\begin{cases} 24 = 3k + b \Rightarrow 24 = 3k - 15k \Rightarrow k = -2 \\ 0 = 15k + b \Rightarrow b = -15k \Rightarrow b = 30 \end{cases}$$

2. Всего точек с целыми координатами в пар-мме.

$$N = 16 \cdot 13 + 14 \cdot 12 = 208 + 168 = 376 \text{ точек.}$$

3. Система для точек (сущ-ния пар-мма)

$$\begin{cases} y \leq 24 \\ y \geq 0 \\ y \leq -2x + 30 \\ y \geq -2x \end{cases}$$

4. То условие:  $A(x_1; y_1); B(x_2; y_2)$

$$2x_2 - 2x_1 + y_2 - y_1 = 12$$

$$2(x_2 - x_1) + y_2 - y_1 = 12$$





На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

|                          |                          |                          |                          |                                     |                          |                          |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1                        | 2                        | 3                        | 4                        | 5                                   | 6                        | 7                        |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

у-е 6 целых:

$$\left\{ \begin{array}{l} x_2 - x_1 = 2 \\ y_2 - y_1 = 8 \\ x_2 - x_1 = 1 \\ y_2 - y_1 = 10 \\ x_2 - x_1 = 3 \\ y_2 - y_1 = 6 \\ x_2 - x_1 = 4 \\ y_2 - y_1 = 4 \\ x_2 - x_1 = 5 \\ y_2 - y_1 = 2 \\ x_2 - x_1 = 6 \\ y_1 = y_2 \\ x_1 = x_2 \\ y_2 - y_1 = 12 \end{array} \right.$$

кон-во нар:  $\frac{376}{2} = 188$

Ответ: 188 нар.

|                          |                          |                          |                          |                          |                                     |                          |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|
| 1                        | 2                        | 3                        | 4                        | 5                        | 6                                   | 7                        |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



Задача 6.

$$\begin{cases} ax - y + 10b = 0 & (1) \\ ((x+8)^2 + y^2 - 1)(x^2 + y^2 - 4) \leq 0 & (2) \end{cases}$$

Найти все  $a$ , для каждого из которых найдётся  $b$ , при котором система имеет ровно 2 решения

Выведем из системы:

$$(1) \quad y = ax + 10b$$

Пр. - прямая

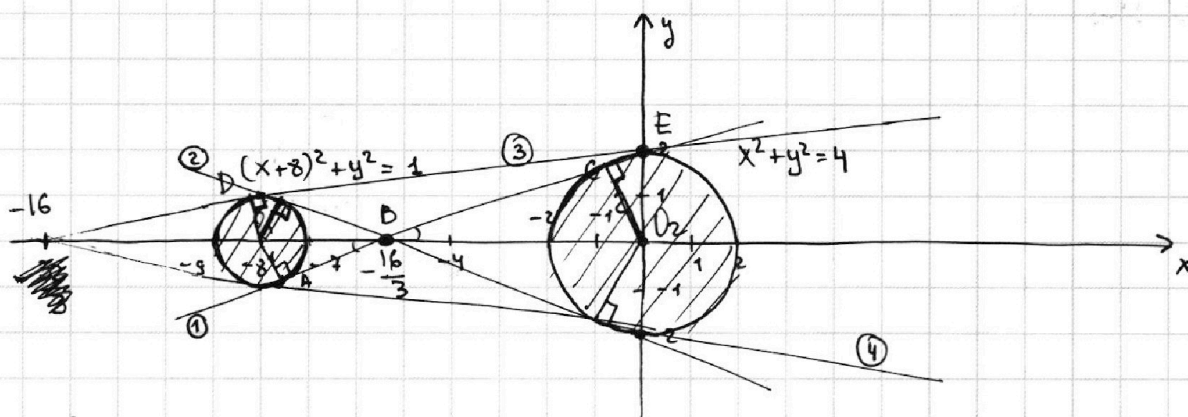
Лин. зависимость.

$$\# \quad ax + y - 10b = 0$$

$$(2) \quad ((x+8)^2 + y^2 - 1)(x^2 + y^2 - 4) \leq 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (x+8)^2 + y^2 \leq 1 \leftarrow \text{Пр. - окружность.} \\ x^2 + y^2 \geq 4 \leftarrow \text{Центр } (-8; 0); R_1 = 1 \\ (x+8)^2 + y^2 \geq 1 \leftarrow \text{Пр. - окружность.} \\ x^2 + y^2 \leq 4 \leftarrow \text{Центр } (0; 0); R_2 = 2. \end{cases}$$

Построим графики в одной системе координат:



Система ур-й будет иметь 2 решения, если  $a, b$  будут "относиться" к прямым 1, 2, 3, 4.

$$\triangle OAB \sim \triangle BCO_2 \Rightarrow \frac{OB}{BO_2} = \frac{r}{R} = \frac{1}{2} \Rightarrow OB = \frac{8}{3}, BO_2 = \frac{16}{3}$$

$$\Rightarrow B(-\frac{16}{3}; 0)$$

$$AB = \sqrt{OB^2 - AO^2} = \sqrt{\frac{64}{9} - 1} = \sqrt{\frac{55}{9}} = \frac{\sqrt{55}}{3}$$

$$AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2} \Rightarrow \frac{55}{9} = (-\frac{16}{3} - x_A)^2 + y_A^2$$

$$\rho(O_1; AB) = \frac{|Ax + By + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}} = \frac{|-8A + 0 + C|}{A} = 1 \Rightarrow A = -8A + C$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

|                          |                          |                          |                          |                          |                                     |                          |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|
| 1                        | 2                        | 3                        | 4                        | 5                        | 6                                   | 7                        |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

**МФТИ**

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\rho(O_2', CB) = \frac{|Ax + By + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}} = \frac{|C|}{A} = 2 \Rightarrow 2A = |C|$$

$$DE = \sqrt{64 + 4} = \sqrt{68}.$$

$$y = ax + 10b$$

$$K(-16; 0), S(0; 2).$$

$$0 = -16a + 10b \Rightarrow +16a = 10b$$

$$2 = 10b \Rightarrow b = \frac{1}{5}$$

$$16a = 2, \Rightarrow a = \frac{1}{8}$$

$$\Rightarrow \text{сумм.} \quad a = -\frac{1}{8}$$

$$E(-\frac{16}{3}; 0), S(0; 2)$$

$$0 = -\frac{16}{3}a + 10b \Rightarrow \frac{16}{3}a = 2 \Rightarrow a = \frac{6}{16} = \frac{3}{8}$$

$$2 = 10b \Rightarrow b = \frac{1}{5}$$

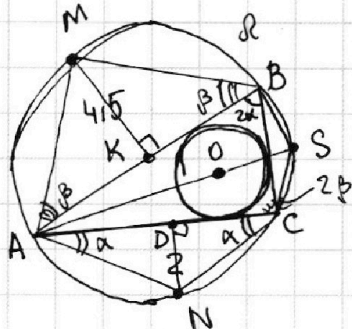
$$\text{сумм.т.} \quad a = -\frac{3}{8}$$

Ответ:  ~~$a = \frac{1}{8}$~~   $a = \left\{ \frac{1}{8}, -\frac{1}{8}, \frac{3}{8}, -\frac{3}{8} \right\}$

|                          |                          |                          |                          |                          |                          |                                     |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|
| 1                        | 2                        | 3                        | 4                        | 5                        | 6                        | 7                                   |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> |

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Задача 7

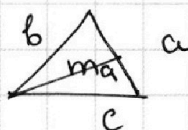


Дано:  $\triangle ABC$  вписан в  $\text{Окр } R$   
 $M$  - сер.  $\cup AB$ .  $\text{Окр}(O'; r)$  вписана  
 $N$  - сер.  $\cup AC$  в  $\triangle ABC$ .  
 $MK = 4,5$ ;  $ND = 2$ .  
 Найти:  $AO$  - ?

Решение:

- $M$  - сер.  $\cup AB$ ,  $\Rightarrow \cup AM = \cup MB \Rightarrow \angle MAB = \angle MBA$  - как впис. остр. на равные дуги,  $\Rightarrow \triangle MAB$  -  $p/\delta$ ,  $\Rightarrow AM = MB$ .
- $N$  - сер.  $\cup AC$ ,  $\Rightarrow \cup AN = \cup NC$ ,  $\Rightarrow \angle DAN = \angle DCN$  - как впис., остр. на равные дуги,  $\Rightarrow \triangle ANC$  -  $p/\delta$ ,  $\Rightarrow AN = NC$ .
- Центр впис. в  $\triangle$  окр - т. пер. биссектрис.  
 $\Rightarrow AO$  - биссектриса  $\angle BAC$ ,  $\Rightarrow \cup BS = \cup SC$  (т.к.  $\angle BAO = \angle CAO$ )  
 (т.к.  $AO$  - бисс.).
- $\angle SCB = \angle SBC$  - как впис. угол, остр. на равные дуги,  $\Rightarrow \triangle SBC$  -  $p/\delta$ ,  $\Rightarrow BS = SC$ .
- $\triangle MAB$  -  $p/\delta$ ,  $\Rightarrow MK$  - бисс., медиана, высота.
- $\triangle NAC$  -  $p/\delta$ ,  $\Rightarrow ND$  - бисс., медиана, высота.
- Формула Медианы  $\triangle$ :

$$m = \sqrt{\frac{2b^2 + 2c^2 - a^2}{4}}$$



Пусть  $AN = NC = x$   
 $\Rightarrow$  По т. Писр. для  $\triangle ADN$ :  
 $AD = \sqrt{AN^2 - ND^2} = \sqrt{x^2 - 4}$

$$\Rightarrow ND = \sqrt{\frac{2x^2 + 2x^2 - (x^2 - 4)}{4}} = \sqrt{\frac{16}{4}} = 2.$$

- По т. синусов  $\triangle ANC$ :

$$\frac{AN}{\sin \alpha} = 2R \Rightarrow x = \sin \alpha \cdot 2R.$$

9.





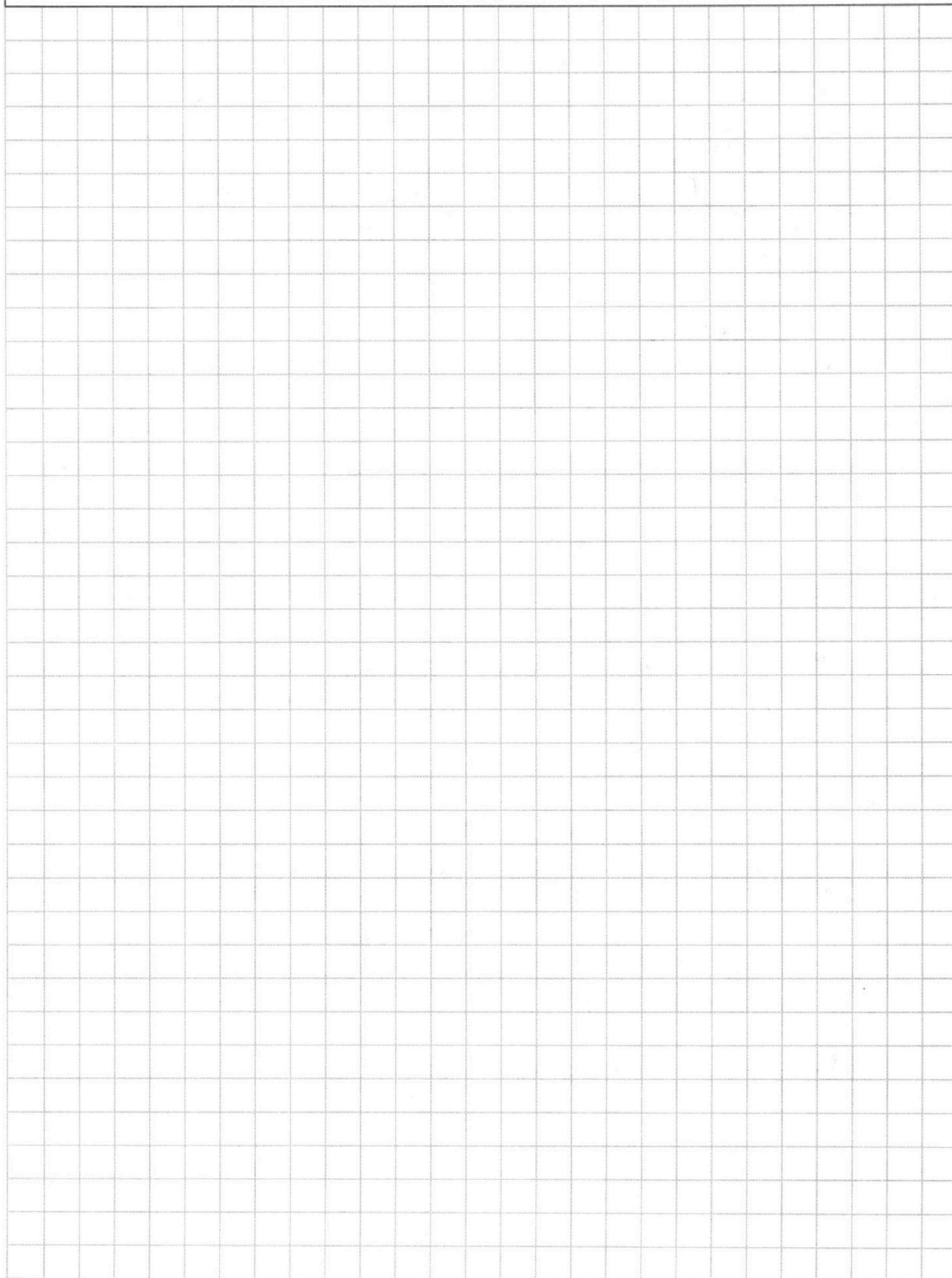
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

|                          |                          |                          |                          |                          |                          |                          |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1                        | 2                        | 3                        | 4                        | 5                        | 6                        | 7                        |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!





На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

|                          |                          |                          |                          |                          |                          |                          |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1                        | 2                        | 3                        | 4                        | 5                        | 6                        | 7                        |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$\begin{cases} ax - y + 10b = 0 & (1) \\ ((x+8)^2 + y^2 - 1)(x^2 + y^2 - 4) \leq 0 & (2) \end{cases}$$

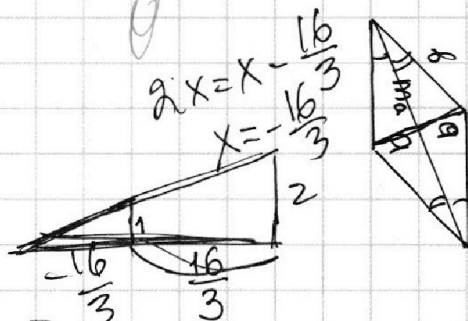
ровно 2 решения - ?

$$\begin{aligned} (1) \quad y &= ax + 10b \\ (2) \quad ((x+8)^2 + y^2 - 1)(x^2 + y^2 - 4) &\leq 0 \end{aligned}$$

$$(x+8)^2 + y^2 - 1 \leq 0$$

$$\sqrt{6}$$

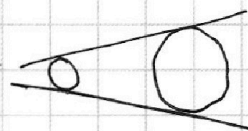
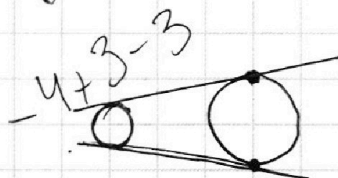
$$\frac{1}{2} = \frac{x}{x + \frac{16}{3}}$$



$$\begin{cases} ax - y + 10b = 0 \\ ((x+8)^2 + y^2 - 1)(x^2 + y^2 - 4) \leq 0 \end{cases}$$

$$(1) \quad y = ax + 10b$$

$$(2) \quad \begin{cases} (x+8)^2 + y^2 - 1 \leq 0 \\ x^2 + y^2 - 4 \geq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (x+8)^2 + y^2 \leq 1 \\ x^2 + y^2 \geq 4 \end{cases}$$



$$-8A + C > 0$$

$$\begin{aligned} Ax + By + C + 16A + 2C &= C \\ p(-8; 0) &= \frac{|Ax + By + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}} = \frac{|-8A + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}} = 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2 &= \frac{|C|}{\sqrt{A^2 + B^2}} \\ \sqrt{A^2 + B^2} &= \frac{|C|}{2} \\ 1 - 8A + C^2 &= 1 \\ |C| &= 2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} -8A + 2C &= C \\ -8A &= -C \\ 8A &= C \end{aligned}$$

$$1 = \frac{24a}{a}$$

$$\sqrt{A^2 + B^2} = 1 - 8A + C$$

$$p(0; k) = 1 \quad 2 = \frac{|C|}{1 - 8A + C}$$

$$2 = \frac{|C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$

$$\begin{aligned} 0 &= -16k + b \\ y &= kx + b \\ b &= 16k \end{aligned}$$

$$1 = \frac{1 - 8 \cdot (-a) - 16a}{\sqrt{A^2}}$$

$$2 = \frac{1 - 8A + 0 + C}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$



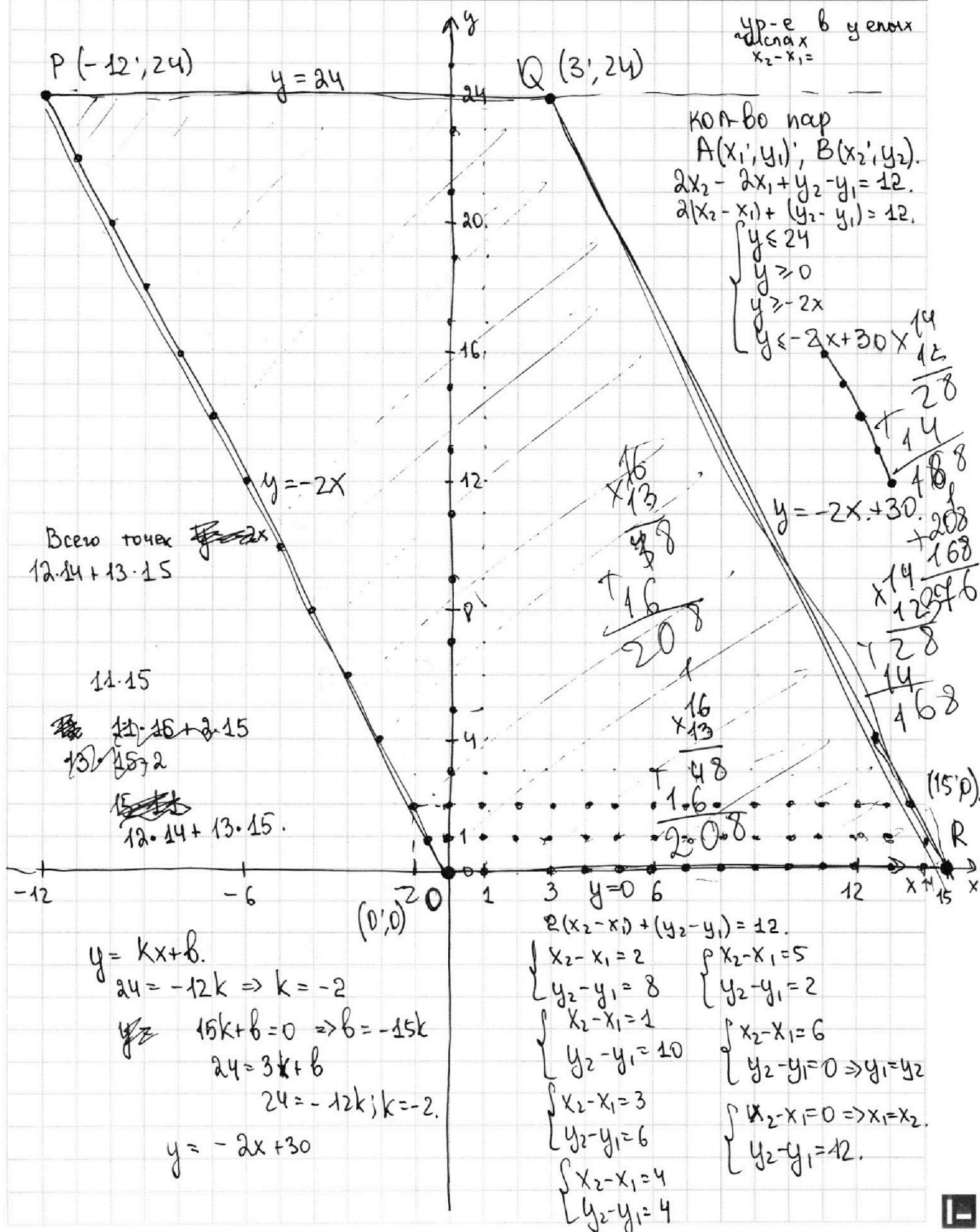
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

|                          |                          |                          |                          |                          |                          |                          |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1                        | 2                        | 3                        | 4                        | 5                        | 6                        | 7                        |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

**МФТИ**

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!







На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

|                          |                          |                          |                          |                          |                          |                          |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1                        | 2                        | 3                        | 4                        | 5                        | 6                        | 7                        |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

**МФТИ**

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{aligned} ab &: 2^{14} \cdot 7^{10} \\ bc &: 2^{14} \cdot 7^{17} \\ ac &: 2^{20} \cdot 7^{37} \end{aligned}$$

$(abc)_{\text{наим}} = ?$

$abc$

~~$abc: 2^{14} \cdot 7^{10}$~~

~~$abc: 2^{14} \cdot 7^{10}$~~

~~$ab: 2^{14} \cdot 7^{10}$~~

~~$abc: 2^{20} \cdot 7^{37}$~~

$ab$

$$ab = 2^{14} \cdot 7^{10}$$

$$ac = 2^{20} \cdot 7^{37}$$

$$\frac{b}{c} = \frac{1}{2^6 \cdot 7^{27}}$$

$$b = 2^6 \cdot 7^{27} \cdot c$$

$$x \in A \cap B \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \in A \\ x \in B \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 \leq x \leq 1 \\ 0 \leq x \leq 1 \end{cases} \Leftrightarrow 0 \leq x \leq 1$$

$$ac = 2^6 \cdot 7^{27} \cdot c$$

$$0 \leq x \leq 1$$

$$0 \leq x \leq 1$$

$$2x^2 - 4x + 3 = 0$$

$$T = 2x^2 - 4x + 3$$

$$T = 2x^2 - 4x + 3$$

$$T = 2x^2 - 4x + 3$$

$$x = \frac{1}{2}$$

$$0 = (x-1)(x-2)$$

$$0 = (x-1)(x-2)$$

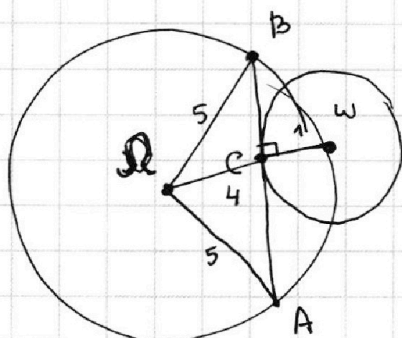
На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

|                                     |                                     |                                     |                                     |                                     |                                     |                                     |
|-------------------------------------|-------------------------------------|-------------------------------------|-------------------------------------|-------------------------------------|-------------------------------------|-------------------------------------|
| 1                                   | 2                                   | 3                                   | 4                                   | 5                                   | 6                                   | 7                                   |
| <input checked="" type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> |

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

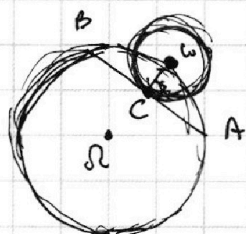


$$AC: CB=7$$

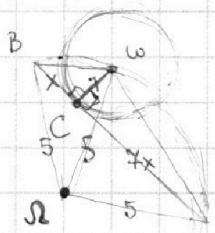
$$\frac{AC}{CB} = 7 \Rightarrow AC = 7CB.$$

$$R_W = 1; R_O = 5.$$

$$49x^2 + 49x^2 + 99x + 99 = 0.$$



$$19404$$



$$49x^4 + 50x^2 - 99 = 0.$$

$$x = 1$$

$$49x^4 + 50x^2 - 99 \quad | \quad x-1$$

$$49x^4 - 49x^3 \quad | \quad 49x^3 + 50x^2 - 99$$

$$49x^3 - 49x^2 \quad | \quad 99x^2 - 99$$

$$99x^2 - 99x \quad | \quad 99x - 99$$

$$\sqrt{49x^4 + 49x^2 + x^2 + 1} = 10.$$

$$49x^4 + 49x^2 + x^2 + 1 = 100$$

$$49x^2(x^2 + 1) + (x^2 + 1) = 100$$

$$(49x^2 + 1)(x^2 + 1) = 100.$$

$$Q = 2500 + 4 \cdot 99 \cdot 49 =$$

$$= 2500 + 396 \cdot 49 =$$

$$=$$

По т. косинусов:

$$AB^2 = BW^2 + WA^2 - 2 \cdot BW \cdot WA \cdot \cos \angle BWA.$$

$$64x^2 = 1 + x^2 + 49x^2 + 1 - 2 \cdot \sqrt{(1+x^2)(49x^2+1)} \cdot \cos \angle BWA$$

$$14x^2 = 2 - 2\sqrt{(1+x^2)(49x^2+1)} \cdot \cos \angle BWA$$

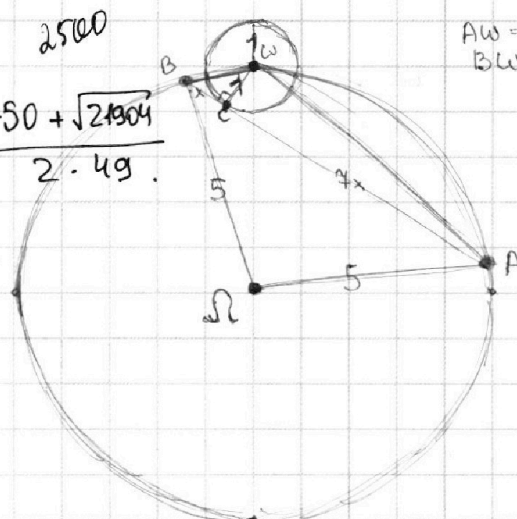
$$\cos \angle BWA = \frac{2 - 14x^2}{\sqrt{2(1+x^2)(49x^2+1)}}.$$

$$2500$$

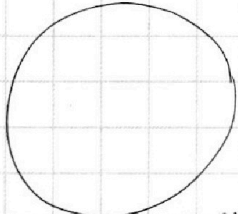
$$\frac{-50 + \sqrt{21904}}{2 \cdot 49}.$$

$$AW = \sqrt{49x^2+1}$$

$$BW = \sqrt{x^2+1}$$



$$\begin{array}{r} 85 \\ \times 396 \\ \hline 73564 \\ + 1584 \\ \hline 19404 \\ + 19404 \\ \hline 38808 \\ + 38808 \\ \hline 77616 \end{array}$$



$$21904.$$

$$\frac{\sqrt{49x^2+1}}{(\sqrt{49x^2+1})(\sqrt{x^2+1})} = 10$$

$$\sin \angle WBC = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$$

$$\sin \angle WAB = \frac{CW}{WA} = \frac{1}{\sqrt{49x^2+1}}.$$

$$\frac{AW}{\sin \angle WBC} = \frac{BW}{\sin \angle WAB} = 2R$$

$$\sin \angle BWC = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$$

$$\sin \angle WBC = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$\cancel{AN} = \cancel{CN} \quad AN = CN = x$$

$$ma = \sqrt{\frac{2x^2 + 2c^2}{4} - \frac{a^2}{4}}$$

[illegible]

$$49t^2 + 50t - 99 = 0$$

$$\Delta = 2500 + 4 \cdot 49 \cdot 99 =$$

$$\sqrt{\frac{2b^2 + a^2}{a^2} - \frac{4}{a^2}} = \frac{b}{a}$$

$$(g_H + g + v) = \text{нишу}$$

$$\{g+h+a \leq 4\}$$

$$0 \leq 4 - g - h - a$$

$$a+b \leq a \rightarrow \text{He maxim.}$$

$$(a+b)(g+h+a) \leq 4(a+b)$$

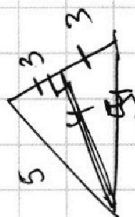
$$0 \leq (g+h+a) - g - h - a$$

$$g(a+b) \leq (g+h+a)g$$

$$2g + 2g + g + g \leq (g+h+a)g$$

$$4g \leq (g+h+a)g$$

$$\left[ \begin{array}{r} 5/5 \\ - \\ 5/5 \end{array} \right]$$



Корич.

③ 6

$$y_H = (g + a)u$$

$${}^{\text{th}} \text{H.M.} + \text{H.E.H.M.}$$

$$\frac{g(a+b)(g+v)}{a+b}$$

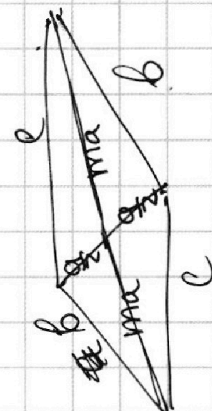
$$\begin{aligned} & a^2 + 6ab + b^2 \\ & \vdots m \\ & a^2 + 2ab + b^2 + 4ab \\ & (a+b)^2 + 4ab \end{aligned}$$

$$m : g + v$$

gym u. Herem  
Hymos u. nym  
Hymos u. Herem

$a \neq b$

$$\frac{a^2 - 6ab + 8b^2}{a + b}$$



Стр. 136  
В. 136

$\frac{a}{b}$  некорректно.





На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

|                          |                          |                          |                          |                          |                          |                          |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1                        | 2                        | 3                        | 4                        | 5                        | 6                        | 7                        |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\triangle CO_2B; \quad B(-\frac{16}{3}; 0).$$

$$BO_2 = \frac{16}{3}$$

$$BO_2 = \frac{16}{3}; CO_2 = 2.$$

$$BC = \sqrt{4 + \frac{256}{9}} = \sqrt{\frac{36+256}{9}} = \sqrt{\frac{292}{9}} = \frac{\sqrt{292}}{3}$$

$$BC =$$

$$y = kx + b.$$

$$a = 23.720$$

$$B \quad a = 23.720$$

$$O = -\frac{16}{3}k + b.$$

$$\frac{16}{3}k = b$$

$$\begin{aligned} ax - y + b &= 0 \\ ax - y + b &= 0. \end{aligned}$$

$$2A = |C|$$

$$C = \frac{16}{3}A = \frac{2 \cdot 16 |C|}{3 \cdot 8}$$

$$k = \frac{C}{8} = \frac{2}{3} |C|$$

$$1 = \frac{1}{A}$$

$$A = |-8A| + |C|$$

$$A = |-8A| + 2A$$

$$-A = |-8A|$$

$$2A = |C|$$

$$A = |-8A + C|$$

$$\begin{aligned} a \cdot b \cdot c &= 23.720 \cdot b \cdot a \cdot 2^{13} \cdot 4^{14} \\ &= 2^{13} \cdot 4^{14} \cdot 23.720 \cdot b \cdot a \cdot 2^{13} \cdot 4^{14} \\ &= 2^{13} \cdot 4^{14} \cdot 23.720 \cdot b \cdot a \cdot 2^{13} \cdot 4^{14} \end{aligned}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$\rho(O_1; l) = \frac{|-8a - 10b|}{a} = 1$$

$$\rho(O_2; l) = \frac{|-10b|}{a} = 2$$

$$|-8a - 10b| = a$$

$$-10b = 2a$$

$$b = \frac{1}{5}a$$

$$-\frac{16}{3}$$

$$y = ax + b$$

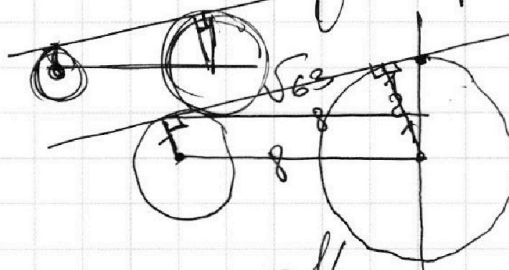
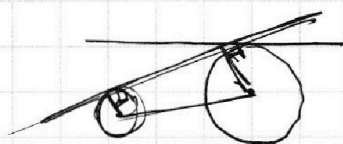
#

$$2 = b$$

$$2 = -\frac{16}{3}$$

$$0 = -16a + 2$$

$$a = \frac{2}{-16} = -\frac{1}{8}$$



$$\left| -8 \cdot \frac{15b}{8} + 10b \right| = 1$$

$$5b = a$$

$$a = \frac{15b}{8} = \frac{3a}{8}$$

$$B\left(-\frac{16}{3}; 0\right)$$

$$y = ax + 10b$$

$$\frac{16}{3}a = 10b$$

$$a = \frac{30}{16}b = \frac{15}{8}b$$

$$\frac{16}{3}a = 10b$$

$$a = \frac{30b}{16} = \frac{15b}{8}$$

$$\rho(O_1; l) = \frac{|-8A + 10C|}{\sqrt{A^2}} = \frac{|-8A + C|}{A}$$

$$1 = \frac{|-8A + C|}{A}$$

$$y = ax + b$$

$$ax - y + 10b = 0$$

$$\frac{|-8A + 10b|}{a}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7  
☒ ☒ ☒ ☒ ☒ ☒ ☒

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

4

$$\sqrt{2x^2 - 5x + 3} - \sqrt{2x^2 + 2x + 1} = 2 - 7x.$$

$$\begin{cases} 2 - 7x \geq 0 \\ 2x^2 - 5x + 3 - 2\sqrt{(2x^2 - 5x + 3)(2x^2 + 2x + 1)} + 2x^2 + 2x + 1 = 2 - 7x. \end{cases}$$

$$4x^2 - 3x + 4 - 2\sqrt{4x^4 + 4x^3 + 2x^2 - 10x^3}$$

$$4x^2 - 3x + 4 - 2 + 7x = 2\sqrt{4x^4 + 4x^3 + 2x^2 - 10x^3 - 10x^2 - 5x + 6x^2 + 6x + 3}$$

$$4x^2 + 4x + 2 = 2\sqrt{4x^4 - 6x^3 - 2x^2 + x + 3}.$$

$$4x^4 - 6x^3 - 2x^2 + x + 3$$

$$\begin{array}{r} 4x^4 - 6x^3 - 2x^2 + x + 3 : x - 1 \\ \underline{4x^4 - 4x^3} \phantom{- 2x^2 + x + 3} \\ -2x^3 - 2x^2 + x + 3 \\ \underline{-2x^3 + 2x^2} \phantom{+ x + 3} \\ -4x^2 + x + 3 \\ \underline{-4x^2 + 4x} \phantom{+ 3} \\ -3x + 3 \\ \underline{-3x + 3} \\ 0 \end{array}$$

$$(x-1)(4x^3 - 2x^2 - 4x - 3).$$

$$0 < x < \frac{2}{7} \Rightarrow x - 1 < 0$$

$$0 < 4x^3 - 2x^2 - 4x - 3$$

$$0 < 4x^3 - 2x^2 - 4x - 3$$

$a, b, c \in \mathbb{N}$ .

$$ab : 2^{14} \cdot 7^{10}$$

$$bc : 2^{12} \cdot 7^{14}$$

$$ac : 2^{20} \cdot 7^{34}$$

наим. возм.  $abc = ?$   
(произведение).

$$F = \frac{h}{h-3} = 2x$$

$$\frac{z}{3} = \frac{h}{1+3} = x$$

$$F = 3 \cdot 2 \cdot h - 58 = 0$$

$$3 + x \cdot 5 \cdot 2 \cdot x \cdot 8$$

$$\sqrt{2x^2 - 5x + 3} + \sqrt{2x^2 + 2x + 1} = 2 - 7x$$

$$x = \frac{2}{7}$$

$$x = \frac{2}{7}$$

$$x = \frac{2}{7}$$

$$(2 - 7x) \left( \sqrt{2x^2 - 5x + 3} + \sqrt{2x^2 + 2x + 1} \right) = 0$$

$$0 = (2 - 7x) \left( \sqrt{2x^2 - 5x + 3} + \sqrt{2x^2 + 2x + 1} \right)$$

$$(2x^2 - 5x + 3 - (2 - 7x) \left( \sqrt{2x^2 - 5x + 3} + \sqrt{2x^2 + 2x + 1} \right)) = 0$$