



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

10 КЛАСС. Вариант 10



$$\begin{array}{r} 218 \\ \times 12 \\ \hline 436 \\ 2180 \\ \hline 2608 \end{array}$$

$$\sqrt{169 - 144 \times 2} = 119 \times 2 - 49$$

1. [4 балла] Натуральные числа a, b, c таковы, что ab делится на $2^{15}7^{11}$, bc делится на $2^{17}7^{18}$, ac делится на $2^{23}7^{39}$. Найдите наименьшее возможное значение произведения abc .
2. [4 балла] Известно, что дробь $\frac{a}{b}$ несократима ($a \in \mathbb{N}, b \in \mathbb{N}$). На доске записана дробь

$$\frac{a+b}{a^2-7ab+b^2}$$

При каком наибольшем m могло оказаться, что числитель и знаменатель дроби можно сократить на m ?

$$\begin{array}{r} 26 \\ \times 12 \\ \hline 52 \\ 260 \\ \hline 312 \end{array}$$



3. [4 балла] Центр окружности ω лежит на окружности Ω , хорда AB окружности Ω касается ω в точке C так, что $AC : CB = 17 : 7$. Найдите длину AB , если известно, что радиусы ω и Ω равны 7 и 13 соответственно.



$$3(x+1)^2 - 3x$$

4. [5 баллов] Решите уравнение

$$\begin{array}{r} 1914 \\ \times 14 \\ \hline 7656 \\ 13698 \\ \hline 26796 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 24 \\ \times 24 \\ \hline 96 \\ 480 \\ \hline 576 \end{array}$$

$$\sqrt{3x^2 - 6x + 2} - \sqrt{3x^2 + 3x + 1} = 1 - 9x$$

$$3(x-1)^2 - 1$$

$$1 - 3 \cdot 3x$$

5. [5 баллов] На координатной плоскости дан параллелограмм с вершинами в точках $O(0;0)$, $P(-13;26)$, $Q(3;26)$ и $R(16;0)$. Найдите количество пар точек $A(x_1; y_1)$ и $B(x_2; y_2)$ с целыми координатами, лежащих в этом параллелограмме (возможно, на границе) и таких, что $2x_2 - 2x_1 + y_2 - y_1 = 14$.

$$x^2 - 12x + 1$$

$$2x^2 - 4x + 1$$

6. [5 баллов] Найдите все значения параметра a , для каждого из которых найдётся значение параметра b , при котором система

$$\begin{array}{r} 959 \\ \times 12 \\ \hline 1918 \\ 19180 \\ \hline 11508 \end{array}$$

$$\begin{cases} ax + y - 8b = 0, \\ (x^2 + y^2 - 1)(x^2 + (y - 12)^2 - 16) \leq 0 \end{cases}$$

имеет ровно 2 решения.

$$(x-1)^2 \quad (2x-1)/(x-1)$$

$$\begin{array}{r} x^2 - 3x + 1 \\ (x-2)/(x-1) \end{array}$$

7. [6 баллов] Треугольник ABC вписан в окружность. Пусть M – середина той дуги AB описанной окружности, которая не содержит точку C ; N – середина той дуги AC описанной окружности, которая не содержит точку B . Найдите расстояние от вершины A до центра окружности, вписанной в треугольник ABC , если расстояния от точек M и N до сторон AB и AC соответственно равны 5 и 2,5.

$$x^2 - 3x + 2$$

$$(x-2)/(x-1) + 3x + 2x^2$$

© МФТИ, 2023

$$4x - 14x - 49 = 1$$

$$\begin{array}{r} 692 \\ \times 12 \\ \hline 1384 \\ 6920 \\ \hline 8304 \end{array}$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☒	☐	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$ab: 2^{15} \cdot 4^{11} \quad bc: 2^{14} \cdot 4^{18} \quad ac: 2^{23} \cdot 4^{39}$$

$$a = 2^{x_1} \cdot 4^{y_1} \cdot k_1, \quad k_1 \nmid 2, 4$$

$$b = 2^{y_1} \cdot 4^{y_2} \cdot k_2$$

$$c = 2^{z_1} \cdot 4^{z_2} \cdot k_3$$

$$ab = 2^{x_1+y_1} \cdot 4^{y_1+y_2} \cdot k_1 \cdot k_2 \therefore 2^{15} \cdot 4^{11}$$

$$x_1 + y_1 \geq 15$$

$$x_2 + y_2 \geq 18$$

$$\text{аналогично: } y_1 + z_1 \geq 14 \quad y_2 + z_2 \geq 18 \quad x_1 + z_1 \geq 23$$

$$x_2 + z_2 \geq 39$$

$$\begin{cases} x_1 + y_1 \geq 15 \\ y_1 + z_1 \geq 14 \\ x_1 + z_1 \geq 23 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} ac &= ab \cdot bc = 2^{15} \cdot 4^{11} \cdot 2^{14} \cdot 4^{18} = 2^{29} \cdot 4^{29} \\ ab &= 2^{15} \cdot 4^{11} \\ bc &= 2^{14} \cdot 4^{18} \\ ac &= 2^{29} \cdot 4^{29} \end{aligned}$$

проц. все выражение q_1

$$2x_2 + 4y_2 + 2z_2 \geq 18 + 39 + 11 \quad \text{но они не больше 39.}$$

$$x_2 + y_2 + z_2 \geq 39 \Rightarrow x_2 + y_2 + z_2 \geq 39$$

$$ab \cdot c = 2^{x_1+y_1+z_1} \cdot 4^{y_1+y_2+z_2} \cdot k_1 \cdot k_2 \cdot k_3$$

$$\geq 2^{23} \cdot 4^{39}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☒	☐	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

нз / $x_1 + y_1 \geq 15$
 $y_1 + z_1 \geq 17$
 $x_1 + z_1 \geq 23$

$x_2 + y_2 \geq 11$
 $x_2 + z_2 \geq 18$
 $x_2 + z_2 \geq 35$

$2x_1 + 2y_1 + 2z_1 \geq 55$

$2x_2 + y_2 + 2z_2 \geq 48$

$x_1 + y_1 + z_1 \geq 27.5$
 $x_1 + y_1 + z_1 \geq 28$

$x_2 + y_2 + z_2 \geq 39$

$\Rightarrow abc = 2^{x_1+y_1+z_1} \cdot 4^{x_2+y_2+z_2} \cdot k_1 \cdot k_2 \cdot k_3$
 $2^{28} \cdot 4^{39}$

Это выражение достигается при

$x_1 = 10$

$x_2 = 11$

$y_1 = 5$

$y_2 = 0$

$z_1 = 13$

$z_2 = 18$

$a = 2^{10} \cdot 7^{11}$

$b = 2^5$

$c = 2^{13} \cdot 7^{18}$

$abc = 2^{28} \cdot 7^{39}$

Ответ: 1

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☒	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{aligned}
 a+b &: m & a^2 - 4ab + b^2 &= a+2ab-9ab+b^2 \\
 & & &= (a+b)^2 - 9ab : m \\
 & & & \Rightarrow 9ab : m \quad \text{если } a, b \\
 & & & \text{или } m \mid a, \text{ или } m \mid b : m, \text{ то } m \mid a+b \\
 a+b &: m, \text{ то } a, b : m \Rightarrow \\
 a \mid b : m &\Rightarrow a : m \quad m \leq 9 \\
 \text{для } m=9 & \quad a=4 \quad b=5 \\
 a+b=9 & \quad a^2 - 4ab + b^2 = -99 \\
 -\frac{9}{99} & \quad \text{сокн. } 40 - \frac{1}{11} \\
 \text{Ответ: } & m=9
 \end{aligned}$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☒	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$BC = 7x$ $AC = 17x$ $\odot H$ перпендикуляр AB к AC

$BM = H$

$4 H = BM = 12x$

$CH = 5x$

$WL \perp OM$

$\Rightarrow h^2 + (12x)^2 = 169$

$(h+7)^2 + (5x)^2 = 169$ / мы можем так, что с перпендикуляром

параллельно существует CH точки W и WL

конец перпендикуляра со стороны

$h+7$, $5x$ и 13

$h^2 + 144x^2 = 169$ $h = \sqrt{169 - 144x^2}$

$h^2 + 144x^2 + 49 + 25x^2 = 169$

$119x^2 - 49 = 144$

$119x^2 - 49 = 144\sqrt{169 - 144x^2}$

$119x^2 - 49 = 2\sqrt{169 - 144x^2}$

$238x^4 - 238x^2 + 49 = 646 - 546x^2$

$238x^4 + 338x^2 - 627 = 0$

$x^2 = \frac{-338 \pm \sqrt{338^2 + 627 \cdot 238 \cdot 4}}{2 \cdot 238} = \frac{169}{238}$

$x = \frac{13}{14}$ $AB = \frac{13}{14} \cdot 24 = \frac{372}{14}$

Знамен

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☒ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$\sqrt{3x^2-6x+2} - \sqrt{3x^2+3x+1} = 7-9x$$

$$3x^2-6x+2 + 3x^2+3x+1 = 3x^2-27x+2$$

$$= 81x^2-18x+1$$

$$1) (3x^2-6x+2) - (3x^2+3x+1) = 7-9x$$

$$\Rightarrow 7-9x = (\sqrt{3x^2-6x+2} - \sqrt{3x^2+3x+1})$$

$$= (\sqrt{3x^2-6x+2} + \sqrt{3x^2+3x+1})$$

$$\cdot (\sqrt{3x^2-6x+2} - \sqrt{3x^2+3x+1})$$

$\Downarrow$

$$\sqrt{3x^2-6x+2} + \sqrt{3x^2+3x+1} = 7-9x$$

$$\Rightarrow 2\sqrt{3x^2-6x+2} = 7-9x$$

$$12x^2-24x+8 = 3x^2-36x+4$$

$$9x^2-12x-4=0$$

$$2) \sqrt{3x^2-6x+2} + \sqrt{3x^2+3x+1} = 7$$

Вспомог. uz $uz.2$ $uz.1$

$$2\sqrt{3x^2+3x+1} = 9x$$

$$4x^2+12x+4 = 81x^2$$

$$81x^2-12x-4=0$$

$$x = \frac{12 \pm \sqrt{12^2+4 \cdot 81 \cdot 4}}{2 \cdot 81} = \frac{12 \pm 4\sqrt{48}}{276}$$

Ответ: $x = \frac{12 \pm 4\sqrt{48}}{276}$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☒	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



15

Возьмем все уравнения вида
 $2x + y = k$. Заметим, что
 такая прямая параллельна
 сторонам OP и QR паралл. $\Rightarrow$
 для всех k от O (прямая OP)
 до Q (прямая QR)
 если мы берем две точки x_1, y_1
 и x_2, y_2 так, что
 $(2x_1 + y_1) - (2x_2 + y_2) = 14$, то мы
 $\Rightarrow 2x_1 + y_1 = k_1$ и $2x_2 + y_2 = k_2$, то
 мы можем взять любые две точки
 на A и B , которые лежат
 на $2x + y = k_1$ и $2x + y = k_2$
 для каждой прямой в параллельном
 семействе k
 лежит 26 целых точек (это видно из того
 что каждая прямая покрывает одним из
 точек) и 25 семейств k - следовательно
 очевидно что здесь k_1 и k_2 - равной цене
 при переходе чертятся, чтобы не было
 14 - 10 - столько берем 2 точки - 26 - 2
 от. брать - 25. Ответ: всего пер. $10 \cdot 26 + 9 \cdot 25 = 469$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7
☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☒ ☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

№ 1
 $y = 3b - ax$
 $f(x) = (x^2 + (3b - ax)^2 - 1)(x^2 + (3b - ax - 1)^2 - 1) \leq 0$

эта $f(x)$ непрерывна. Заметим,
что если она в какой-то $x < 0$, то
это значит, что левая часть
интервала на котором она ≤ 0

(пусть в x_0 она $f(x) < 0$, тогда
по опред. $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ для любого $\varepsilon > 0$
мы можем это сказать, т.к. она непрерывна.

сущ. $\delta > 0$ так, что для любого x

из $(x - \delta; x + \delta)$ $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon \Rightarrow$

возьмем $\varepsilon < -f(x_0)$ тогда сущ.

δ , что на отрезке $(x - \delta; x + \delta)$

$|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon \Rightarrow f(x) < 0 \Rightarrow$

если $f(x)$ для точечных решений

то это можно еще так сказать

$f(x) = 0 \quad (x^2 + (3b - ax)^2 - 1)(x^2 + (3b - ax - 1)^2 - 1) = 0$

имеет 2 корня и не имеет $f(x) < 0$

Заметим, что $g(x)$ и $Q(x)$ — параболы с
 вершинами $x = (1+a^2)$ — они симметричны
 относительно $x = 1$ и $x = 2$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☒	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

26 стр. 3

$$\Rightarrow 22ax - 192b + 129 = 0 \text{ всегда (т.к. это}$$

линейная функция и если у нее 2 корня,
то все числа - те корни)

$$\Rightarrow a = 0 \quad 128 - 192b = 0 \quad b = \frac{128}{192}$$

~~при $a \neq 0$ $22ax - 192b + 129 = 0$ имеет 2 корня x_1, x_2 и $x_1 + x_2 = \frac{192b - 129}{22a}$~~

$\Rightarrow$ у $q(x)$ 2 корня и $q(x)$ равно

линейной $q(x)$ и $q(x)$ по одному

корню, то это не верно

~~при $a \neq 0$ $22ax - 192b + 129 = 0$ имеет 2 корня x_1, x_2 и $x_1 + x_2 = \frac{192b - 129}{22a}$~~

$$D(q(x)) = (2ka)^2 - 4(1+a^2)(k^2-1) =$$

$$4k^2a^2 - 4k^2a^2 - 4k^2 + 4 + 4a^2 =$$

$$4a^2 - 4k^2 + 4 = 0 \quad a^2 - k^2 + 1 = 0$$

$$D(q(x)) = (2ka - 2ak)^2 - 4(1+a^2) \cdot$$

$$(k^2 + 128 - 128k) = 1576a^2 - 96a^2k + 4a^2k^2$$

$$- 4a^2k^2 - 512a^2 + 48a^2k - 4k^2 - 512 + 4ak$$

$$64a^2 - 48a^2k - 512 - 4k^2 + 48k = 0$$

$$16a^2 - 12a^2k - 128 - k^2 + 48k = 0$$

$$13a^2 - 12a^2k - 129 + 48k = 0$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☒	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$a^2 - k^2 + a = 0$ ^{нб стр. 4}

$16a^2 - 72a^2k - 72b - k^2 + 43k = 0$

$x^2 + y^2 - 1 = x^2 + (y - 72)^2 - 76 = 0$

$y^2 - 1 = (y - 72)^2 - 76$

$y^2 - 1 = y^2 - 24y + 720$

$2 \cdot 4y = 729$

$y = \frac{729}{24} \Rightarrow y$ не целое

Значит только $a = 0 \Rightarrow$ не более одной
решения $\Rightarrow a = 0$

Значит: $y = 0$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☒ ☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

~~6) (проверка)~~ 26 стр. 2
но на интервале $(x_1; x_2)$ $g(x) \neq -a$ и с тем оми
на $(-\infty; x_1) \cup (x_2; +\infty)$ $g(x) \neq -a$ ^{и с тем оми} $\Rightarrow$ ^{здесь}
 $Q(x)$ имеет <0 и >0 на тех же
интервалах $\Rightarrow$ или у $g(x)$ корни x_1 и x_2 ,
то у $Q(x)$ имеют корни $(x_1$ и $x_2)$ или
было так что $g(x)$ и $Q(x)$ в
разные знаки $y + (-y) < 0$.

или $g(x)$ не имеет корней;
но тогда у $Q(x)$ не может
быть 2 корня т.к. или у $Q(x)$
2 корня но что x_1 при котором
 $Q(x_1) < 0$ и x_2 $Q(x_2) > 0$ и
тогда либо $f(x_1) < 0$ либо $f(x_2) < 0$
 $\Rightarrow$ либо у $Q(x)$ и $f(x)$ общие

Корнями, либо из квадратного по 1 корню
или из них одним корнем. x_1 и x_2 , то $q(x_1) - q(x_2) =$
 $q(x) = x^2 + \underline{a^2} x^2 - 16abx + 64b^2 - 1 = q(x_1) - q(x_2)$
 $q(x) = x^2 + \underline{a^2} x^2 + 64b^2 + 144 - 16abx - 192b$
 $q(x) - q(x) = 144 - 192b + 24ax$
 $144 - 192b + 24ax = 0$ при x_1 и x_2