



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

10 КЛАСС. Вариант 9



1. [4 балла] Натуральные числа a , b , c таковы, что ab делится на $2^{14}7^{10}$, bc делится на $2^{17}7^{17}$, ac делится на $2^{20}7^{37}$. Найдите наименьшее возможное значение произведения abc .

2. [4 балла] Известно, что дробь $\frac{a}{b}$ несократима ($a \in \mathbb{N}$, $b \in \mathbb{N}$). На доске записана дробь

$$\frac{a+b}{a^2-6ab+b^2}.$$

При каком наибольшем m могло оказаться, что числитель и знаменатель дроби можно сократить на m ?

3. [4 балла] Центр окружности ω лежит на окружности Ω , хорда AB окружности Ω касается ω в точке C так, что $AC : CB = 7$. Найдите длину AB , если известно, что радиусы ω и Ω равны 1 и 5 соответственно.

4. [5 баллов] Решите уравнение

$$\sqrt{2x^2 - 5x + 3} - \sqrt{2x^2 + 2x + 1} = 2 - 7x.$$

5. [5 баллов] На координатной плоскости дан параллелограмм с вершинами в точках $O(0; 0)$, $P(-12; 24)$, $Q(3; 24)$ и $R(15; 0)$. Найдите количество пар точек $A(x_1; y_1)$ и $B(x_2; y_2)$ с целыми координатами, лежащих в этом параллелограмме (возможно, на границе) и таких, что $2x_2 - 2x_1 + y_2 - y_1 = 12$.

6. [5 баллов] Найдите все значения параметра a , для каждого из которых найдётся значение параметра b , при котором система

$$\begin{cases} ax - y + 10b = 0, \\ ((x+8)^2 + y^2 - 1)(x^2 + y^2 - 4) \leq 0 \end{cases}$$

имеет ровно 2 решения.

7. [6 баллов] Треугольник ABC вписан в окружность. Пусть M – середина той дуги AB описанной окружности, которая не содержит точку C ; N – середина той дуги AC описанной окружности, которая не содержит точку B . Найдите расстояние от вершины A до центра окружности, вписанной в треугольник ABC , если расстояния от точек M и N до сторон AB и AC соответственно равны 4,5 и 2.



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:



МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$a = 2^n \cdot 7^n \cdot x$$

x, y, z - натуральные числа

$$b = 2^{14-n} \cdot 7^{10-n} \cdot y$$

$$c = 2^{20-n} \cdot 7^{37-n} \cdot z$$

$$ab = 2^{14} \cdot 7^{10} \cdot xy$$

$$ac = 2^{20} \cdot 7^{37} \cdot xz$$

$$bc = 2^{34-2n} \cdot 7^{47-2n} \cdot yz$$

Чтобы произведение было натуральным $x, y, z = 1$

$$bc = 2^{34-2n} \cdot 7^{47-2n} \Rightarrow n \leq 8 \quad \text{всё}$$

чем больше n , тем меньше bc числа $\Rightarrow n = 8 \quad bc = 2^{18} \cdot 7^{31}$

$$a = 2^8 \cdot 7^8$$

$$b = 2^6 \cdot 7^2$$

$$abc = 2^{26} \cdot 7^{39}$$

$$bc = 2^{12} \cdot 7^{29}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☒	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$2. \frac{a+b}{a^2-8ab+b^2} = \frac{a+b}{(a+b)^2-8ab}$$

~~написано~~

~~написано~~

~~написано~~

$$\frac{a}{b} \text{ не сократили} \quad \frac{a+b}{a^2-8ab+b^2} = \frac{a+b}{(a+b)^2-8ab}$$

Заметим, что так как эта дробь может сократиться - это

$$a+b \Rightarrow \frac{a+b}{-8ab} \text{ сократили, } \frac{a+b}{a} \text{ не сократили, } \frac{a+b}{2} \text{ не сократили} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \text{так как это можно сократить это } 8 \Rightarrow a+b=8, a=1, b=7$$

$$\frac{1+7}{(1+7)^2-8 \cdot 7} = \frac{1}{8-8} = 1 \quad m=8$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☒	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$\sqrt{2x^2 - 5x + 3} - \sqrt{2x^2 + 2x + 1} = 2 - 7x$$

$$y = 4 - 2 < 0$$

$$2x^2 - 5x + 3 \geq 0$$

$$2x^2 + 2x + 1 \geq 0$$

всегда больше 0

$$\sqrt{2x^2 - 5x + 3} = 2 - 7x + \sqrt{2x^2 + 2x + 1}$$

$$2x^2 - 5x + 3 = (2 - 7x)^2 + 2x^2 + 2x + 1 + 2(2 - 7x)\sqrt{2x^2 + 2x + 1}$$

$$2 - 7x - (2 - 7x)^2 = 2(2 - 7x)\sqrt{2x^2 + 2x + 1}$$

$$x = \frac{2}{7} \text{ решение}$$

Рассмотрим случаи, когда $x \neq \frac{2}{7}$

$$2 \cdot \frac{4}{49} - \frac{10}{7} + 3 \geq 0 \Rightarrow$$

$\Rightarrow$ решить x
похожим.

$$1 - 2 + 7x = 2\sqrt{2x^2 + 2x + 1}$$

$$7x - 1 = 2\sqrt{2x^2 + 2x + 1}$$

$$x \geq \frac{1}{7}$$

$$49x^2 - 14x + 1 = 8x^2 + 8x + 4$$

$$41x^2 - 22x - 3 = 0$$

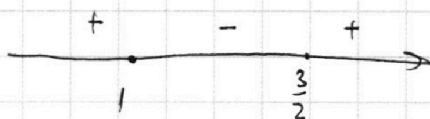
$$D = 22^2 + 3 \cdot 4 \cdot 41 = 484 + 492 = 976 = 4^2 \cdot 61$$

$$x = \frac{6 \pm 4\sqrt{61}}{82}$$

$$x = \frac{6 \pm 4\sqrt{61}}{82}$$

$$x = \frac{6 \pm 4\sqrt{61}}{82}$$

$$\begin{cases} 2x^2 - 5x + 3 \geq 0 \\ (x-1)(2x-3) \end{cases}$$



$$x = \frac{1 - 4\sqrt{61}}{82} \text{ не подходит, т.к. все отрицательные или не подходит}$$

$$x = \frac{6 + 4\sqrt{61}}{82} < 1 \Rightarrow \text{также не подходит}$$

$$\text{Ответ: } x = \frac{6 \pm 4\sqrt{61}}{82} \quad x = \frac{2}{7}$$



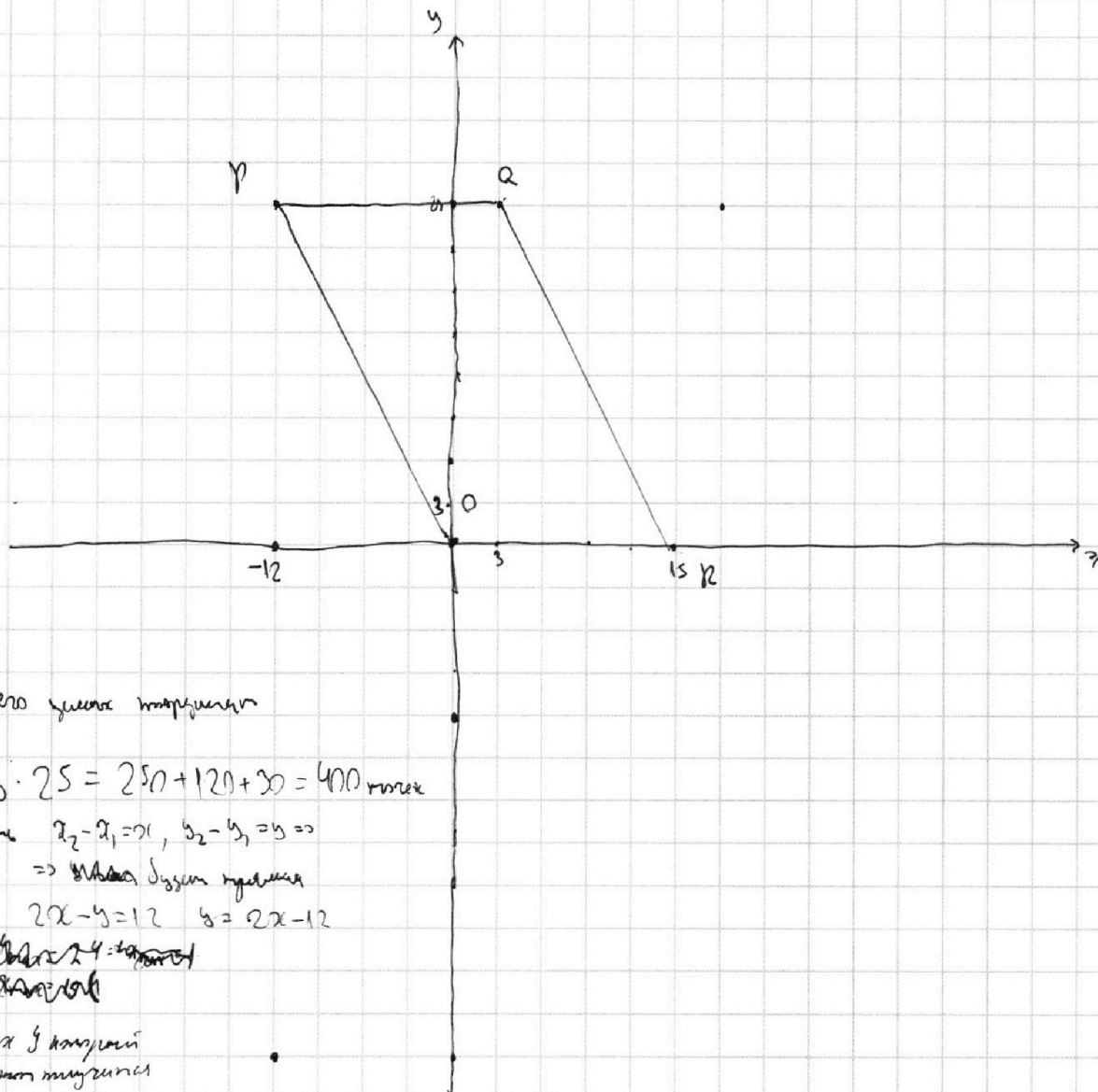
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☒	☐	☐



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



Всего успеет проехать

$$16 \cdot 25 = 250 + 120 + 30 = 400 \text{ км}$$

мысли $x_2 - x_1 = 21$, $y_2 - y_1 = 4 \Rightarrow$

$\Rightarrow$ ~~мысли~~ ~~система уравнений~~

$$2x - y = 12 \quad y = 2x - 12$$

~~или $2x - 4 = 12$~~

~~$x = 8$~~

мы y ~~мысли~~
мысли ~~мысли~~

y , мы $x = 30$

~~мысли~~
~~мысли~~

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☒	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{cases} ax - y + 10b = 0 \\ ((x+8)^2 + y^2 - 1)(x^2 + y^2 - 4) \leq 0 \end{cases}$$

$$((x+8)^2 + y^2 - 1)(x^2 + y^2 - 4) \leq 0$$

$$(x+8)^2 + y^2 = 1 \text{ центр } (-8; 0) \quad R=1 \quad x^2 + y^2 = 4 \text{ центр } (0; 0) \quad R=2$$

$$y = ax + 10b - \text{это}$$

прямая коэффициенты a -

для каждого угла наклона

прямой, а коэффициент b сдвигает

прямую вверх и вниз.

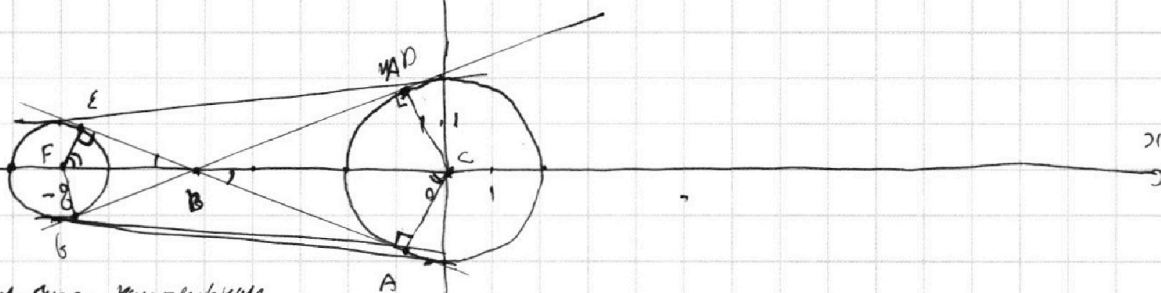
2 решения будут тогда когда

прямая касается обеих окружностей

~~касательная к окружностям~~

~~касательная к окружностям~~

все это будут касательные
касательная 2 окружностей, а также
то что на окружностях



прямая, что касательная

касательная к окружностям

касательная

$$\angle FEA = \angle FAC, \quad EA \text{ секущая}$$

$$\Rightarrow \angle FEA = \angle FAC, \quad EA \text{ секущая}$$

$$\Rightarrow \angle FEA = \angle FAC$$

$$\angle FEA = \angle FAC = \angle BFA = \angle CAD$$

лучи EA и FA - секущие

$$\angle FEA = \angle FAC \Rightarrow \angle FEA = \angle FAC$$

$$\Rightarrow \angle FEA = \angle FAC \Rightarrow \angle FEA = \angle FAC$$

$$\angle FEA = \angle FAC \Rightarrow \angle FEA = \angle FAC$$

$$\angle FEA = \angle FAC \Rightarrow \angle FEA = \angle FAC$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$\frac{a+b}{a^2-6ab+b^2} = \text{искать}$$

10 4

$$a = \frac{6b \pm \sqrt{36b^2 - 4b^2}}{2} = \frac{6b \pm \sqrt{32b^2}}{2} = 3b \pm b\sqrt{8}$$

$$a - 3b \pm 2\sqrt{2}b = a+b$$

$$a+b = a - 3b - 2\sqrt{2}b$$

$$4b = 2\sqrt{2}b$$

$$\frac{a^2-6ab+b^2}{a+b} = \frac{a^2}{a+b} - \frac{6ab}{a+b} + \frac{b^2}{a+b}$$

$$\frac{(a+b)^2-8ab}{a+b} = \frac{(a+b)^2}{a+b} - \frac{8ab}{a+b} = a+b - \frac{8ab}{a+b} = a+b - ab$$

$$8 = a+b$$

$$\frac{8}{a^2-8ab} = \frac{1}{8-ab}$$

$$a+b=8$$

$$a=8-b$$

$$ab \leq 8$$

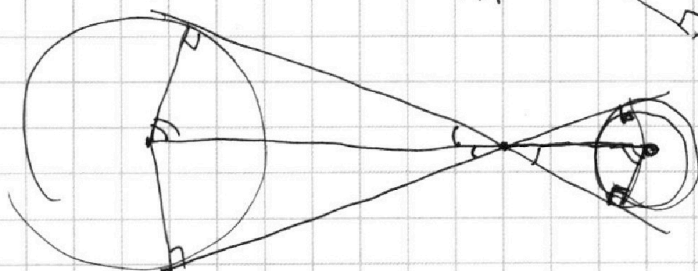
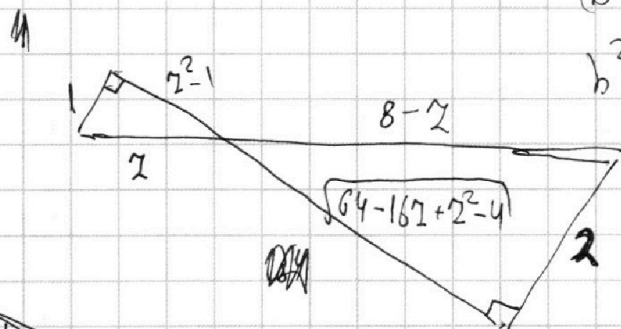
$$8a-b^2 \leq 8$$

2

$$b^2-8b+8=0$$

$$4x = -10b$$

$$\frac{x}{a} = -10b$$





На одной странице можно оформить только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
---	---	---	---	---	---	---

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Поряд QR-кода несутся!

МФТИ

$$1. \quad ab : 2^{14} \cdot 7^{10}$$

$$bc : 2^{14} \cdot 7^{14}$$

$$ac : 2^{20} \cdot 7^{34}$$

$$\frac{ac}{ab} = \frac{c}{b} = \frac{2^{20} \cdot 7^{34}}{2^{14} \cdot 7^{10} \cdot 7^2} =$$

$$= 2^6 \cdot 7^{24} \cdot \frac{7^2}{5} b$$

$$\frac{c}{b} = \frac{2^{20} \cdot 7^{34}}{2^{14} \cdot 7^{10}} = 2^6 \cdot 7^{24}$$

$$bc = 2^6 \cdot 7^{24} \cdot 2^2 = 2^{14} \cdot 7^{14}$$

$$\begin{cases} ab = 2^{14} \cdot 7^{10} \cdot x \cdot y \\ bc = 2^{14} \cdot 7^{14} \cdot y \cdot z \\ ac = 2^{20} \cdot 7^{34} \cdot x \cdot z \end{cases}$$

$$\frac{c}{a} = 2^3 \cdot 7^4$$
$$c = 2^3 \cdot 7^4 \cdot a$$
$$a \cdot 2^3 \cdot 7^4 = 2^{20} \cdot 7^{34}$$
$$a^2 = 2^{14} \cdot 7^{30}$$

$$b^2 \cdot \frac{1}{y} \cdot 2^6 \cdot 7^{24} = 2^{14} \cdot 7^{14} \cdot y \cdot z$$

$$b^2 = 7^4 \cdot \frac{2^{10}}{5} \cdot y^2$$

$$ab - bc - ac : 2^{14} \cdot 7^{10} \cdot 2^{14} \cdot 7^{14} \cdot 2^{20} \cdot 7^{34} = 2^{31} \cdot 7^{64}$$

$$a^2 b^2 c^2 : 2^{51} \cdot 7^{64}$$

$$abc : 2^{\frac{51}{2}} \cdot 7^{32}$$

$$abc_{min} = 2^{24} \cdot 7^{32}$$

$$2^{20} \cdot 7^{34}$$

$$a+c=20$$

$$b+c=17 \quad c=17-b$$

$$a+b=14 \quad a=14-b$$

$$31-20=20$$

$$a+b=14$$
$$b+c=17$$
$$a+c=20$$
$$a+b=14$$
$$a=14-b$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

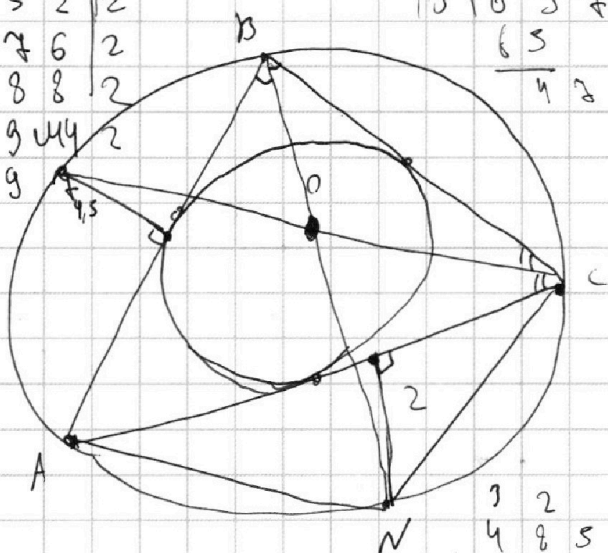
Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



МФТИ



5 DAYS

$$\frac{QC}{2} \cdot AB = \frac{8x}{2}$$

$$\text{SOAB} = \sin 2 \sqrt{49x^2 + 1} \sqrt{x^2 + 1}$$

$$\sin \angle = \frac{AB}{2n} = \frac{4x}{5}$$

$$\frac{8x}{5} \sqrt{49x^2+1} \cdot \sqrt{x^2+1} = 8x^2$$

$$(49x^2 + 1)(x^2 + 1) = 100$$

$$45x^4 + 50x^2 + 55 = 0$$

$$2500 \cdot 4.49 \cdot 100 + 4.50 \cdot 100 = 2500(1+8) - 4(100+49)$$

$$\sqrt[3]{1368}$$

$$37 \times 3 = 111$$

259 : 17

$$\begin{array}{r} 33 \\ 33 \\ \hline 55 \\ 550 \\ \hline 1099 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 24 \\ 4 \overline{) 96} \\ \underline{80} \\ 16 \\ 16 \\ \underline{16} \\ 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 05 \\ 10 \overline{) 697} \\ \underline{65} \\ 47 \end{array}$$

$$AO-7 + \begin{array}{r} 1 \\ 19804 \\ \underline{2500} \\ 22304 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 7451 \\ 1 \\ \times 25 \\ \hline 22500 \end{array}$$

	3	2		
x	4	8	5	1
				4
	1	9	4	0

$$\begin{array}{r} 32 \\ 499 \\ \times 49 \\ \hline 368 \\ 4900 \\ \hline 17512 \end{array}$$

$$\phi = 50.50 \times 4.45.55$$



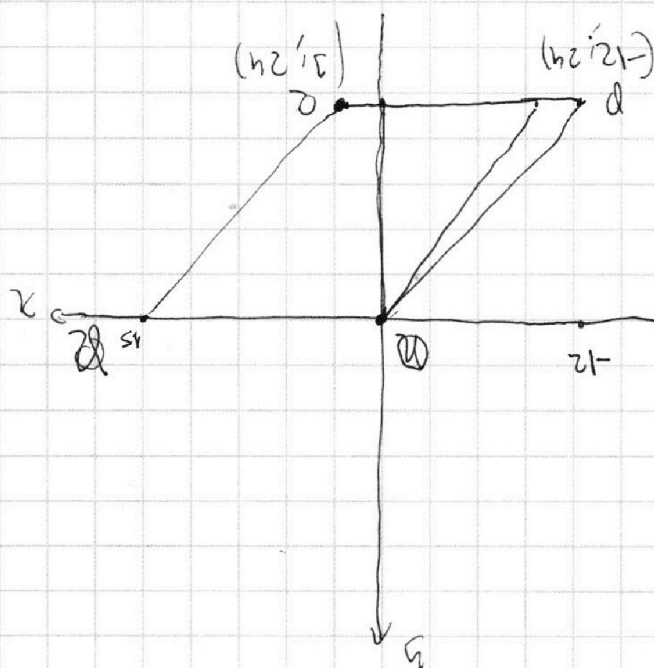
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

☐	1
☐	2
☐	3
☐	4
☐	5
☐	6
☐	7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Поша QR-кода неопубликуема!

МФТИ



$$2x_2 - 2x_1 + y_2 - y_1 = 12$$

$$x_2 - x_1 = 12$$

$$6y = 2 \cdot 14$$

$$4x = 2 \cdot 20$$

$$4x = 2 \cdot 14$$

$$6y = 2 \cdot 14$$

$$y = 2 \quad x = 1 \quad 8 = 4$$

$$y = 2 \cdot 6$$

$$y = 2 \cdot 12$$

$$y = 2 \cdot 6$$

$$x = 1 \quad y = 1 \quad z = 1$$

$$x = 2 \cdot 14$$

$$y = 2 \cdot 12$$

$$y = 2 \cdot 14$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



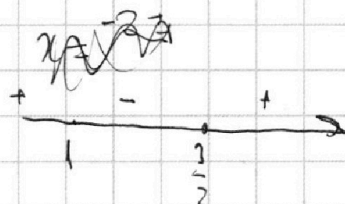
$$\sqrt{2x^2 - 5x + 3} - \sqrt{2x^2 + 2x + 1} = 2 - 7x$$

U

$$x = \frac{5 \pm \sqrt{25 - 20}}{4} = \frac{5 \pm 3}{4}$$

$\frac{2}{3}$

$$\sqrt{(x-1)(2x-3)} - \sqrt{2x^2 + 2x + 1} = 2 - 7x$$



$$(x-1)(2x-3) = (2-7x)^2 + 2x^2 + 2x + 1 + 2(2-7x)\sqrt{2x^2 + 2x + 1}$$

$$-7x + 2 - (2-7x)^2 = \dots$$

$$(2-7x)(7x-1) = 2(2-7x)\sqrt{2x^2 + 2x + 1}$$

$$164 \cdot 3 = 492$$

$$\begin{array}{r} 22 \\ 22 \\ \hline 44 \\ 440 \\ \hline 484 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 492 \\ 36 \\ \hline 528 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 41 \\ 12 \\ \hline 82 \\ 410 \\ \hline 452 \\ 061 \\ \hline 16 \overline{) 976} \\ 96 \\ \hline 16 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 528 \overline{) 2} \\ 264 \overline{) 2} \\ 132 \overline{) 2} \\ 66 \overline{) 2} \\ 33 \overline{) 3} \\ 11 \overline{) 11} \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 976 \overline{) 2} \\ 488 \overline{) 2} \\ 244 \overline{) 2} \\ 122 \overline{) 2} \\ 64 \end{array}$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

3.

$\sin^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2}$

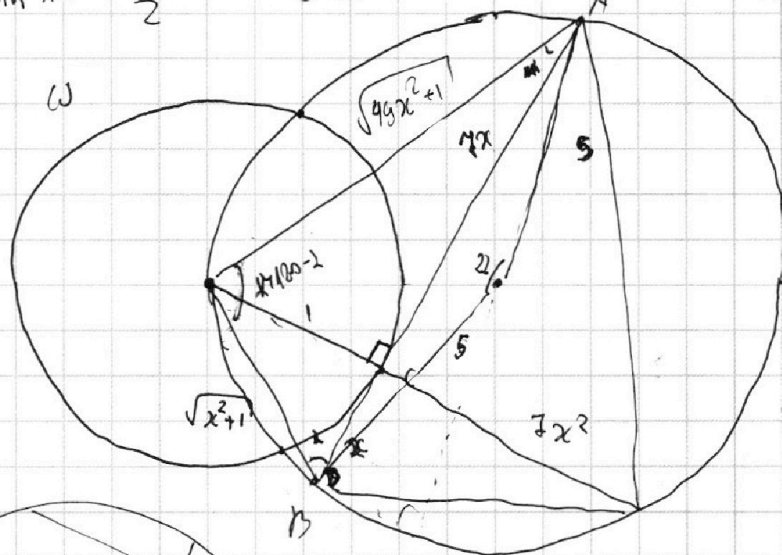
$\cos 2x = 1 - 2\sin^2 x$

$AC : CB = 7 : 1$

$AB = ?$

$R_\omega = 1$

$R_\Omega = 5$



$\cos^2 x - \sin^2 x = \cos 2x = 9/25$

$\frac{8x}{\sin 2} = 2R$

$64x^2 = 50 - 50\cos 2x =$

$= 50 - 50 + 100\sin^2 x =$

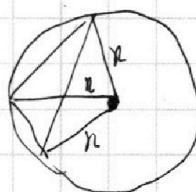
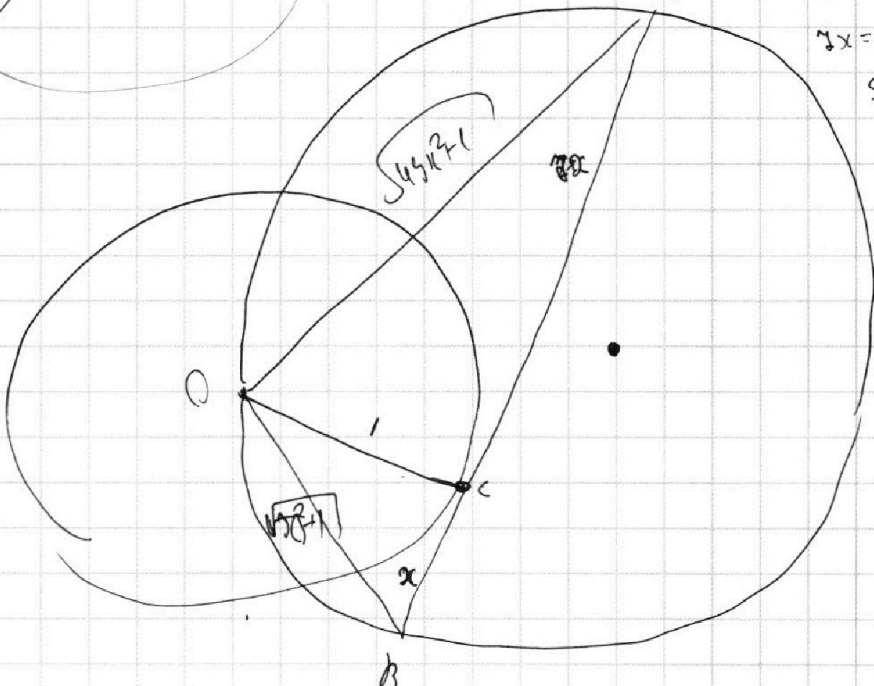
$= 4 \cdot 16x^2$

$\frac{8x}{\sin 2} = 2R$

$8x = 2R\sin 2$

$\sin 2 = \frac{8C \cdot AB}{OA \cdot OB}$

$x^2 = \frac{16x^2}{R^2}$



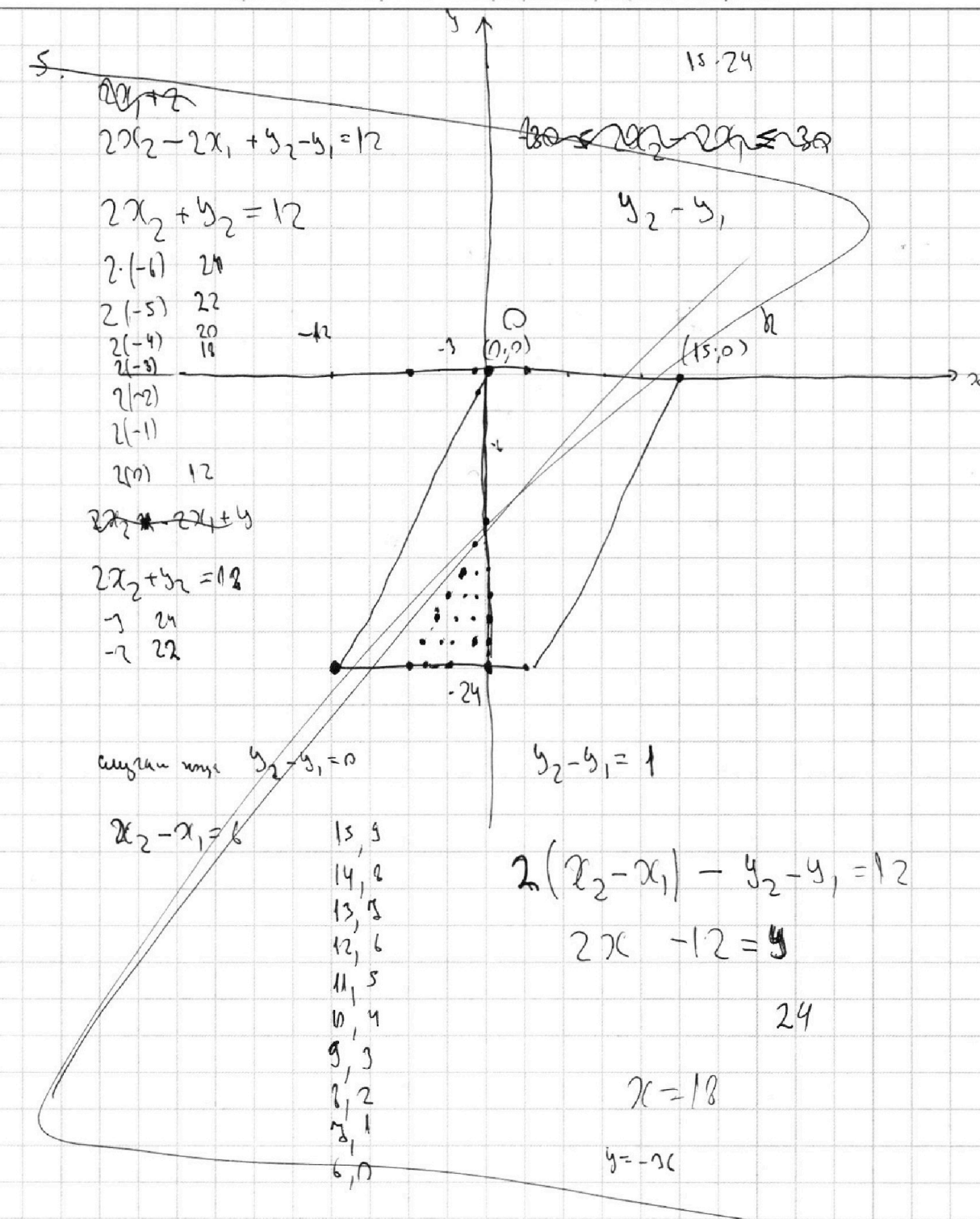
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!





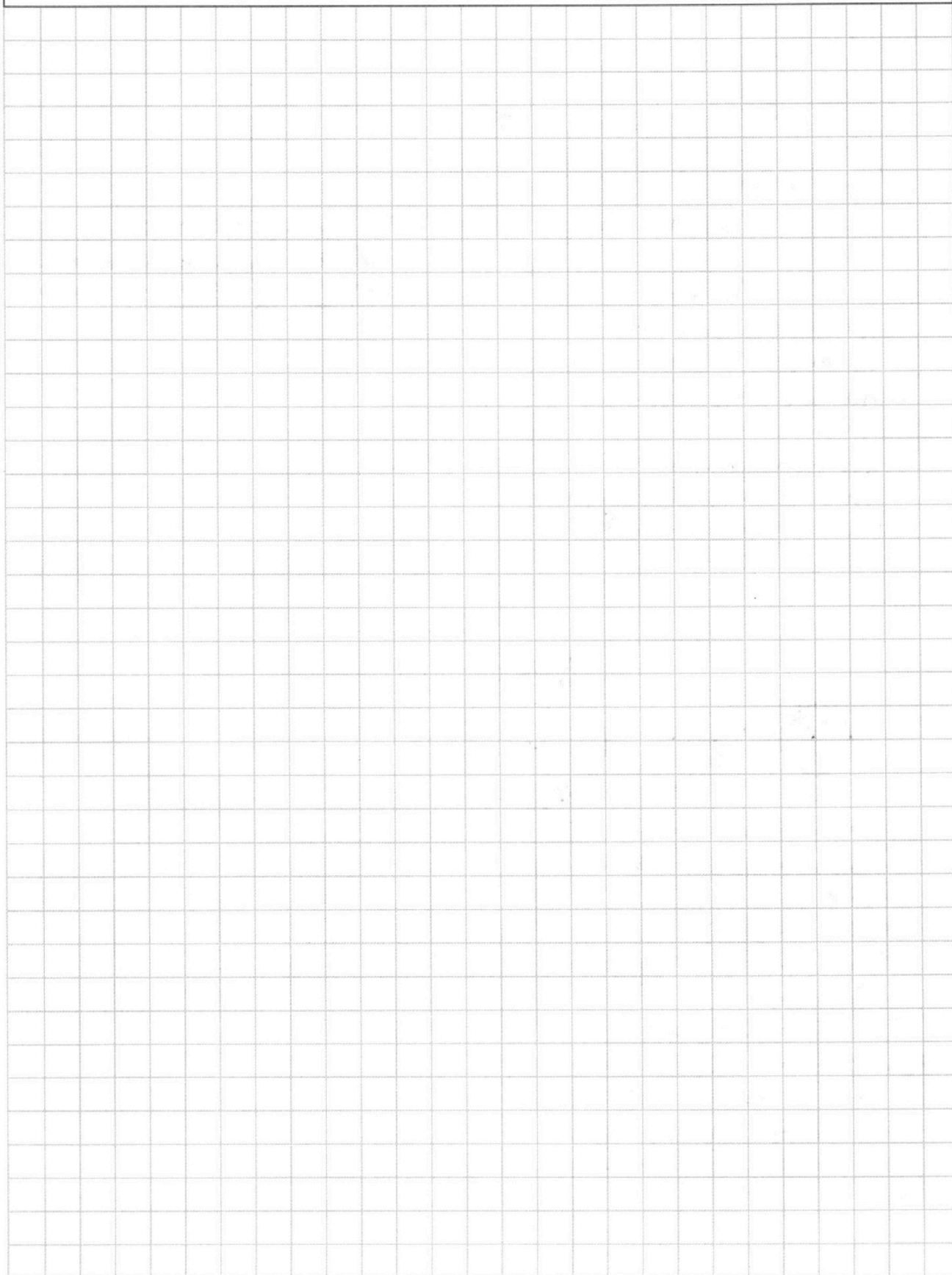
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!





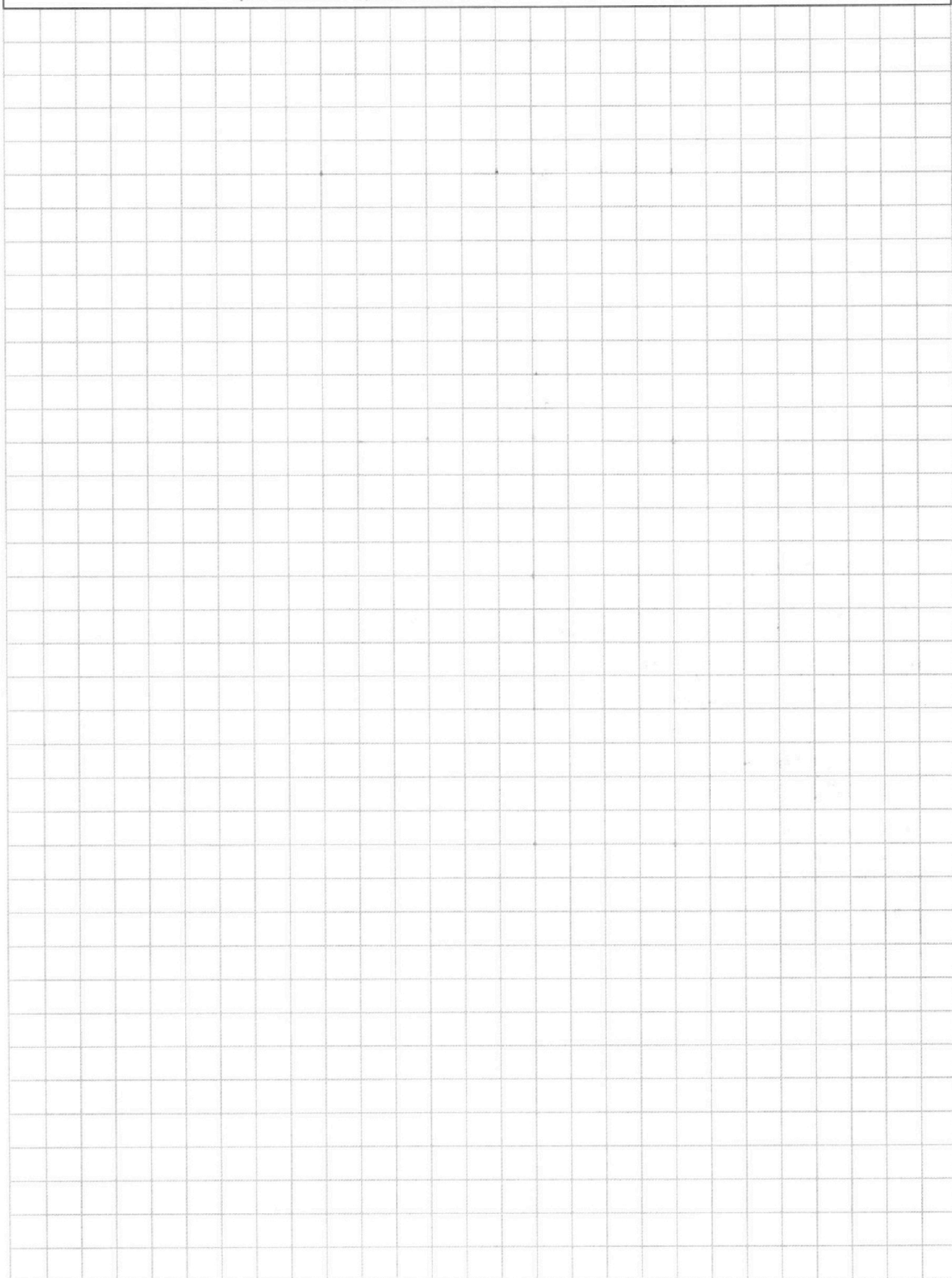
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!





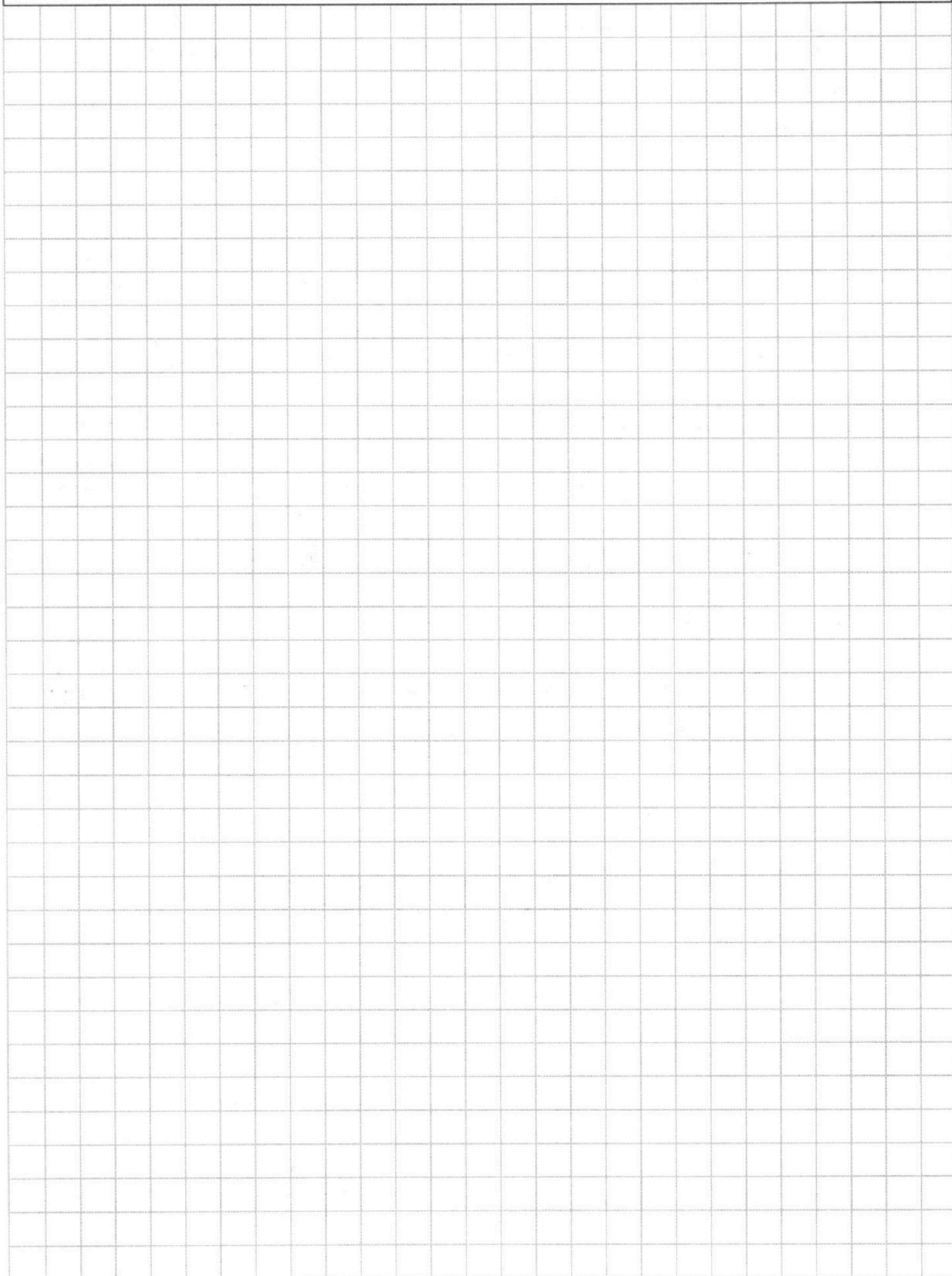
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!





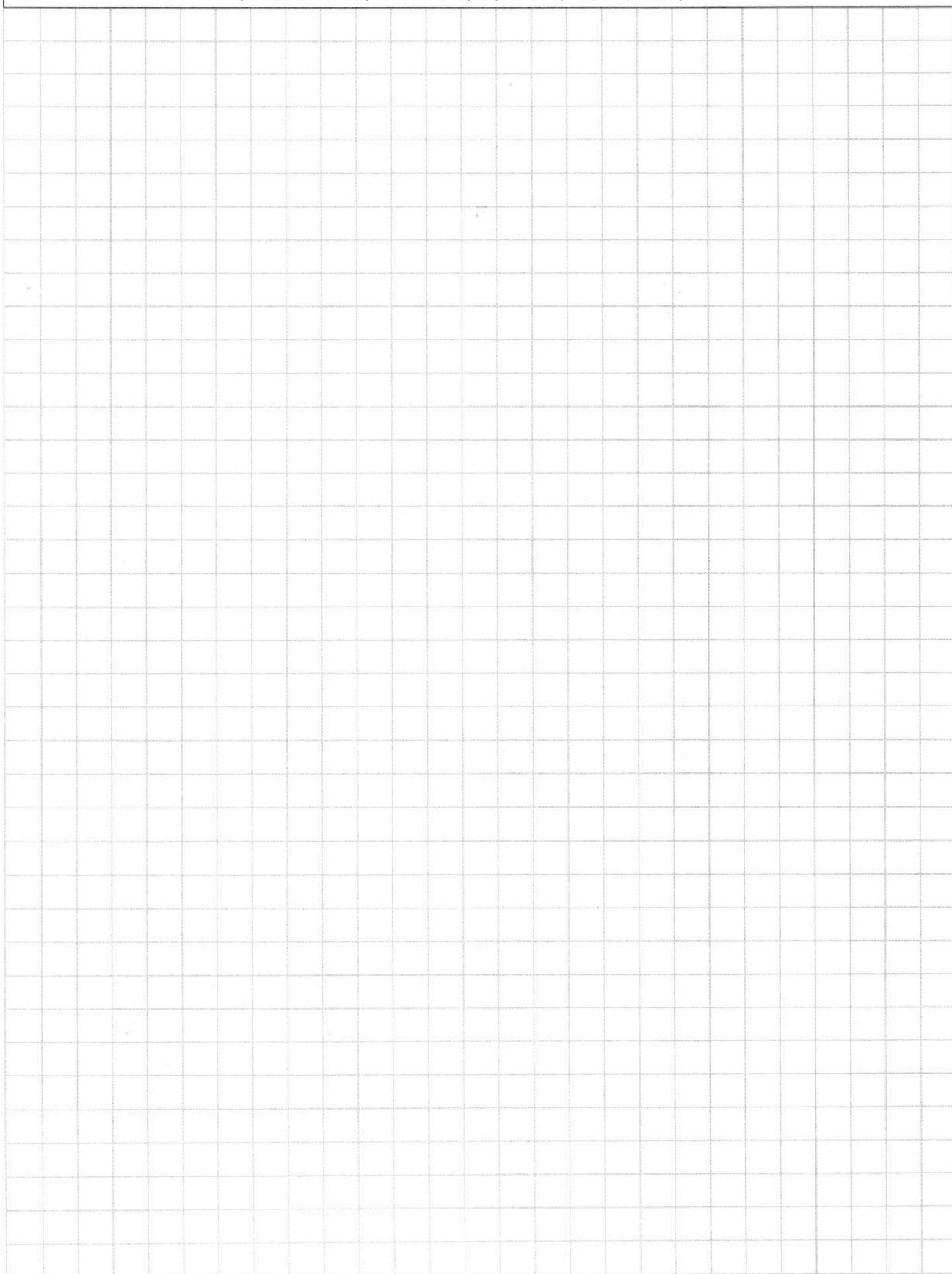
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!





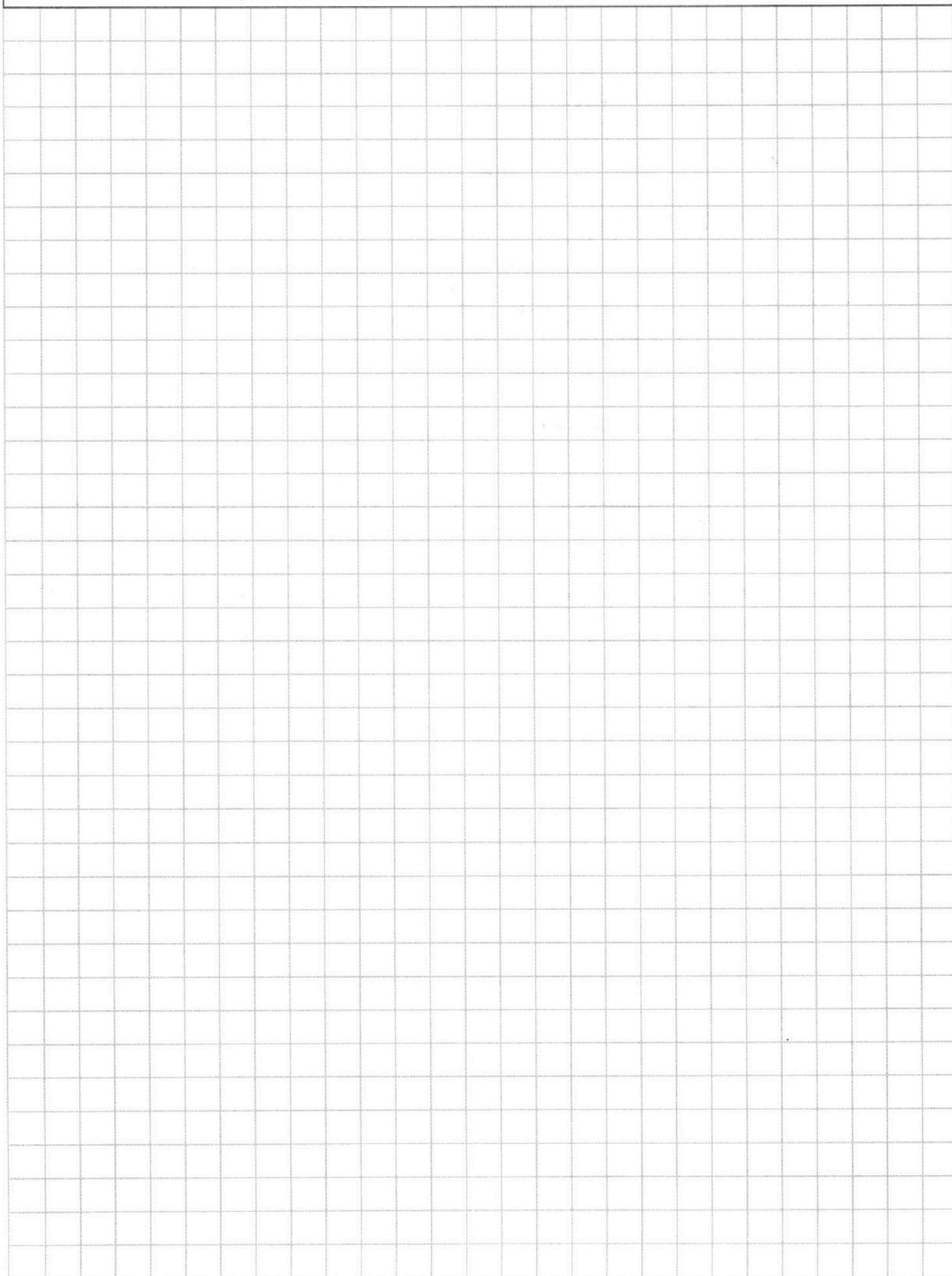
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!





На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

