



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

10 КЛАСС. Вариант 10



1. [4 балла] Натуральные числа a, b, c таковы, что ab делится на $2^{15}7^{11}$, bc делится на $2^{17}7^{18}$, ac делится на $2^{23}7^{39}$. Найдите наименьшее возможное значение произведения abc .
2. [4 балла] Известно, что дробь $\frac{a}{b}$ несократима ($a \in \mathbb{N}, b \in \mathbb{N}$). На доске записана дробь

$$\frac{a+b}{a^2-7ab+b^2}.$$

При каком наибольшем m могло оказаться, что числитель и знаменатель дроби можно сократить на m ?

3. [4 балла] Центр окружности ω лежит на окружности Ω , хорда AB окружности Ω касается ω в точке C так, что $AC : CB = 17 : 7$. Найдите длину AB , если известно, что радиусы ω и Ω равны 7 и 13 соответственно.
4. [5 баллов] Решите уравнение

$$\sqrt{3x^2 - 6x + 2} - \sqrt{3x^2 + 3x + 1} = 1 - 9x.$$

5. [5 баллов] На координатной плоскости дан параллелограмм с вершинами в точках $O(0;0)$, $P(-13;26)$, $Q(3;26)$ и $R(16;0)$. Найдите количество пар точек $A(x_1; y_1)$ и $B(x_2; y_2)$ с целыми координатами, лежащих в этом параллелограмме (возможно, на границе) и таких, что $2x_2 - 2x_1 + y_2 - y_1 = 14$.
6. [5 баллов] Найдите все значения параметра a , для каждого из которых найдётся значение параметра b , при котором система

$$\begin{cases} ax + y - 8b = 0, \\ (x^2 + y^2 - 1)(x^2 + (y - 12)^2 - 16) \leq 0 \end{cases}$$

имеет ровно 2 решения.

7. [6 баллов] Треугольник ABC вписан в окружность. Пусть M – середина той дуги AB описанной окружности, которая не содержит точку C ; N – середина той дуги AC описанной окружности, которая не содержит точку B . Найдите расстояние от вершины A до центра окружности, вписанной в треугольник ABC , если расстояния от точек M и N до сторон AB и AC соответственно равны 5 и 2,5.

1	2	3	4	5	6	7
☒	☐	☐	☐	☐	☐	☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

№7. П.к. $a, b, c \in \mathbb{N}$, то $a, b, c \neq 0$.

Потому что п.к. $ab : 2^{15} \cdot 7''$, то $ab \geq 2^{15} \cdot 7''$

аналогично: $ab \geq 2^{15} \cdot 7''$
 $bc \geq 2^{17} \cdot 7^{18}$
 $ac \geq 2^{23} \cdot 7^{39}$

Применив неравенства получаем $a^2 b^2 c^2 \geq 2^{55} \cdot 7^{68}$
 $abc \geq 2^{\frac{55}{2}} \cdot 7^{34}$

~~$abc \geq 2^{\frac{55}{2}} \cdot 7^{34}$~~

П.к. $a, b, c \in \mathbb{N}$, то $abc \in \mathbb{N}$,

потому что $abc \geq 2^{27+1} \cdot 7^{39} = 2^{28} \cdot 7^{39}$.

~~Покажем, что такая оценка достигается:~~

~~Пусть $a = 2^{11} \cdot 7^{19}$
 $b = 2^5$
 $c = 2^{12} \cdot 7^{20}$~~

Пусть $a = 7^\alpha$, $c = 7^\beta$, где $\alpha, \beta - \max$.

Тогда $ac : 7^{\alpha+\beta}$, но $ac : 7^{39}$,

потому что $\alpha + \beta \geq 39$,

то есть $\min(\alpha + \beta) = 39$.

П.к. $ac : 7^{39}$, то и $abc : 7^{39}$

потому что $abc \geq 2^{28} \cdot 7^{39}$.

Покажем, что такая оценка достигается:

Пусть:

$$\begin{aligned} a &= 2^{11} \cdot 7^{19} \\ c &= 2^{12} \cdot 7^{20} \\ b &= 2^5 \end{aligned}$$

Тогда $abc = 2^{28} \cdot 7^{39}$.

Немудно проверить и
 применимы конкретные пар
 и соответствующие свойства
 тоже двойки и семёрки.

Ответ: $2^{28} \cdot 7^{39}$.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☒	☐	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

N⁰/₃ . $24 \sqrt{13^4 + 17^2 \cdot 19 \cdot 33 - 169}$

$$13^4 = (169)^2 = (170 - 1)^2 = 28900 - 2 \cdot 170 + 1$$

$$13^4 + 17^2 \cdot 19 \cdot 33 = 28900 - 2 \cdot 170 + 1 + 17^2 \cdot 19 \cdot 33 =$$

$$= 28901 + 17(17 \cdot 19 \cdot 33 - 20) =$$

$$= 28901 + 17(17 \cdot 19 \cdot 33 - 19 - 1) =$$

$$= 28901 + 17(19 \cdot (17 \cdot 33 - 1) - 1) =$$

$$= 28901 + 17(19 \cdot 560 - 1) =$$

$$= 28901 + 17(10639) =$$

$$= 28901 + 180863 =$$

$$= 209764$$

Ответ: $24 \sqrt{209764 - 169}$

$$\begin{array}{r} 33 \\ \times 17 \\ \hline 231 \\ 33 \\ \hline 561 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 560 \\ \times 19 \\ \hline 5040 \\ + 560 \\ \hline 10640 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 10639 \\ \times 17 \\ \hline 74473 \\ + 10639 \\ \hline 180863 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 28901 \\ + 180863 \\ \hline 209764 \end{array}$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☒	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

№2.

Из условия следует, что $\text{НОД}(a; b) = 1$.

$$a^2 - 7ab + b^2 = (a+b)^2 - 2ab - 7ab = (a+b)^2 - 9ab.$$

Тогда
$$\frac{a+b}{a^2 - 7ab + b^2} = \frac{a+b}{(a+b)^2 - 9ab}.$$

Если ~~для~~ g ~~дробь~~ можно сократить на m ,

то $a+b : m$, н.т.к. $(a; b) = 1$, то $a \not\vdash m$ и $b \not\vdash m$

(Если $a \vdash m$ и $a+b \vdash m$, то и $b \vdash m \Rightarrow \text{НОД}(a; b) \geq m$)

т.к. $(a+b) \vdash m$, то и $(a+b)^2 \vdash m$.

т.к. g ~~дробь~~ сократили на m , то $(a+b)^2 - 9ab \vdash m$

и т.к. $(a+b)^2 \vdash m$, то и $9ab \vdash m$, но $a \not\vdash m$ и $b \not\vdash m \Rightarrow$

$$\Rightarrow 9 \vdash m \Rightarrow \boxed{m \leq 9}.$$

Приведем пример такие a и b , что $\frac{a+b}{(a+b)^2 - 9ab}$ сократимо на 9 :

$$\begin{array}{l} a=4 \\ b=5 \end{array} \quad \frac{a+b}{(a+b)^2 - 9ab} = \frac{4+5}{(4+5)^2 - 9 \cdot 4 \cdot 5} = \frac{9}{81 - 180} = \frac{9}{-99} = -\frac{1}{11}$$

Ответ: при $m=9$.

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7
☐ ☐ ☒ ☐ ☐ ☐ ☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

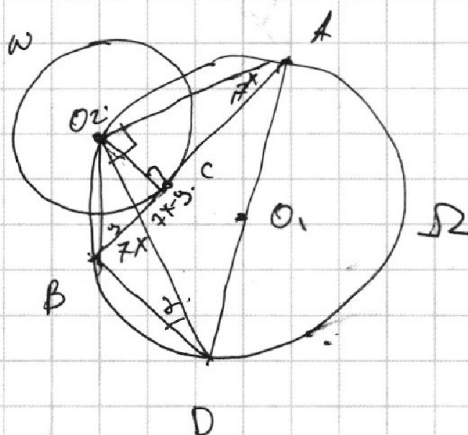


$\sqrt{\frac{10}{3}}$.

Пусть $AC = 17x$,
тогда $BC = 7x$.

Очевидно, $\triangle O_2BC$ — прямоугольный.
тогда $\tan \angle O_2BC = \frac{O_2C}{BC} = \frac{7}{7x} = \frac{1}{x}$.

Проведем AO_1 до пересечения с Ω ,
и пусть они пересекаются в E ,
тогда AD — диаметр $\Rightarrow \angle DO_2A = \frac{\pi}{2}$.



По т. Пифагора для $\triangle O_2CA$: $O_2A = \sqrt{O_2C^2 + AC^2} = \sqrt{49 + 289x^2}$

По т. Пифагора для $\triangle O_2AD$: $O_2D = \sqrt{AD^2 - AO_2^2} = \sqrt{26^2 - 49 - 289x^2}$

$\angle O_2BA = \angle O_2DA$, как вписанные $\Rightarrow \tan \angle O_2BA = \tan \angle O_2DA = \frac{1}{x}$

тогда в $\triangle O_2AD$: $\tan \angle O_2DA = \frac{O_2A}{O_2D} = \frac{\sqrt{49 + 289x^2}}{\sqrt{26^2 - 49 - 289x^2}}$

то $\tan \angle O_2DA = \frac{1}{x}$. Получаем:

$$\frac{1}{x} = \frac{\sqrt{49 + 289x^2}}{\sqrt{(26^2 - 49) - 289x^2}}$$

$$\sqrt{19 \cdot 33 - 289x^2} = x \sqrt{49 + 289x^2}$$

$$19 \cdot 33 - 289x^2 = x^2 (49 + 289x^2)$$

$$19 \cdot 33 - 289x^2 = 49x^2 + 289x^4$$

$x^2 = t$

$$289x^4 + (49 + 289)x^2 - 19 \cdot 33 = 0$$

$$289t^2 + (49 + 289)t - 19 \cdot 33 = 0$$

$$D = (49 + 289)^2 + 4 \cdot 289 \cdot 19 \cdot 33 = 338^2 + 4 \cdot 289 \cdot 19 \cdot 33 =$$

$$= (2 \cdot 169)^2 + 4 \cdot 289 \cdot 19 \cdot 33 = 4 \cdot 13^4 + 4 \cdot 289 \cdot 19 \cdot 33 =$$

$$= 4 (13^4 + 17^2 \cdot 19 \cdot 33)$$

$$t = \frac{338 + 2 \sqrt{13^4 + 17^2 \cdot 19 \cdot 33}}{2}$$

$$= -169 + \sqrt{13^4 + 17^2 \cdot 19 \cdot 33}$$

$$\text{Тогда } x = \sqrt{\sqrt{13^4 + 17^2 \cdot 19 \cdot 33} - 169}. \quad AB = 17x + 7x = 24x = 24 \sqrt{\sqrt{13^4 + 17^2 \cdot 19 \cdot 33} - 169}$$

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☒	☐	☐	☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

№4. $\sqrt{3x^2-6x+2} - \sqrt{3x^2+3x+1} = 1-9x$

Обозначим ~~$3x^2-6x+2$~~ $3x^2-6x+2 = a \geq 0$
 $3x^2+3x+1 = b \geq 0$

Заметим, что $a-b = 3x^2-6x+2-3x^2-3x-1 = 1-9x$.

Тогда исходное уравнение имеет вид:

$$\sqrt{a} - \sqrt{b} = a-b, \quad a, b \geq 0$$

$$\sqrt{a} - \sqrt{b} = (\sqrt{a} - \sqrt{b})(\sqrt{a} + \sqrt{b})$$

$$\sqrt{a} - \sqrt{b} = (\sqrt{a} - \sqrt{b})(\sqrt{a} + \sqrt{b}) \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{a} - \sqrt{b} = 0 \\ \sqrt{a} + \sqrt{b} = 1 \end{cases}$$

1) $\sqrt{a} - \sqrt{b} = 0$
 $\sqrt{a} = \sqrt{b}$
 $a = b, \quad a \geq 0$

$$3x^2-6x+2 = 3x^2+3x+1$$

$$9x = 1$$

$$x = \frac{1}{9}$$

Проверка: $3 \cdot \left(\frac{1}{9}\right)^2 + 3 \cdot \frac{1}{9} + 1 \geq 0$

$$\frac{1}{27} + \frac{1}{3} + 1 > 0$$

Значит, $x = \frac{1}{9}$ - реш.

2) $\sqrt{3x^2-6x+2} + \sqrt{3x^2+3x+1} = 1$

$$(\sqrt{3x^2-6x+2} + \sqrt{3x^2+3x+1})^2 = 1^2$$

$$3x^2-6x+2 + 3x^2+3x+1 + 2 \cdot \sqrt{3x^2-6x+2} \cdot \sqrt{3x^2+3x+1} - 1 = 0$$

$$6x^2-3x+2 = -2 \sqrt{3x^2-6x+2} \cdot \sqrt{3x^2+3x+1}$$

Заметим, что левая часть всегда не положительна, т.к.

$$\forall y \geq 0: \sqrt{y} \geq 0. \quad 6x^2-3x+2, \quad D = 3^2 - 4 \cdot 2 \cdot 6 = 9 - 48 < 0.$$

Получаем, что $6x^2-3x+2$ - это парабола с вершинами направленной вверх ($6 > 0$) и отрицательным дискриминантом. Значит

$$\forall x \quad 6x^2-3x+2 > 0. \quad \text{Но получим } \forall x \quad 6x^2-3x+2 \neq -2 \sqrt{3x^2-6x+2} \cdot \sqrt{3x^2+3x+1}$$

Ответ: $x = \frac{1}{9}$

(т.к. положительное число всегда больше не положительного)

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☒	☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



№6. *накалю*

$$\begin{cases} ax + y - 8b = 0 \\ (x^2 + y^2 - 1)(x^2 + (y - 12)^2 - 16) \leq 0 \end{cases}$$

$a: 3b: 2$ реш.

Построим график ~~каждого~~ неравенства системы:

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 - 1 &= 0 - \text{окр. с центром в т. } (0; 0) \text{ и радиусом } 1. \\ x^2 + (y - 12)^2 - 16 &= 0 - \text{окр. с центром в т. } (0; 12) \text{ и рад.} = 4. \end{aligned}$$

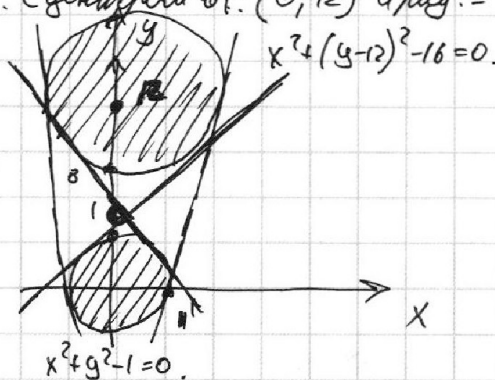
Для окружности вида

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = R^2$$

Значение выпр. ~~будет~~ $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 - R^2$

будет отрицательным только если x_0 и y_0 лежат внутри этой окружности и ближе осей.

Если x_0 и y_0 - вне окр. равенство $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = R^2$ достигается только для x и y на этой окр.



Произведение ~~вып~~ $2 \times \text{вып}$ ≤ 0 , только если одно из вып ≤ 0 и второе ≥ 0 . Поэтому ~~только~~ $(x^2 + y^2 - 1)(x^2 + (y - 12)^2 - 16) \leq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 \leq 1 \\ x^2 + (y - 12)^2 \leq 16 \end{cases}$.
Условие левостороннее, т.к. данные ~~окружности~~ не пересекаются, что можно заметить с графика.

$ax + y - 8b = 0 \Leftrightarrow y = -ax + 8b$ - это уравнение прямой. Если ~~мы~~ ~~каждый~~ 2 ~~реш~~ заменим, что если прямая пересекает какую-либо окружность, то решений будет бесконечно много. Поэтому единственно возможный случай - это когда прямая $y = -ax + 8b$ касается обеих окружностей.

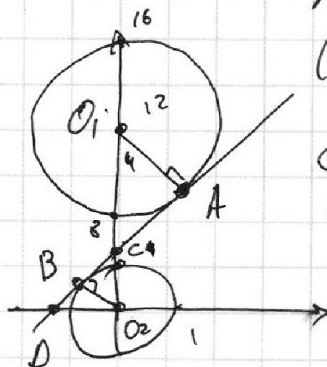
1) Рассмотрим случай, который показан на рисунке:

$\angle BCO_2 = \angle O_1CA$ (как вертик.)

$\angle O_2BC = \angle O_1AC = 90^\circ$ (радиус перпенд. кас.)

Значит, $\triangle O_1CA \sim \triangle O_2CB \Rightarrow$

$$\Rightarrow \frac{O_1C}{CO_2} = \frac{O_1A}{BO_2} = \frac{4}{1}$$



(O_1, O_2) - центры окр.

A, B - т. касания.

$C \Rightarrow$ т. перес. $y = -ax + 8b$ и осей x, y .

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☒	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

№6. продолжение.

$$O_1C = 4CO_2 \quad O_1O_2 = 12 = O_1C + CO_2 = 5CO_2$$

$$CO_2 = \frac{12}{5}$$

Рассмотрим $\triangle BO_2C$:

$$BC = \sqrt{O_2C^2 - BO_2^2} = \sqrt{\frac{144}{25} - \frac{25}{25}} = \sqrt{\frac{119}{25}} = \frac{1}{5} \sqrt{119}$$

$$\tan \angle BCO_2 = \frac{BO_2}{BC} = \frac{1}{\frac{1}{5} \sqrt{119}} = \frac{5}{\sqrt{119}}$$

$$\angle DO_2C = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \angle CDO_2 = \frac{\pi}{2} - \angle BCO_2 \Rightarrow \tan \angle CDO_2 =$$

$$\tan \angle CDO_2 = \frac{\sqrt{119}}{5}$$

$y = -ax + 8b$; $-a$ — это тангенс угла
прямой, коэффициент $-a = \tan \angle CDO_2 = \frac{\sqrt{119}}{5}$

$$\begin{aligned} \tan \angle BCO_2 &= \frac{1}{\frac{1}{5} \sqrt{119}} \\ &= \frac{\sqrt{119}}{5} \\ a &= -\frac{\sqrt{119}}{5} \end{aligned}$$

Заметим, что если выразить прямую AB относительно
всех x и y , то такая прямая может быть касательной,
а a либо " a " изменит свой знак, тогда $a = \frac{\sqrt{119}}{5}$.

2) Рассмотрим 2-й случай:

Очевидно, $\triangle XAO_1 \sim \triangle XBO_2$:

$$\frac{XO_2}{XO_1} = \frac{O_2B}{O_1A} = \frac{1}{4} \quad \text{и} \quad XO_2 = XO_1$$

$$O_1O_2 = 12 = XO_1 - XO_2 = 3XO_2$$

$$XO_2 = 4$$

$$\text{в } \triangle XBO_2: XB = \sqrt{XO_2^2 - O_2B^2} =$$

$$= \sqrt{15}$$

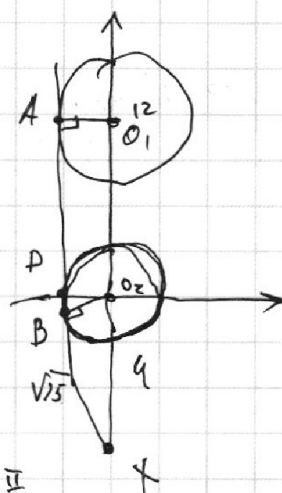
$$\tan \angle B XO_2 = \frac{XB}{BO_2} = \frac{\sqrt{15}}{4}$$

$$\angle XDO_2 = \frac{\pi}{2} - \angle DXO_2 \Rightarrow \angle ADO_2 = \pi - \angle XDO_2 = \frac{\pi}{2} + \angle DXO_2$$

$$-a = \tan(\angle ADO_2) = \tan\left(\frac{\pi}{2} + \angle DXO_2\right) = -\cot \angle DXO_2 = -\frac{1}{\tan \angle DXO_2} = -\frac{1}{\frac{\sqrt{15}}{4}} = -\frac{4}{\sqrt{15}}$$

Аналогично второйму случаю $a = -\sqrt{15}$ — тоже подходит.

$$\text{Ответ: } a \in \left\{ \pm \sqrt{15}, \pm \frac{1}{5} \sqrt{119} \right\}$$





На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☒	☒	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$13^4 = 169^2 \quad 7(170-1)^2 = 28900 - 2 \cdot 170 + 1 + 17^2 \cdot 33 \cdot 19$$

$$\cancel{28} \cdot 28900 - 2 \cdot 170 + 1 + 17^2 \cdot 19 \cdot 33 =$$

$$= 28800 + 1 - 17(19 \cdot 33 - 20) =$$

$$= 28900 + 1 - 17(19 \cdot 32 - 1) =$$

$$= 28901 - 17 \cdot 19 \cdot 32 + 17.$$

$$20 \cdot 32 = 32 \cdot 640 - 32 = 608.$$

$$28901 - 608 + 17.$$

$$\begin{array}{r} 28901 \\ - 608 \\ \hline 28293 \end{array}$$

$$28293 + 17 = 28300.$$

$$209769$$

$$44$$

$$100^2 = 10000.$$

$$104^2 =$$

$$\begin{array}{r} \times 104 \\ \times 104 \\ \hline 416 \\ + 1040 \\ \hline 10816 \end{array}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☒	☒	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



Handwritten solutions and diagrams for a geometry problem involving spheres and triangles.

Diagrams:

- Top left: A small triangle with vertices labeled 2, 1, and 2.
- Top center: A sphere with a triangle inscribed on its surface, with vertices labeled 2, 1, and 2.
- Top right: A sphere with a triangle inscribed on its surface, with vertices labeled 2, 1, and 2.
- Middle left: A sphere with a triangle inscribed on its surface, with vertices labeled 2, 1, and 2.
- Middle center: A sphere with a triangle inscribed on its surface, with vertices labeled 2, 1, and 2.
- Middle right: A sphere with a triangle inscribed on its surface, with vertices labeled 2, 1, and 2.
- Bottom left: A sphere with a triangle inscribed on its surface, with vertices labeled 2, 1, and 2.
- Bottom center: A sphere with a triangle inscribed on its surface, with vertices labeled 2, 1, and 2.
- Bottom right: A sphere with a triangle inscribed on its surface, with vertices labeled 2, 1, and 2.

Equations and Calculations:

- $ab: 2^{15} \cdot 7^{11}$
- $bc: 2^{17} \cdot 7^{15}$
- $ac: 2^{23} \cdot 7^{33}$
- $\sqrt{16+x^2} + \sqrt{1+y^2} = 12$
- $\frac{4}{x} = \frac{1}{y}$
- $4y = x$
- $abc \geq 2^{20} \cdot 7^{29}$
- $a=4b$
- $a+b=12$
- $5b=12$
- $b=\frac{12}{5}$
- $2+p \geq 15$
- $p+d \geq 16$
- $d+d \geq 23$
- $d+p+d \geq 28$
- $2(2+p+d) \geq 55$
- $d+p+d \geq 28$
- $\frac{17}{24}$
- $\frac{7 \cdot 17}{24}$
- $\beta - \gamma = -8$
- $\beta + \gamma = 17$
- $2\beta = 9$
- $\left(\sqrt{289x^2 + 49} + 7 \right)^2 - 24^2 x^2 = \left(\frac{7 \cdot 17}{24} \right)^2$
- $289x^2 + 49 + 49 + 14\sqrt{289x^2 + 49} + 24^2 x^2 = \frac{7 \cdot 17}{24}$
- $-41x^2 + 2\sqrt{289x^2 + 49} + 17^2 - 24^2 = -7 \cdot 41x$
- $(7x)^2 + (17x)^2 - 26^2 = 0$
- $-41x^2 + 14 + 2\sqrt{289x^2 + 49} = \frac{7 \cdot 17^2}{24^2}$
- $\frac{7 \cdot 17^2}{24^2} - 14 = 0$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☒	☒	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

№3 Пусть $AC = 17x$, тогда $BC = 7x$.

Решение, $\triangle O_2BC$ — прямоугольный,
тогда $\tan \angle O_2BC = \frac{O_2C}{BC} = \frac{7}{7x} = \frac{1}{x}$

Продлим AO_1 до пересечения с Ω .

Пусть они пересекутся в т. D.

AD — диаметр, поэтому $\angle AO_2D = 90^\circ$.

$\angle O_2BC = \angle O_2DA$ как вписанные.

Поэтому $\tan \angle O_2BC = \tan \angle O_2DA = \frac{1}{x}$

Поэтому $\triangle O_2DA$: $\tan \angle O_2DA = \frac{O_2A}{AD} = \frac{O_2A}{26}$

Таким образом, $\frac{O_2A}{26} = \frac{1}{x}$.

Из $\triangle O_2CA$: $O_2H = \sqrt{O_2C^2 + AC^2} = \sqrt{49 + 289x^2}$

Тогда: $\frac{\sqrt{49 + 289x^2}}{26} = \frac{1}{x}$

$$289 + 49 = x^2 \sqrt{49 + 289x^2} = 26$$

$$= 340 - 2 = \sqrt{49x^2 + 289x^4} = 26$$

$$= 338$$

$$338 = 2 \cdot 169$$

$$49x^2 + 289x^4 = 26^2$$

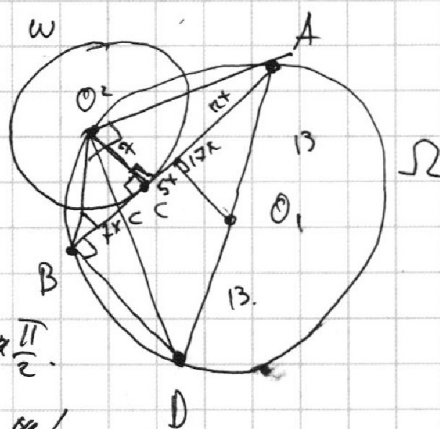
$$x^2 = t$$

$$289t^2 + 49t - 26^2 = 0$$

$$D = 49^2 + 4 \cdot 289 \cdot 26^2$$

$$49^2 + 2 \cdot 49 \cdot 289 + 289^2 + 4 \cdot 289 \cdot 19 \cdot 33 = 19 \cdot 33 \cdot 289x^2$$

$$49^2 + 289 \cdot (2 \cdot 49 + 289 + 4 \cdot 19 \cdot 33) \cdot 26^2 - 289^2 = (26-7)(26+7) = 19 \cdot 33$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☒	☒	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$7 = \sqrt{17}$$

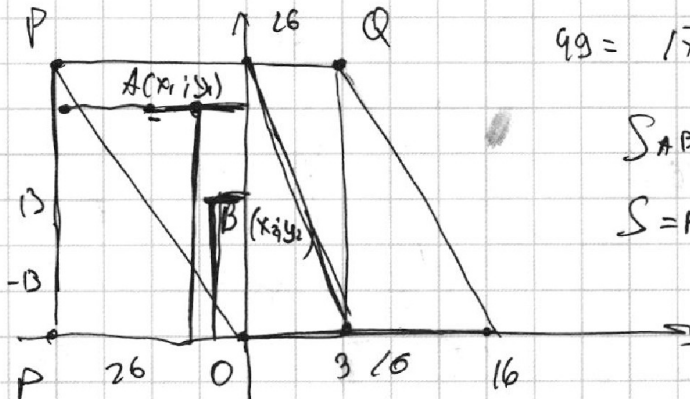
$$99 = 17X$$

$$S_{ABC} = \frac{25}{\tan \alpha \cdot \tan \beta} \sin(2(\alpha + \beta))$$

$$S = P \cdot 74$$

$$L = \frac{25 \sin(2(\alpha + \beta))}{\tan \alpha \cdot \tan \beta \cdot P}$$

$$AH = P - BC$$



$$2x_2 - 2x_1 + y_2 - y_1 = 14$$

$$Q = \begin{pmatrix} 2^{11} \\ 2^{12} \\ 2^{13} \end{pmatrix} \cdot 7$$

$$C = \begin{pmatrix} 2^{12} \\ 2^{13} \\ 2^{14} \end{pmatrix} \cdot 7$$

$$B = \begin{pmatrix} 2^{13} \\ 2^{14} \\ 2^{15} \end{pmatrix} \cdot 7$$

$$Q = 7^2$$

$$C = 7^2$$

$$\alpha + \beta$$

$$\frac{25 \sin(2(\alpha + \beta))}{\tan \alpha \cdot \tan \beta (P - BC) P} = \frac{1}{\tan(\alpha + \beta)}$$

$$\sqrt{13^4 + 17^2 \cdot 19 \cdot 33} \approx$$

$$AC = 2 \frac{5}{2 \tan \alpha} = \frac{5}{\tan \alpha}$$

$$AB = \frac{10}{\tan \beta}$$

$$BC = \frac{5}{2x} = \tan \alpha$$

$$S_{ABC} = \frac{1}{2} AB \cdot AC \cdot \sin(\alpha + \beta) = \frac{1}{2} \frac{25}{\tan \alpha \cdot \tan \beta} \cdot \cos(\alpha + \beta) \cdot \sin(\alpha + \beta)$$

$$ab : 2^{15} \cdot 7^{11}$$

$$bc : 2^{17} \cdot 7^{13}$$

$$ac : 2^{23} \cdot 7^{39}$$

$$\frac{L}{P - BC}$$

$$\min abc$$

$$a^2 b^2 c^2 \geq 2^{55} \cdot 7^{29+38} = 2^{55} \cdot 7^{68}$$

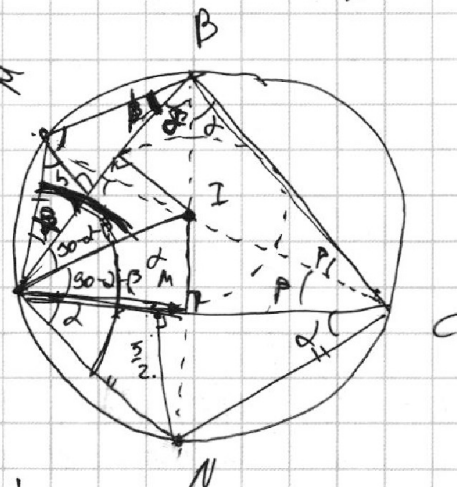
$$Q = 2^{11}$$

$$C = 2^{12}$$

$$B = 2^{13}$$

$$abc \geq 2^{28} \cdot 7^{34}$$

$$AI = ?$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☒	☒	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$\sqrt{3x^2-6x+2} + \sqrt{3x^2+3x+1} = 1$$

$$3x^2-6x+2 + 3x^2+3x+1 + 2\sqrt{(3x^2-6x+2)(3x^2+3x+1)} = 1$$

$$6x^2-3x+3 + 2\sqrt{\dots} = 1$$

$$6x^2-3x+2 = -2\sqrt{\dots}$$

$$2x-3 = -2\sqrt{\dots}$$

$$D = 9$$

min

$$ab : 2^{15} \cdot 7^{11}$$

$$bc : 2^{17} \cdot 7^{10}$$

$$ac : 2^{23} \cdot 7^{29}$$

$$ab \geq 2^{15} \cdot 7^{11}$$

$$bc \geq 2^{17} \cdot 7^{10}$$

$$ac \geq 2^{23} \cdot 7^{29}$$

$$a^2 b^2 c^2 \geq 2^{55} \cdot 7^{39 \cdot 2}$$

$$abc \geq 2^{\frac{55}{2}} \cdot 7^{39}$$

$$abc$$

$$abc \geq 2^{27} \cdot 7^{39}$$

$$a = 2^8$$

$$b = 2^7$$

$$c =$$

$$a+b=15$$

$$b+d=17$$

$$a+b=16$$

$$b+d=17$$

$$a+d=23$$

$$a+b=15$$

$$b+d=17$$

$$d+d=23$$

$$a+b \geq 15$$

$$b+d \geq 17$$

$$b+d \geq 23$$

$$a+b+d=28$$

$$d-b=23-16=7$$

$$b+d=17$$

$$2b=24$$

$$d=4$$

$$b=12$$

$$d=13$$

$$a+b : m$$

$$\frac{a+b}{(a+b)^2 - 9ab} = \frac{a+b}{m}$$

$$a=2$$

$$b=3$$

$$\frac{a+b}{(a+b)^2 - 9ab}$$

$$\frac{a+b}{(4+5)^2 - 9 \cdot 4 \cdot 5}$$

$$= \frac{9}{81 - 180} = \frac{-9}{99} = -\frac{1}{11}$$

$$\min abc = 2^{23} \cdot 7^{39}$$

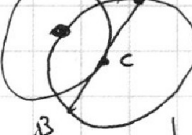
$$ac \geq 2^{23} \cdot 7^{39}$$

$$a = 2^{15} \cdot 7^{11}$$

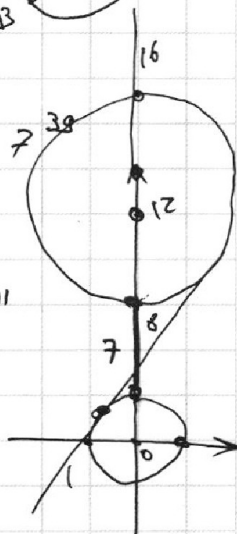
$$b = 2^9$$

$$w=7$$

$$r=13$$



$$\frac{AC}{BC} = \frac{17}{7}$$



$$a = 2^{15} \cdot 7^{11}$$

$$b = 2^9$$

$$c = 2^8$$

$$a+d=23$$

$$a+b=15$$

$$d-b=8$$

$$b+d=17$$

$$2$$

$$2(a+b+d) \geq 15+17+23 = 32+23 = 55$$

$$y = -ax + 8b$$

$$x^2 + y^2 = 1$$

$$y \geq 0 \quad y = \sqrt{1-x^2}$$

$$x \geq 0$$

$$= 32+23 = 55$$

$$(a/b) = 1$$

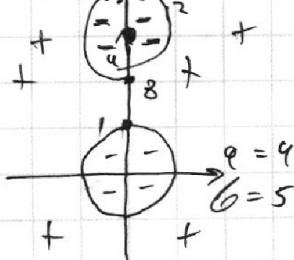
$$\frac{a+b}{a^2 - 7ab + b^2}$$

$$a+b : m$$

$$\frac{(a+b)^2 - 7ab + b^2}{(a+b)^2 - 9ab} = m$$

$$ax + y - 8b = 0$$

$$(x^2 + y^2 = 1) \quad (x^2 + (y-8b)^2 = 12)$$



$$\frac{a+b}{(a+b)^2 - 9ab}$$

$$a=2$$

$$b=3$$

$$\frac{a+b}{(a+b)^2 - 9ab}$$

$$\frac{a+b}{(4+5)^2 - 9 \cdot 4 \cdot 5}$$

$$= \frac{9}{81 - 180} = \frac{-9}{99} = -\frac{1}{11}$$

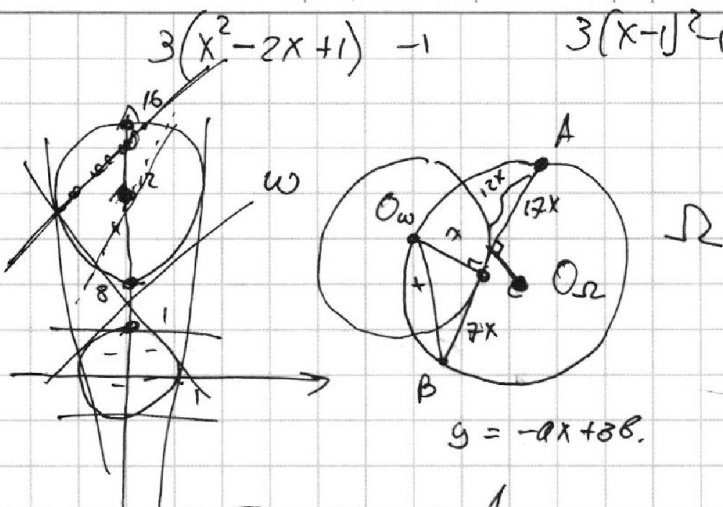
На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☒	☒	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$\frac{AC}{BC} = \frac{17}{7}$$

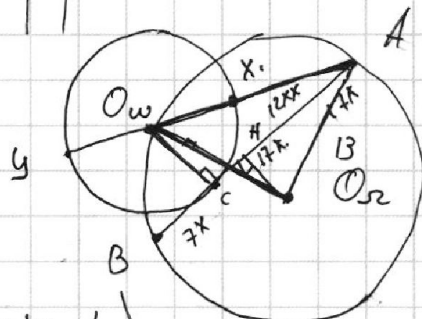
$$AB = ?$$

$$w = 7$$

$$R = 13$$

$$AC = 17x$$

$$BC = 7x$$



$$AO_w = \sqrt{49 + 289x^2}$$

$$AX = \sqrt{49 + 289x^2} - 7$$

$$AY = \sqrt{49 + 289x^2} + 7$$

$$289x^2 = 49 + 289x^2$$

$$3(x^2 + x + \frac{1}{3})$$

$$2x + 1$$

$$x = -\frac{1}{2}$$

$$\frac{1}{4} - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{1}{4} - \frac{2}{4} + \frac{1}{3} = -\frac{1}{4} + \frac{1}{3} = \frac{-3+4}{12} = \frac{1}{12}$$

$$3(x^2 + 2 \cdot \frac{1}{2}x + \frac{1}{2^2}) = 3(x + \frac{1}{2})^2 = 3x^2 - 6x + 2$$

$$\frac{1}{3} + \frac{1}{2^2} - \frac{1}{2^2}$$

$$O_{RH} = \sqrt{13^2 - 49x^2}$$

$$3x^2 - 6x + 2 = a$$

$$3x^2 + 3x + 1 = b$$

$$a \geq 0$$

$$b \geq 0$$

$$a - b = 1 - 9x$$

$$\sqrt{a} - \sqrt{b} = a - b$$

$$a - 2\sqrt{ab} + b = a^2 - 2ab + b^2$$

$$\sqrt{a} - a = \sqrt{b} - b$$

$$a - \sqrt{a} = b - \sqrt{b}$$

$$f(x) = x - \sqrt{x}$$

$$f'(x) = 1 - \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$$\boxed{a=0}$$

$$\boxed{b=0}$$

$$\boxed{a=b} \quad (\sqrt{a} - \sqrt{b})(\sqrt{a} + \sqrt{b}) = (a - b)(\sqrt{a} + \sqrt{b})$$

$$(a - b) = (a - b)(\sqrt{a} + \sqrt{b}) \quad \sqrt{a} - \sqrt{b} = a - b$$

$$\sqrt{a} + \sqrt{b} = 1$$

$$\sqrt{a} - \sqrt{b} = (\sqrt{a} - \sqrt{b})(\sqrt{a} + \sqrt{b})$$

$$\sqrt{a} = \sqrt{b} \quad \sqrt{a} \cdot a = b$$

$$\sqrt{a} + \sqrt{b} = 1$$