



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

10 КЛАСС. Вариант 5



1. [3 балла] Третий член арифметической прогрессии равен $3x + 3$, пятый член равен $(x^2 + 2x)^2$, а девятый равен $3x^2$. Найдите x .
2. [4 балла] Найдите наибольшее значение выражения $4y + 8x$ при условии

$$\begin{cases} |x - 3y| \leq 3, \\ |3x - y| \leq 1. \end{cases}$$

3. [5 баллов] Найдите все пары (m, n) натуральных чисел, для которых одно из чисел $A = m^2 + 2mn + n^2 - 9m - 9n$ и $B = m^2n + mn^2 - 3mn$ равно $13p^2$, а другое равно $75q^2$, где p и q – простые числа.
4. [5 баллов] Прямая, параллельная биссектрисе AH треугольника ABC , проходящая через середину M его стороны BC , пересекает сторону AB и продолжение стороны AC в точках Z и Y соответственно. Найдите BC , если $AC = 18$, $AZ = 6$, $YZ = 8$.
5. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \sqrt{x+1} - \sqrt{6-y} + 5 = 2\sqrt{6+5x-y^2}, \\ x^4 + 5x^2 - \sqrt{y} = y^4 - \sqrt{x} + 5y^2. \end{cases}$$

6. [4 балла] На тетрадном листе нарисован квадрат 8×8 клеток (стороны квадрата идут вдоль границ клеток), а все узлы сетки внутри квадрата или на его границе покрашены в чёрный цвет. Найдите количество способов перекрасить два узла в белый цвет, если раскраски, получающиеся друг из друга поворотом, считаются одинаковыми.
7. [6 баллов] В треугольнике ABC на медиане AM и биссектрисе CL как на диаметрах построены окружности Ω и ω соответственно, пересекающиеся в точках P и Q . Отрезок PQ параллелен высоте треугольника ABC , проведённой из вершины B . Окружность Ω пересекает сторону AC повторно в точке N . Найдите длины сторон AC и BC , если $AB = 10$, $AN = 8$.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1



2



3



4



5



6



7



СТРАНИЦА

1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Пусть d - разность двух арифмет. прогр.,
тогда $2d = (x^2 + 2x)^2 - 3x - 3$ и $4d = 3x^2 - (x^2 + 2x)^2 -$

- из условия;

$$2(x^2 + 2x)^2 - 6x - 6 = 3x^2 - (x^2 + 2x)^2;$$

$$3x^4 + 12x^3 + 9x^2 - 6x - 6 = 0 \quad | :3;$$

$$x^4 + 4x^3 + 3x^2 - 2x - 2 = 0;$$

$$(x+1)^2(x^2 + 2x - 2) = 0;$$

$$\begin{cases} x = -1; \\ \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^2 + 2x - 2 = 0 \quad ① \end{cases}$$

$$① \quad x^2 + 2x - 2 = 0;$$

$$D = 4 + 4 \cdot 2 = 12, D > 0$$

$$x = \frac{-2 \pm 2\sqrt{3}}{2} = -1 \pm \sqrt{3};$$

Получаем: $x = -1; -1 \pm \sqrt{3}$

Ответ: $-1; -1 + \sqrt{3}; -1 - \sqrt{3}$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☒ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{cases} |11 - 3y| \leq 3 \\ |3x - y| \leq 1 \end{cases} \quad \begin{cases} -3 \leq x - 3y \leq 3 \quad ①; \\ -1 \leq 3x - y \leq 1; \quad ② \end{cases}$$

$$\begin{aligned} ① \times (-3) : & -9 \leq 9y - 3x \leq 9; \\ + ② : & -10 \leq 8y \leq 10; \\ & -\frac{5}{4} \leq y \leq \frac{5}{4} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} ② \times 3 : & -3 \leq 9x - 3y \leq 3 \\ + ① \times (-1) : & -6 \leq 9x - 3y + 3y - x \leq 6 \\ & -\frac{3}{4} \leq x \leq \frac{3}{4} \end{aligned}$$

$$9x + 8y \leq \frac{3}{4} \cdot 4 + 8 \cdot \frac{5}{4} =$$

$$8x + 4y \leq \frac{3}{4} \cdot 8 + 8 \cdot \frac{5}{4} \cdot 4 = 11;$$

$$\text{при } x = \frac{3}{4} \text{ и } y = \frac{5}{4} :$$

$$\left| \frac{3}{4} - \frac{15}{4} \right| = 3;$$

$$\left| 3 \cdot \frac{3}{4} - \frac{5}{4} \right| = 1; \text{ , т.к. -м такие } x \text{ и } y \text{ удов.}$$

условью. Это - м доказали, что макс.
 мин. берет.

возможное значение 11 и приведем при-
 мер макс. x и y , при которых это будет.
 Ответ: 11.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☒	☐	☐	☐	☐

СТРАНИЦА
1 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$A = m^2 + 2mn + n^2 - 9m - 9n = (m+n)(m+n-9)$$

$$B = m^2n + mn^2 - 3mn = mn(m+n-3)$$

Заметим, что $75q^2 \div 3$, $75q^2 \div 3^2$

или $75q^2 \div 3^3$ и $75q^2 \div 3^4$ (второй случай

получается при $q=3$). Переведем, если $(m+n) \div 3$

то и $(m+n-9) \div 3$, если $(m+n) \div 3$, то $(m+n-9) \div 3$

то и $(m+n-9) \div 3$ но $(m+n-9) \div 9$, и

тогда $A \div 9$, но $A \nmid 27$, если $(m+n) \div 9$, то

$(m+n-9) \div 9$ $A \div 81$. Значит если 3 варианта:

варианта: 1) $A \div 3$, 2) $A \div 9$, $A \nmid 27$, 3) $A \div 81$, но

при этом получаем, что $A \nmid 75q^2$ $A \nmid 75q^2$,
т.е. $75q^2 \div 3$ но $75q^2 \nmid 9$ или $75q^2 \div 22$ но $75q^2 \nmid 9$

Значит $A = 117p^2$; Если $p=3$, то $A = 117 = (m+n) \cdot$

$\cdot (m+n-9)$; $(m+n)^2 - 9(m+n) - 117 = 0$; Пусть $(m+n) = x$, $x \in \mathbb{N}$

$x^2 - 9x - 117 = 0$. $D = 81 + 4 \cdot 117 = 549$, $D > 0$;

$$x = \frac{9 \pm \sqrt{549}}{2} = \frac{9 \pm 3\sqrt{61}}{2}$$

Заметим, что x , котор. мы нашли $\notin \mathbb{N}$;

Значит такого x не существует. Значит $p \neq 3$.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1
☐

2
☐

3
☒

4
☐

5
☐

6
☐

7
☐

СТРАНИЦА
2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$(m+n)(m+n-9) \div 13 p^2;$$

$$\text{Hog}((m+n); (m+n-9)) = \text{Hog}(m+n; 9) = 1 - m - n. \quad p \neq 3.$$

Итого получаем 2 случая:

$$1) \quad m+n = p^2, \quad m+n-9 = 13; \quad m+n = 22 = p^2 - \text{не мож. быть.}$$

$$2) \quad m+n = 13, \quad m+n-9 = p^2; \quad p^2+9=13, \quad p=2;$$

(случай, где одна из скобок равна 1

невозм. , $m, n \in \mathbb{N}$, $m+n \geq 1+1=2$)

$$\text{Если } m+n-9=1, \text{ то } m+n=10 < 13p^2 \text{ и}$$

чем далее $m+n \neq 1$. При $m+n=13$ и $p=2$;

$$13 = mn / (m+n-3) = mn \cdot 10 = 75p^2. \quad \text{Зн } m$$

$$m, n, \quad 10mn \div 2, \text{ то } 75p^2 \div 2 \Rightarrow p=2;$$

$$300 = 10mn, \quad mn = 30, \quad m+n = 13;$$

Получаем решения $(m=3; n=10)$ и $(m=10;$

$n=3)$. Ответ: $(3; 10); (10; 3)$.



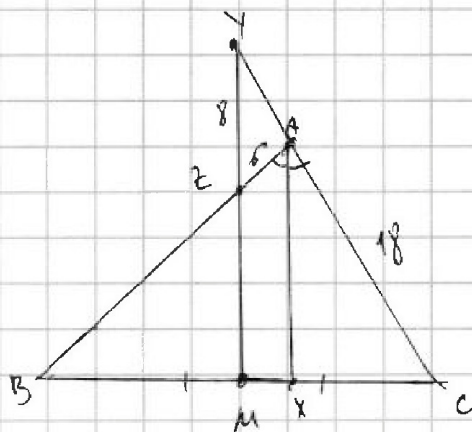
На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1
☐2
☐3
☐4
☒5
☐6
☐7
☐

СТРАНИЦА

1 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



Решение:

$\angle BZM = \angle BAX$, т.к. $MZ \parallel AX$, AB - секущая.

$\angle BZM = \angle AZY$; $\angle AYZ = \angle CAX$, т.к. $MZ \parallel AX$, AC - сек.

$\angle AZY = \angle BZM = \angle BAX = \angle CAX = \angle AYZ$, значит $\triangle AZY$ - равнобед. т.к. углы при ост. равен. из этого

следует: $AZ = AY = 6$. По теореме Менелая для $\triangle ABC$ и прям. MZ : $\frac{MC}{BM} \cdot \frac{BZ}{ZC} \cdot \frac{AY}{YC} = 1$; $\frac{6}{6} \cdot \frac{BZ}{24} \cdot \frac{6}{24} = 1$; $BZ = 24$

$AB = 24 + 6 = 30$; По теореме косинусов для $\triangle ZAY$ и сторонам YZ : $YZ^2 = AZ^2 + AY^2 - 2AZ \cdot AY \cdot \cos \angle ZAY$;

$64 = 72 - 2 \cos \angle ZAY$; $\cos \angle ZAY = \frac{1}{3} = -\cos \angle BAC$, т.к. $\angle ZAY$ и $\angle BAC$ - смеж. $\cos \angle BAC = -\frac{1}{3}$; По теореме

косинусов для $\triangle ABC$ и сторонам BC : $BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2 \cos \angle BAC \cdot AC \cdot AB$;



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1
☐

2
☐

3
☐

4
☒

5
☐

6
☐

7
☐

СТРАНИЦА
2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$BC^2 = 30^2 + 18^2 + 2 \cdot \frac{1}{5} \cdot 18 \cdot 30 ;$$

$$BC^2 = 900 + 324 + 2 \cdot 2 \cdot 30 ;$$

$$BC^2 = 1344 ;$$

$$BC = 8\sqrt{21} ;$$

$$\text{Ответ: } 8\sqrt{21} .$$

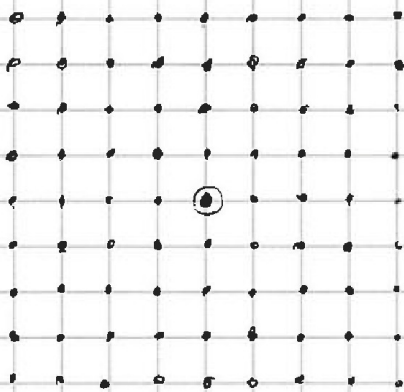


На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



СТРАНИЦА
1 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



Посчитаем сначала ^{точки} ~~каждый~~ ^{способ} ~~перек~~ 2 ~~клетки~~ ^{точки}, если

одна из ~~них~~ ^{точка} - это ~~центр~~ ^{точка} ~~клетки~~

Вторую ~~клетку~~ ^{точку} мы поместим.

Всего $81 - 1 = 80$ ~~способами~~ ^{способ}, ~~перек~~

Но при этом ~~каждый~~ ^{перек} ~~наш~~ ^{наш} раскраску мы можем

получить еще 3, т.е. 1 ~~возможный~~ ^{способ} ~~вар.~~ ^{способ} ~~раскрас~~

мы считаем в себе 4 ~~одинак.~~ ^{одинак.} ~~раскрас.~~ ^{раскрас.} ~~30-м~~

наших ~~способов~~ ^{способ} ~~раскраски~~ ^{раскраски}: $\frac{80}{4} = 20$.

Теперь рассмотрим случай, при ~~кажд.~~ ^{кажд.} 2 ~~точки~~

симметричны ~~относ.~~ ^{относ.} центра ~~сверла~~ ^{сверла}.

Каждой ~~точке~~ ^{точке} есть ~~единая~~ ^{единая} ~~пара~~ ^{пара} ~~внеш.~~ ^{внеш.} ~~точка~~ ^{точка},

с которой у нее ~~образует~~ ^{образует} ~~пара~~ ^{пара}. Это - ~~м~~ ^м ~~всего~~

пар: $\frac{80}{2} = 40$. Из ~~наших~~ ^{наших} пар ~~поворотами~~

получается ~~только~~ ^{только} 1 ~~пара~~ ^{пара} ~~точек~~ ^{точек}. Это -

различная ~~раскрас.~~ ^{раскрас.} $\frac{40}{2} = 20$ ~~ведь~~ ^{ведь} из 1 ~~рас~~ ^{рас}

мы ~~можем~~ ^{можем} ~~получ.~~ ^{получ.} 2 ~~пары~~ ^{пары}.

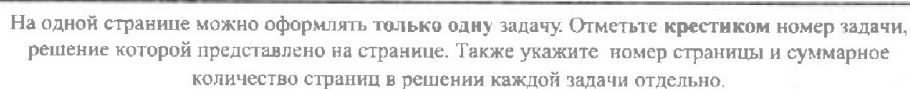


1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☒ 7 ☐

СТРАНИЦА
2 ИЗ 2

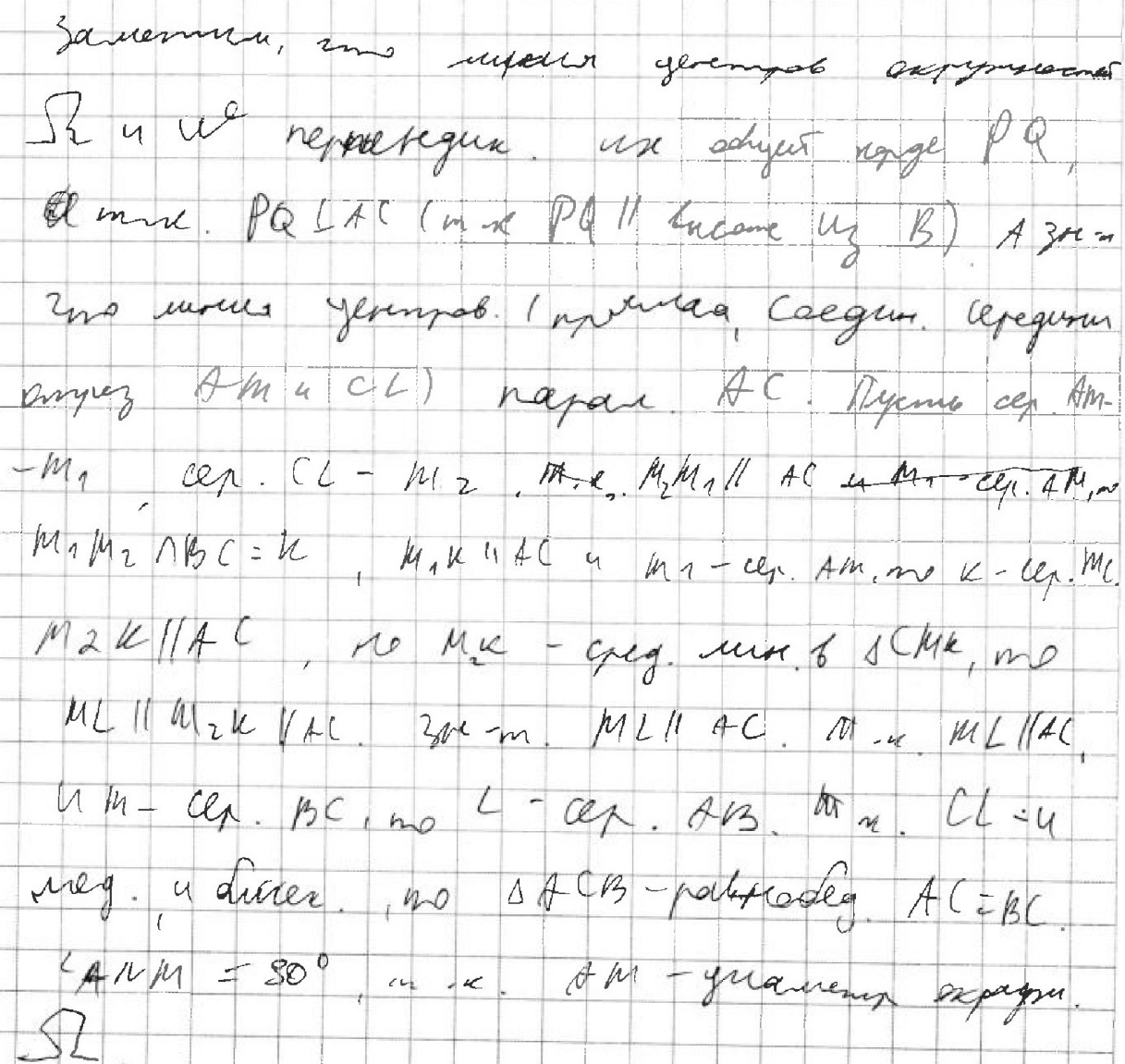
Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

И наконец рассмотрим случай, когда ни одна из точек ab -ся центром квадрата, и точки не совм. Отнес. центра квадрата. Выберем пер. точку не ab -ся центром: 80 - случаев. Выберем втор. точку не ab -ся центром, первой точке и цент. или. первой точке: $81 - 3 = 78$. Итого пар: $\frac{80 \cdot 78}{2} = 80 \cdot 39$ / или на 2, т.к. можем выбрать стат. точку A , пункт B или B , пункт A , это ab -ся одним и тем же). Из каждой пары точек можно получить ещё 3 пары поворотов. Итого $\frac{80 \cdot 39}{1} = 780$ - раскрасок в таком случае. Вскрасок всего: $780 + 20 + 20 = 820$.
Ответ: 820.



СТРАНИЦА
1 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!





На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1
☐

2
☐

3
☐

4
☐

5
☐

6
☐

7
☒

СТРАНИЦА
2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Решить $AC = BC = a$; $AN = 8$, $NC = a - 8 \Rightarrow a \geq 8$.

$$AM = \frac{1}{2} \sqrt{2AB^2 + 2AC^2 - BC^2};$$

$$AM = \frac{1}{2} \sqrt{200 + a^2}; \quad MC = \frac{1}{2} BC = \frac{a}{2};$$

$AM^2 - AN^2 = MN^2$ — по теор. Пифагора для $\triangle AMN$.

$MC^2 - NC^2 = MN^2$ — по теор. Пифагора для $\triangle MNC$.

$$AM^2 - AN^2 = MC^2 - NC^2;$$

$$50 + \frac{1}{4}a^2 = 64 - \frac{1}{4}a^2 + 16a - 64$$

$$a^2 - 16a + 50 = 0; \quad D = 256 - 200 = 56, \quad D > 0;$$

$$a = \frac{16 \pm \sqrt{56}}{2} = 8 \pm \sqrt{14}, \quad \text{так как } a > 8, \text{ то}$$

$$a = 8 + \sqrt{14} \in AC = BC.$$

Ответ: $8 + \sqrt{14}$; $8 + \sqrt{14}$.



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
из

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$(m+n)^2 - 9(m+n) = A = (m+n)(m+n-9)$$

$$B = mn(m+n-3)$$

$$C = m^2 + 2mn + n^2 - 9 - 5n$$

$$D = m^2 - 2mn - 8$$

$$E = (n+1)(n-8)$$

$$F = n(n-2)$$

$$\begin{cases} |x-3y| \leq 3 \\ |3x-y| \leq 1 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} -3 &\leq x-3y \leq 3 \\ -1 &\leq 3x-y \leq 1 \\ -3 &\leq 3x-3y \leq 3 \\ -3 &\leq 3y-x \leq 3 \\ -6 &\leq 8x \leq 6 \\ -3 &\leq 4x \leq 3 \\ -3 &\leq 3y-x \leq 3 \\ -1 &\leq y-3x \leq 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} -9 &\leq 3x-3y \leq 9 \\ -9 &\leq 3y-3x \leq 9 \\ -1 &\leq 3x-y \leq 1 \\ -10 &\leq 8y \leq 10 \\ -\frac{5}{4} &\leq y \leq \frac{5}{4} \end{aligned}$$

$$\frac{8}{4} + \frac{9-1}{4} = 2+2=4$$

$$\frac{4 \cdot 8 \cdot 6}{2} = 4+24=28$$

$$\frac{(2n+1)(2n-2)}{2} = 2n(n-1)$$

$$\frac{(2n+1)^2 - 1}{4} = \frac{4n^2 + 4n + 1 - 1}{4} = n^2 + n$$

$$\frac{3}{4} - \frac{15}{4} = -3$$

$$\frac{9}{4} - \frac{5}{4} = 1$$

$$5+6=11$$

$$y = \frac{5}{4}, x = \frac{3}{4}$$

$$4y + 8x = 13$$

$$4y = 2$$

$$y = \frac{1}{2}$$

$$4y + 8x = 13$$

$$4y = 2$$

$$y = \frac{1}{2}$$

$$D = 81 + 117 \cdot 4 = 529$$

$$\frac{9+23}{2}$$

$$m+n = -7$$

$$m+n = -7$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
из

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

24

$$3x+3+2d = x^4 + 4x^3 + 4x^2$$

$$2d = x^4 + 4x^3 + 4x^2 - 3x - 3;$$

$$x^4 + 4x^3 + 4x^2 + 4d = 3x^2;$$

$$4d = 3x^2 - x^4 - 4x^3 - 4x^2 = -x^4 - 4x^3 - x^2;$$

$$-x^4 - 4x^3 - x^2 = 2x^4 + 8x^3 + 8x^2 - 6x - 6$$

$$3x^4 + 12x^3 + 9x^2 - 6x - 6 = 0;$$

$$x^4 + 4x^3 + 3x^2 - 2x - 2 = 0;$$

$$x^4 + 4x^3 + 3x^2 - 2x - 2 \mid x+1$$

$$x^4 + 4x^3 + 3x^2 - 2x - 2$$

$$-2x-2$$

$$(x^3 + 3x^2 - 2)(x+1) = 0;$$

$$x^3 + 3x^2 + 0x - 2 \mid x+1$$

$$x^3 + 3x^2$$

$$2x^2 + 0x$$

$$-2x^2 + 2x$$

$$-2x-2$$

$$-2x-2$$

$$(x+1)^2 (x^2 + 2x - 2) = 0;$$

$$D = 4 + 2 - 4 = 12;$$

$$x = \frac{-2 \pm 2\sqrt{3}}{2} = -1 \pm \sqrt{3};$$

$$x = -1$$

$$x = -1$$

$$x^4 + 4x^3 + 4x^2 + 4d = 3x^2$$

$$x^4 + 4x^3 + 4x^2 + 4d = 3x^2$$

$$(x+1)^2 (x^2 + 2x - 2) = 0$$

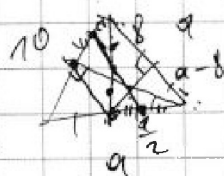
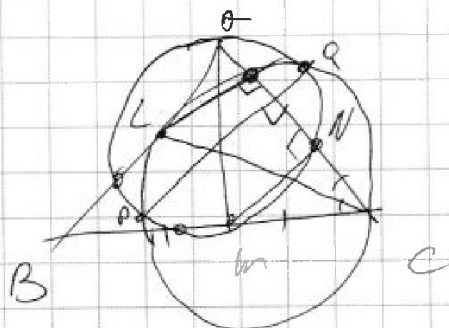


На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
из

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



$$\sqrt{65x^2 - 24x - 6} - \sqrt{65x^2 - 24x - 6} = 24x - 6$$

$$a^2 + 50 + 64 = 2a^2 - 16a + 64$$
$$a^2 - 16a + 50 = 0$$
$$D = 256 - 200 = 56, 2 \cdot 28$$
$$a = \frac{16 \pm 2\sqrt{14}}{2} = 8 \pm \sqrt{14}$$

$$AM = \frac{1}{2} \sqrt{600 + 64 + 14 + 16\sqrt{14}}$$
$$= \frac{139}{2} + 4\sqrt{14}$$
$$78 + 16\sqrt{14} = 139 + 8\sqrt{14}$$
$$= 139 + 8\sqrt{14}$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1
☐

2
☐

3
☐

4
☐

5
☐

6
☐

7
☐

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

