



МОСКОВСКИЙ  
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ  
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"  
ПО МАТЕМАТИКЕ

11 КЛАСС. Вариант 3



1. [3 балла] Найдите все действительные значения  $x$ , при каждом из которых существует геометрическая прогрессия, состоящая из действительных чисел и такая, что её десятый член равен

$$\sqrt{(25x + 34)(3x + 2)}, \text{ двенадцатый член равен } 2 - x, \text{ а восемнадцатый член равен } \sqrt{\frac{25x + 34}{(3x + 2)^3}}.$$

2. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \sqrt{x+6} - \sqrt{3-x-2z} + 7 = 2\sqrt{y-3x-x^2+z}, \\ |y+2| + 2|y-18| = \sqrt{400-z^2}. \end{cases}$$

3. [5 баллов] Найдите все значения параметра  $p$ , при которых уравнение

$$p \cos 3x + 6 \cos 2x + 3(p+4) \cos x + 10 = 0$$

имеет хотя бы одно решение. Решите это уравнение при всех таких  $p$ .

4. [5 баллов] Две окружности  $\omega_1$  и  $\omega_2$  пересекаются в точках  $A$  и  $B$ , а их общая касательная имеет с  $\omega_1$  и  $\omega_2$  общие точки  $C$  и  $D$  соответственно, причём точка  $B$  расположена ближе к прямой  $CD$ , чем точка  $A$ . Луч  $CB$  пересекает  $\omega_2$  в точках  $B$  и  $E$ . Найдите отношение  $ED : CD$ , если диагональ  $AD$  четырёхугольника  $ACDE$  делит отрезок  $CE$  в отношении  $7 : 20$ , считая от вершины  $C$ .

5. [4 балла] Дан клетчатый прямоугольник  $500 \times 120$ . Сколькими способами можно закрасить 8 клеток этого прямоугольника так, чтобы закрашенное множество обладало хотя бы одной из следующих симметрий: относительно центра прямоугольника, относительно любой из двух "средних линий" прямоугольника ("средней линией" прямоугольника назовём отрезок, соединяющий середины двух его противоположных сторон). Ответ дайте в виде выражения, содержащего не более трёх членов (в них могут входить факториалы, биномиальные коэффициенты).

6. [4 балла] Найдите все тройки целых чисел  $(a; b; c)$  такие, что:

- $a < b$ ,
- число  $b - a$  не кратно 3,
- число  $(a - c)(b - c)$  является квадратом некоторого простого числа,
- выполняется равенство  $a^2 + b = 1000$ .

7. [6 баллов] В основании призмы лежит равносторонний треугольник площади 4. Площади её боковых граней равны 6, 6 и 5. Найдите объём призмы.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  
☐

2  
☒

3  
☐

4  
☐

5  
☐

6  
☐

7  
☐

СТРАНИЦА  
1 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{cases} \sqrt{x+6} - \sqrt{3-x-2z} + 7 = 2\sqrt{y-3x-x^2+x} \\ |y+2| + 2|y-18| = \sqrt{400-z^2} \end{cases}$$

$$\text{или: } z \leq 20; x \geq -6; 3 \geq x+2z; y-3x-x^2+x \geq 0$$

1) Если  $y \geq 18$ ; то  $|y+2| \geq 20 \Rightarrow |y+2| + 2|y-18| \geq 20$

2) Если  $y \leq -2$ ; то  $2|y-18| \geq 20 \Rightarrow |y+2| + 2|y-18| \geq 20$

3) Если  $y > -2$  и  $y < 18$ , то  $|y+2| + 2|y-18| =$

$$= y+2 + 36 - 2y = 38 - y \geq 20 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow |y+2| + 2|y-18| \geq 20 - \text{верно}$$

$$\text{Но } \sqrt{400-z^2} \leq 20 - \text{верно} \quad \text{и } |y+2| + 2|y-18| =$$

$$= \sqrt{400-z^2} \Rightarrow \sqrt{400-z^2} = 20 \Rightarrow z = 0 \quad \text{и}$$

$$\text{и } |y+2| + 2|y-18| = 20$$

$$\text{На 1) промежутке } (y \geq 0) \quad |y+2| + 2|y-18| = 3y - 34 = 20$$

$$\Rightarrow y = 18$$

$$\text{На 2) промежутке } (y \leq -2) \quad |y+2| + 2|y-18| = -3y + 34 \geq 20$$

$$\text{На 3) промежутке } (y > -2; y < 18)$$

$$|y+2| + 2|y-18| = 38 - y \geq 20$$

$$\Rightarrow y < 18 - \text{верно}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



СТРАНИЦА  
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

N3

$$p \cos 3x + 6 \cos 2x + 3(p+4) \cos x + 10 = 0$$

$$\cos 3x = \cos x \cdot \cos 2x - \sin x \cdot \sin 2x =$$

$$= \cos x (\cos^2 x - \sin^2 x) - 2 \sin x \cdot \cos x \cdot \sin x =$$

$$= \cos^3 x - 3 \cos x (1 - \cos^2 x) = 4 \cos^3 x + 3 \cos x$$

$$\cos 2x = 2 \cos^2 x - 1$$

$$4p \cos^3 x + 3p \cos x + 12 \cos^2 x + 3(p+4) \cos x + 4 = 0$$

$$f(x) = 2p \cos^3 x + 6 \cos^2 x + 3(p+2) \cos x + 2 = 0$$

$$f'(x) = 6p \cos^2 x \cdot \sin x + 12 \cos x \sin x + 3(p+2) \sin x = 0$$

$$\begin{cases} \sin x = 0 \\ 2p \cos^2 x + 6 \cos x + p+2 = 0 \end{cases}$$

$$D = 36 - 8p(p+2)$$

Функция  $f(x)$  — кубическая <sup>перемежаемая</sup> ограниченная.

Найдём экстремумы функции и крайние точки при всех  $p$ . Будут подходить

только такие  $p$ , что нигде <sup>значения</sup> два <sup>значения</sup> не равны.

разного знака среди значений экстремумов и крайних точек, не будет решения.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

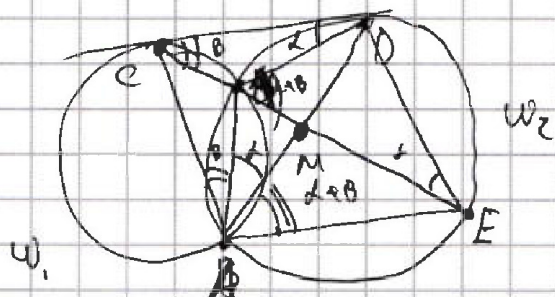


СТРАНИЦА

1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

№



$$\frac{ED}{CD} = ?$$

$$\frac{CM}{ME} = \frac{7}{20}$$

$$\frac{ED}{CD} \sim \triangle BCD \sim \triangle DCE$$

$$\Rightarrow \frac{ED}{BD} = \frac{CD}{CB} \Rightarrow \frac{ED}{CD} = \frac{BD}{BC}$$

AM - биссектриса т.к.  $\angle CAM = \angle CAB + \angle BAM =$

$= \alpha + \beta$  т.к. касательная CD и хорды  $\omega_1$  и  $\omega_2$

$$\angle MAE = \angle DBM = \angle DCB + \angle CDB = \alpha + \beta$$

$$\Rightarrow \frac{CM}{ME} = \frac{CA}{AE} = \frac{7}{20}$$

$\angle CDA = \angle AED$  т.к. CD - касан; AD - хорда

$$\Rightarrow \triangle CDA \sim \triangle DEC \Rightarrow \frac{CD}{DE} = \frac{CA}{DA} = \frac{DA}{AE}$$

$$\left(\frac{CD}{DE}\right)^2 = \frac{CA}{DA} \cdot \frac{DA}{AE} = \frac{CA}{AE} = \frac{7}{20}$$

$$\frac{ED}{CD} = \sqrt{\frac{20}{7}}$$

$$\text{Ответ: } \frac{ED}{CD} = \sqrt{\frac{20}{7}}$$

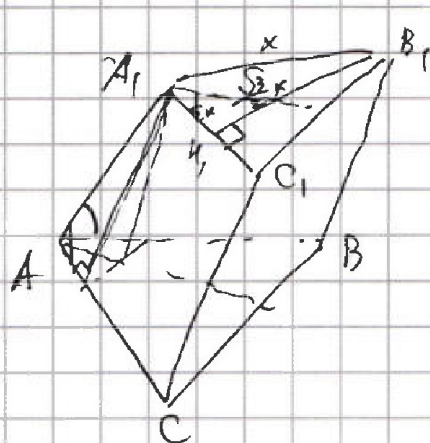


На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

|                          |                          |                          |                          |                          |                          |                          |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1                        | 2                        | 3                        | 4                        | 5                        | 6                        | 7                        |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

СТРАНИЦА  
\_\_ ИЗ \_\_

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



$\triangle ABC$ ;  $\triangle A_1B_1C_1$  — равнобедренный  
 $x = AB_1$

$$\sin 60^\circ = \frac{4}{x} = \frac{B_1C_1}{x} = \frac{4}{x}$$

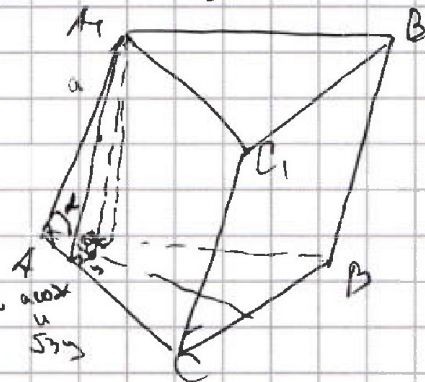
$$= \frac{\sqrt{3}x^2}{4}$$

$$x = \frac{4}{\sqrt{3}}$$

$$h = \sqrt{(a \sin \alpha)^2 - \left(\frac{a \sin \alpha}{\sqrt{3}}\right)^2}$$

$$\frac{\sqrt{3} a \cos \alpha}{2}$$

$$a \cdot \sin \alpha$$



$$C \cdot 500 \cdot 60 - 2C^2 \cdot 500 \cdot 30$$

$$= \frac{30000 \cdot 20999 \cdot 20998 \cdot 20997}{4!} - \frac{15000 \cdot 14999 \cdot 14998 \cdot 14997}{4!}$$

$$\left(2\sqrt{18-3x-x^2} - 7\right)^2 = \left(\sqrt{x+6} - \sqrt{3-x}\right)^2$$

$$4\sqrt{18-3x-x^2} - 28\sqrt{18-3x-x^2} + 49 = x+6 + 3-x - 2\sqrt{18-3x-x^2}$$

$$26\sqrt{18-3x-x^2} = 4(28-3x-x^2)$$

$$t = \sqrt{18-3x-x^2}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

|                          |                          |                          |                          |                                     |                          |                          |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1                        | 2                        | 3                        | 4                        | 5                                   | 6                        | 7                        |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

СТРАНИЦА  
4 из 4

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

15. При каждой из симметрий, каждый вариант задается 4 квадратами ввернутого с одной из осей поля симметрии (оставшиеся 4 заданы относительно симметрии). Тогда кол-во таких вариантов  $C_{50000}^4$

Однако в каждой из симметрий способы пересекаются. Заметим, что при использовании двух любых симметрий, преобразование автоматически  $\Rightarrow$  было рассмотрено дважды. Заметим, что каждый вариант такой задается 2 квадратами с одной стороны поля, а остальные 2 заданы симметрией. Тогда кол-во таких способов  $C_{50000}^2$

Ответ:  $C_{50000}^4 - 2 C_{50000}^2 =$   
 $= \frac{50000 \cdot 49999 \cdot 49998 \cdot 49997}{4!} - 15000 \cdot 14999$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7  
☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☒ ☐

СТРАНИЦА  
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Nb  $a < b$

$b - a \nmid 3$

$$(a-c)(b-c) = p^2 \quad ; \quad \text{где } p - \text{простое}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a-c = p; b-c = p \Rightarrow a=b; \text{ но } a < b \\ b-c = 1; a-c = p^2; p \geq 2 \Rightarrow a-c > b-c; \text{ но } a < b \\ a-c = 1; b-c = p^2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow a = c+1; b = p^2+c$$

$$b = p^2 + a - 1$$

$$a^2 + b = a^2 + a - 1 + p^2 = 1000$$

$$b > a \Rightarrow a^2 + b \geq a^2 + 1 \Rightarrow$$

$$= 1000 \geq (a+1)a \Rightarrow a \leq 31$$

$$b - a = p^2 - 1 \stackrel{\nmid 3}{=} (p-1)(p+1) \nmid 3 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow p \not\equiv 1 \pmod{3}; p \not\equiv -1 \pmod{3} \Rightarrow p \equiv 0 \pmod{3}; p - \text{простое}$$

$$\Rightarrow p = 3 \Rightarrow b = a + 8$$

$$a^2 + a + 8 = 1000$$

$$(a+32)(a-31) = 0$$

$$\text{Ответ: } \begin{cases} a=31; b=39; c=30 \\ a=-32; b=-24; c=-33 \end{cases}$$





На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



2

3

4

5

6

7

СТРАНИЦА

1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

№1  $S_0; S_1; \dots; S_i$  - геом. прогрессия

$q$  - коэффициент прогрессии т.е.  $S_i = S_{i-1} \cdot q$

$$S_{10} = \sqrt{(25x+34)(3x+2)}; S_{10} \neq 0; \text{так как } S_{12} = S_{10} \cdot q^2 = 0 \Rightarrow x = 2 \Rightarrow \\ \Rightarrow S_{10} = \sqrt{84 \cdot 8} \neq 0; \text{и тогда } (25x+34)(3x+2) \geq 0; 3x+2 \neq 0$$

$$S_{12} = (2-x) = S_{10} \cdot q^2 = \sqrt{(25x+34)(3x+2)} \cdot q^2$$

$$S_{10} \neq 0 \Rightarrow q^2 = \frac{2-x}{\sqrt{(25x+34)(3x+2)}}$$

$$S_{18} = \sqrt{\frac{25x+34}{(3x+2)^3}} = S_{12} \cdot q^6 = \frac{(2-x)^4}{\sqrt{(25x+34)^3(3x+2)^3}}$$

$$(2-x)^4 = \left( \sqrt{(25x+34)^3} \right)^4; 25x+34 \geq 0$$

$$|2-x| = \sqrt{25x+34}$$

$$(2-x)^2 = 25x+34$$

$$4 - 4x^2 + x^2 = 25x + 34$$

$$x^2 - 29x - 30 = 0$$

$$(x-30)(x+1) = 0$$

$$\begin{cases} x = 30 \text{ не подходит} \\ x = -1 \end{cases}$$

$\Rightarrow$

$$\begin{cases} \text{и тогда} \\ \text{и тогда} \end{cases} \begin{cases} (25x+34)(3x+2) \geq 0 \\ 3x+2 \neq 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow x \neq -1 \Rightarrow \text{ответ: } x = 30$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☒ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА  
2 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$N2 \quad \sqrt{x+6} - \sqrt{3-x} + 7 = 2\sqrt{18-3x-x^2}$$

$$\left( \underset{a}{2\sqrt{18-3x-x^2}} - \underset{b}{7} \right)^2 = \left( \sqrt{x+6} - \sqrt{3-x} \right)^2$$

$a, b$  - одной знака

$$2b\sqrt{18-3x-x^2} = 4(18-3x-x^2) + 49$$

$$t = \sqrt{18-3x-x^2}$$

$$2bt = 4b^2 + 49$$

$$(2t-5)(t-4) = 0$$

$$\begin{cases} t=4 \\ t=2,5 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 1) \sqrt{18-3x-x^2} = 4 \\ 2) \sqrt{18-3x-x^2} = 1,5 \end{cases}$$

$$1) x^2 + 3x - 2 = 0$$

$$x_{1,2} = \frac{-3 \pm \sqrt{17}}{2}$$

$$\Rightarrow x = \frac{-3 - \sqrt{17}}{2}$$

$$2) 4x^2 + 12x - 47 = 0$$

$$x_{1,2} = -1,5 \pm \sqrt{14}$$

$$\Rightarrow x = -1,5 + \sqrt{14}$$

$$\text{Ответ: } x = \frac{-3 - \sqrt{17}}{2} \text{ или } x = -1,5 + \sqrt{14}$$

$$\text{при } x_1 > x_2 \quad a > 0; b < 0$$

$$\text{при } x_2 < x_1 \quad a > 0; b > 0$$

$$\text{при } x_1 > x_2 \quad a < 0; b < 0$$

$$\text{при } x_2 < x_1 \quad a < 0; b > 0$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7  
☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐

СТРАНИЦА  
 ИЗ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\sqrt{x+6} - \sqrt{3-x} + 7 = 2\sqrt{18-3x-x^2}$$

$$\sqrt{3-x} \leq 3-x \quad \text{①} \quad 23: x \geq -6 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sqrt{x+6} - \sqrt{3-x} + 7 \geq 0$$

$$4(18-3x-x^2) = x+6 + 3-x + 49 +$$

$$\sqrt{x+6} = a \quad \sqrt{3-x} = b$$

$$2ab - a + b - 7 = 0$$

$$ab - \frac{a}{2} + \frac{b}{2} - 3,5 = 0$$

$$(a-c)(b-d) = 0$$

$$cd = 3,5$$

$$+6 - 3 - 2x = 0$$

$$x = -\frac{3}{2} = -1,5$$

$$18 - 3x - x^2 =$$

$$= 18 + \frac{9}{2} + \frac{9}{4} = 22,5$$

$$f'(x) = \frac{1}{4\sqrt{18-3x-x^2}} \cdot (-2x-3) + \frac{1}{2\sqrt{3-x}} - \frac{1}{2\sqrt{x+6}} = 0$$

$$+2x+1,5 + 2\sqrt{x+6} + 2\sqrt{3-x} = 0$$

$$2ab - a + b - 7 = 0$$

$$a = \frac{7-b}{2b-1}$$

$$x \in [-6; 3]$$

$$\sqrt{x+6} = \frac{7-\sqrt{3-x}}{2\sqrt{3-x}-1}$$

$$\sqrt{x+6} - \sqrt{3-x} + 7 = 2\sqrt{x+6} \cdot \sqrt{3-x}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  
☐

2  
☐

3  
☐

4  
☐

5  
☐

6  
☐

7  
☐

СТРАНИЦА  
из

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$h = \sqrt{a^2 \sin^2 \alpha - \frac{a^2 \cos^2 \alpha}{3}} = \sqrt{a^2 \sin^2 \alpha - \frac{a^2 (1 - \sin^2 \alpha)}{3}} =$$
$$= a \sqrt{\frac{4 \sin^2 \alpha - 1}{3}}$$

$$\sin \alpha \cdot a^2 = 5$$

$$h = a \sqrt{\frac{4 \sin^2 \beta - 1}{3}}$$

$$\sin \beta \cdot a^2 = 6$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

|                          |                          |                          |                          |                          |                          |                          |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1                        | 2                        | 3                        | 4                        | 5                        | 6                        | 7                        |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

СТРАНИЦА  
\_\_ ИЗ \_\_

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$26t = 4t^2 + 40$$

$$4t^2 - 26t + 40 < 0$$

$$2t^2 - 13t + 20 < 0$$

$$(2t - 5)(t - 4) < 0$$

$$\begin{cases} t = 4 \\ t = 2,5 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \sqrt{18 - 3x + x^2} = 4 \\ \sqrt{18 - 3x + x^2} = 2,5 \end{cases}$$

$$72 - 12x - 4x^2 = 25$$

$$4x^2 + 12x - 47 = 0$$

$$D = 144 + 16 \cdot 47$$

$$x = \frac{-12 \pm \sqrt{144 + 16 \cdot 47}}{8}$$

$$= \frac{-3 \pm \sqrt{96}}{2} = -1,5 \pm \sqrt{14}$$

$$-x^2 - 3x + 2 < 0$$

$$(x+2)(x-1) < 0$$

$$x < -2 \text{ или } x > 1$$

$$x^2 + 3x - 2 < 0$$

$$D = 9 + 8 = 17$$

$$x = \frac{-3 \pm \sqrt{17}}{2}$$

$$= \frac{-3 \pm \sqrt{369 + 47}}{2}$$