



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

10 КЛАСС. Вариант 8



1. [3 балла] Пятый член арифметической прогрессии равен $6x + 18$, седьмой член равен $(x^2 - 4x)^2$, а одиннадцатый равен $(-3x^2)$. Найдите x .
2. [4 балла] Найдите наименьшее значение выражения $14x + 7y$ при условии

$$\begin{cases} |4x - 3y| \leq 6, \\ |3x - 4y| \leq 8. \end{cases}$$

3. [5 баллов] Найдите все пары (m, n) натуральных чисел, для которых одно из чисел $A = m^2 - 2mn + n^2 + 9m - 9n$ и $B = m^2n - mn^2 + 3mn$ равно $13p^2$, а другое равно $3q^2$, где p и q — простые числа.
4. [5 баллов] Прямая, параллельная биссектрисе AH треугольника ABC , проходящая через середину M его стороны BC , пересекает сторону AC и продолжение стороны AB в точках Z и Y соответственно. Найдите BC , если $AC = 12$, $AZ = 3$, $YZ = 4$.
5. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \sqrt{x+6} - \sqrt{5-y} + 5 = 2\sqrt{30-x-y^2}, \\ 4x^4 + x - 5\sqrt[3]{y} = 4y^4 - 5\sqrt[3]{x+y}. \end{cases}$$

6. [4 балла] На тетрадном листе нарисован квадрат 9×9 клеток (стороны квадрата идут вдоль границ клеток), а все узлы сетки внутри квадрата или на его границе покрашены в чёрный цвет. Найдите количество способов перекрасить два узла в белый цвет, если раскраски, получающиеся друг из друга поворотом, считаются одинаковыми.
7. [6 баллов] В треугольнике ABC на медиане AM и биссектрисе CL как на диаметрах построены окружности Ω и ω соответственно, пересекающиеся в точках P и Q . Отрезок PQ параллелен высоте треугольника ABC , проведённой из вершины B . Окружность Ω пересекает сторону AC повторно в точке N . Найдите длины сторон AC и BC , если $AB = 26$, $AN = 20$.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☒ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
1 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Пусть нач-ть $\{a_n\}$. Тогда :

Пусть шаг прогрессии равен d .
$$\begin{cases} a_5 = 6x + 18 \\ a_7 = (x^2 - 4x)^2 \\ a_{11} = -3x^2 \end{cases}$$

$$a_5 = a_1 + 4d$$

$$a_7 = a_1 + 6d$$

$$a_{11} = a_1 + 10d$$

$$(a_7 - a_5) \cdot 2 = 4d = a_{11} - a_7$$

$$\left((x^2 - 4x)^2 - (6x + 18) \right) \cdot 2 = -3x^2 - (x^2 - 4x)^2$$

$$2 \cdot (x^2 - 4x)^2 - 12x - 36 = -3x^2 - (x^2 - 4x)^2$$

$$3 \cdot (x^2 - 4x)^2 + 3x^2 - 12x - 36 = 0$$

$$(x^2 - 4x)^2 + x^2 - 4x - 12 = 0$$

$$x^2 - 4x = t$$

$$t^2 + t - 12 = 0$$

$$(t + 4)(t - 3) = 0$$

$$\begin{cases} t = -4 \\ t = 3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^2 - 4x = -4 \\ x^2 - 4x = 3 \end{cases} \quad (1)$$

$$(x - 2)^2 = 0$$



$$\boxed{x_1 = 2}$$

$$(1) : x^2 - 4x - 3 = 0$$

$$D = 16 + 12 = 28 = (2\sqrt{7})^2$$

$$\boxed{x_{2,3} = \frac{4 \pm 2\sqrt{7}}{2} = 2 \pm \sqrt{7}}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1



2



3



4



5



6



7



СТРАНИЦА

2 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Проверка

$x = 2 :$

$a_5 = 12 + 18 = 30$

$a_7 = (4 - 8)^2 = 16$

$a_{11} = -12$

Подходит.

$x = 2 + \sqrt{7} :$

$a_5 = 12 + 6\sqrt{7} + 18 = 30 + 6\sqrt{7}$

$a_7 = (4 + 7 + 4\sqrt{7} - 8 - 4\sqrt{7})^2 = 9$

$a_{11} = (-3(4 + 7 + 4\sqrt{7}))^2 = -33 - 12\sqrt{7}$

~~Вз~~

Подходит

Заметим, что все корни подходят под решение

$$\text{уравнения } (a_7 - a_5) \cdot 2 = a_{11} - a_7, \text{ а это}$$

гарантирует, что a_5, a_7, a_{11} являются членами ~~арифм.~~ арифм. прогрессии.

$$\text{Ответ: } 2; 2 + \sqrt{7}; 2 - \sqrt{7}.$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☒ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА

1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{cases} |4x - 3y| \leq 6 \\ |3x - 4y| \leq 8 \end{cases}$$

$$\min(14x + 7y) = ?$$

$$\begin{cases} -6 \leq 4x - 3y \leq 6 \\ -8 \leq 3x - 4y \leq 8 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 4x - 3y \geq -6 \\ 4y - 3x \geq -8 \end{cases}$$

$$+ \begin{cases} 4x - 3y \geq -6 \\ 3x - 4y \geq -8 \end{cases}$$

$$7x - 7y \geq -14 \Rightarrow \begin{cases} x - y \geq -2 \\ 4x - 3y \geq -6 \end{cases}$$

$$+ \begin{cases} 5x - 4y \geq -8 \\ 4y - 3x \geq -8 \end{cases}$$

$$2x \geq -16$$

$$\boxed{x \geq -8}$$

$$x \geq -8 \Rightarrow 3x \geq -24$$

$$4y - 3x \geq -8$$

$$4y \geq -32 \Rightarrow \boxed{y \geq -8}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☒	☐	☐	☐	☐

СТРАНИЦА

4 из 4

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$(q-7)(q+10) = 0$$

$q = 7$ - подходит

$q = -10$ - не подходит.

Подставим: $\begin{cases} m = q = 7 \\ n = 3 \\ p = 2 \end{cases}$, тогда ~~$A = 0$~~

$$A = (7-3)(7-3+9) = 4 \cdot 13 = 13 \cdot 2^2$$

$$B = 7 \cdot 3 \cdot (7-3+3) = 3 \cdot 7^2$$

Всюду выше $m \neq n$, потому что иначе $A = 0$.

Ответ: $(7; 3)$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☒ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
3 из 4

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

2 случая:

$$m = p$$

$$n = 13$$

$$m - n + 3 = p = p - 13 + 3 = p - 10 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow p = p - 10 - \text{противоречие.}$$

$$2) \quad B = 3q^2 \Rightarrow m(n - n + 3) = 3q^2$$

Т. к. $m \neq n$, то существует 2 случая:

$$1 \text{ случай: } \begin{cases} m = 3 \\ n = 9 \\ m - n + 3 = 9 \end{cases} \rightarrow$$

$$m - n + 3 = 9 = 3 - 9 + 3 = 6 - 9 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{q = 3} \Rightarrow n = 3 = m, \text{ но } n \neq m, \\ \text{противоречие.}$$

$$2 \text{ случай: } \begin{cases} m = 9 \\ n = 3 \\ m - n + 3 = 9 \end{cases} \quad \begin{aligned} m - n + 3 &= 9 = 9 - 3 + 3 = 9. \\ &- \text{выходит.} \end{aligned}$$

$$\text{Подставим в } A = (m - n)(m - n + 3) = (9 - 3)(9 - 3 + 3) =$$

$$= (9 - 3)(9 + 6) = 13p^2, \text{ либо } (9 - 3), \text{ либо } (9 + 6) -$$

$$- \text{четное} \Rightarrow A - \text{четное} \Rightarrow p = 2.$$

$$(9 - 3)(9 + 6) = 13 \cdot 4 \Rightarrow q^2 + 3q + 18 - 52 = 0$$

$$q^2 + 3q - 34 = 0$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☒	☐	☐	☐	☐

СТРАНИЦА
2 из 4

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Первое не подходит.

$m = 5$, тогда

$$A = 4.13$$

$$B = m(m+2) = 5 \cdot 7 = 35 - \text{не подходит.}$$

Следовательно, $m \neq n \neq 1$.

$$B = mn(m-n+3), \text{ если } m-n+3 = 1$$

$\Downarrow$

$$m-n = -2$$

$\Leftarrow$

$$A = (-2)(-2+3) < 0. - \text{плохо.}$$

Рассмотрим 2 случая $B = 13p^2, B = 3q^2$

$$1) B = 13p^2 \Rightarrow mn(m-n+3) = 13p^2$$

$$m, n, (m-n+3) > 1.$$

Т.к. $m \neq n$, то существует два случая:

$$\text{либо } \begin{cases} m=13 \\ n=p \\ m-n+3=p \end{cases}, \text{ либо } \begin{cases} n=13 \\ m=p \\ m-n+3=p \end{cases}$$

1 случай: $m=13$

$$n=p$$

$$m-n+3 = p = 13-p+3 = 16-p \Rightarrow$$

$$\Rightarrow p = 8 - \text{не простое} - \text{противоречие.}$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☒	☐	☐	☐	☐

СТРАНИЦА
1 ИЗ 4

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$A = m^2 - 2mn + n^2 + 9m - 9n = (m-n)(m-n+9)$$

$$B = m^2n - mn^2 + 3mn = mn(m-n+3)$$

Пусть одно из чисел равно 1.

$$1) m = 1 : B = n(1-n+3) > 0$$

$$A = (1-n)(1-n+9) > 0$$

$$1-n < 0 \Rightarrow 1-n+9 < 0 \Rightarrow n > 10$$

$$\left. \begin{array}{l} n(1-n+3) > 0 \\ n > 0 \end{array} \right\} \Rightarrow 1-n+3 > 0 \Rightarrow n < 4,$$

противоречие.

$$2) n = 1 : A = (m-1)(m+8)$$

$$B = m(m+2)$$

Заметим, что либо $(m-1)$, либо $(m+8)$ — четное $\Rightarrow$

$\Rightarrow A$ — четное $\Rightarrow$ либо $p=2$, либо $q=2$.

$$1 \text{ случай: } A = 13p^2 = 13 \cdot 2^2 = 13 \cdot 4$$

$$B = 3q^2$$

$$\text{Если } m=2 : A = 10 - \text{нельзя. } (\nexists 13, \nexists 3)$$

Значит, $(m-1) > 1$ и $(m+8) > 1$.

$$m+8 > m-1 \Rightarrow m-1 = 2, \text{ либо } m-1 = 4$$

$$m+8 = 26 \quad m+8 = 13$$

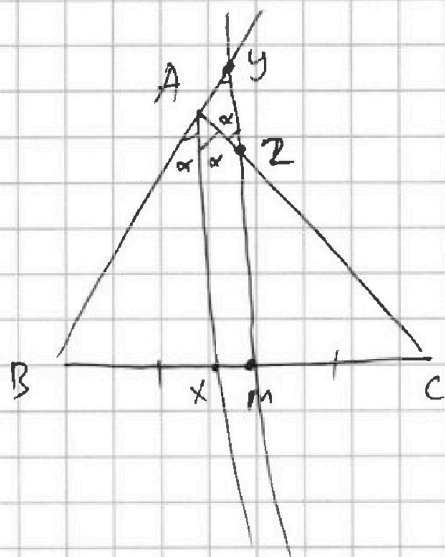


На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7
☐ ☐ ☐ ☒ ☐ ☐ ☐

СТРАНИЦА
 1 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



Заметим, что $\angle XAZ = \angle AZY$
 $(AX \parallel ZY)$.

$\angle BAC = \angle AYZ + \angle AZY$ (внешн.)

$$\angle BAX + \angle XAC = \angle AYZ + \angle AZY$$

$$\Downarrow$$

$$\angle BAX = \angle AYZ = \angle XAC = \angle AZY \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \triangle AZY - \text{р/б} \Rightarrow AZ = AY = 3.$$

По т. Менелая для $\triangle ABC$ и прямой YM :

$$\frac{BM}{MC} \cdot \frac{CZ}{AZ} \cdot \frac{AY}{YB} = 1 \quad (AZ = AC - AZ = 3)$$

$$\frac{4}{1} \cdot \frac{3}{3} = 1$$

$$3 \cdot \frac{3}{3+AB} = 1$$

$$\Downarrow$$

$$AB = 6$$

По т. косинусов для $\triangle AZY$:

$$AY^2 = AZ^2 + YZ^2 - 2 \cdot AZ \cdot YZ \cdot \cos \alpha \quad (\alpha = \angle AZY)$$

$$3^2 = 3^2 + 4^2 - 2 \cdot 3 \cdot 4 \cos \alpha$$

$$24 \cos \alpha = 16 \Rightarrow \cos \alpha = \frac{16}{24} = \frac{2}{3} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \cos 2\alpha = 2 \cos^2 \alpha - 1 = 2 \cdot \frac{4}{9} - 1 = -\frac{1}{9}.$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☒	☐	☐	☐

СТРАНИЦА
2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

По т. косинусов для $\triangle ABC$:

$$BC^2 = AC^2 + AB^2 - 2 \cdot AC \cdot AB \cdot \cos 2\alpha$$

$$BC^2 = 12^2 + 6^2 - 2 \cdot 6 \cdot 12 \cdot \left(-\frac{1}{9}\right)$$

$$BC^2 = 144 + 36 + 144 \cdot \frac{1}{9} = 180 + 16 = 196$$

$$BC = \sqrt{196} = 14.$$

Ответ: 14.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1
☐

2
☐

3
☐

4
☐

5
☒

6
☐

7
☐

СТРАНИЦА
2 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\frac{(b-5)^2}{(1-2b)^2} + b^2 = 11$$

$$(b-5)^2 + (b-2b^2)^2 = (1-2b)^2 \cdot 11$$

$$b^2 + 25 - 10b + b^2 + 4b^4 - 4b^5 = 11 + 44b^2 - 44b$$
$$42b^2 - 34b - 4b^4 + 4b^5 - 14 = 0$$

$$2b^4 - 2b^3 - 21b^2 + 17b + 7 = 0$$

$$\cancel{2 \cdot \frac{1}{16}} - \cancel{2 \cdot \frac{2}{8}} - \cancel{21 \cdot \frac{1}{4}} + \cancel{17 \cdot \frac{1}{2}} + 7 = 0$$

$$\cancel{\frac{1}{8}} - \cancel{\frac{1}{4}} + \cancel{\frac{21}{4}} + \cancel{\frac{17}{2}} + 7 = 0$$

$$\cancel{1 - 2 - 21 + 17 + 7} = 0$$

$$\cancel{(2 \cdot \frac{7^4}{16} - 2 \cdot \frac{7^3}{8} - 21 \cdot \frac{7^2}{4} + 17 \cdot \frac{7}{2} + 7)} = 0$$

$$a - b + 5 = 2ab \quad | + 11$$

$$a - b + 16 = (a+b)^2$$



1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☒ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
1 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

~~Посмотрим на второе уравнение, оно симметрично относительно x и y , т.е. $x=y$ — точно корень второго. Подставим $y=x$ в первое:~~

~~$$\sqrt{x+6} + \sqrt{5-x} + 5 = 2\sqrt{30-x-x^2}$$

$$\sqrt{x+6} - \sqrt{5-x} + 5 = 2\sqrt{(5-x)(6+x)}$$~~

Пусть $F(x) = 4x^4 + x + 5\sqrt{x}$

Тогда второе уравнение: $F(x) = F(y)$

Заметим, что из ОДЗ: $x \geq 0$, тогда

$F(x)$ монотонно возрастает ($F'(x) = 4x^3 + 1 \stackrel{!}{\geq} 0$)

Тогда ур-ние $F(x) = F(y)$ имеет единственное решение, т.е. $x=y$.

Подставим в первое $y=x$:

$$\sqrt{x+6} + \sqrt{5-x} + 5 = 2\sqrt{(5-x)(6+x)}$$

$$\left. \begin{array}{l} \sqrt{x+6} = a \\ \sqrt{5-x} = b \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{cases} a-b+5 = 2ab \\ a^2 + b^2 = 11 \end{cases}$$

$$a = 2ab = b-5$$

$$a(1-2b) = b-5 \Rightarrow a = \frac{b-5}{1-2b} \quad (b \neq \frac{1}{2})$$

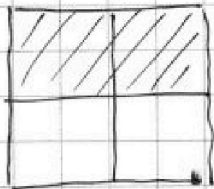


На одной странице можно оформлять **только одну задачу**. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☒ 7 ☐

СТРАНИЦА
2 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



Будем составлять каждой паре
клетку из этой пары, состоящей
шей в верхней половине. Понятно,

что пара не может содержаться полностью
внизу или сверху и для каждой клетки
существует ровно 1 симметричная ей.

Т.е. кол-во таких пар: $\frac{10 \cdot 10}{2} = 50$.

Тогда оставшихся пар: $C_{100}^2 - 50$ (C_{100}^2 —
это общее кол-во пар).

Тогда кол-во ~~способов~~ ^(N) следующее:

$$N = \frac{C_{100}^2 - 50}{4} + \frac{50}{2} = \frac{\frac{100 \cdot 99}{2} - 50}{4} + \frac{100}{4} =$$

$$= \frac{\frac{100 \cdot 99}{2} + 50}{4} = \frac{100 \cdot 99 + 100}{8} = \frac{100 \cdot 100}{8} =$$

$$= 25 \cdot 50 = 1250$$

Ответ: 1250.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☒ 7 ☐

СТРАНИЦА
1 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Давайте будем считать узлы сетки клетками, тогда задача выглядит след. образом: сколько способов выбрать две клетки, на доске 10×10 , если отличающиеся поворотом одинаковые.

Заметим, что пары клеток, которые симметричны относительно центра, при повороте 2 раза переходят сами в себя, т.е.

при подсчете таких пар мы будем делить их кол-во на 2. А пары клеток, которые

несимметричны относ. центрах - мы должны будем делить на 4, т.к. при поворотах получают-ся разные раскраски.

Посчитаем кол-во пар клеток, симметричных относительно центра. Заметим, что таких пар ровно половина от кол-ва клеток, потому что, давайте разобьем наш квадрат на две половины:



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7
☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐

СТРАНИЦА
 ИЗ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$14x + 7y \geq 7(2x + y) \geq 7 \cdot (2 \cdot (-8) + (-8)) =$$

$$= 7(-16 - 8) = -7 \cdot 24 = -168$$

Проверим, что $x = y = -8$ удовлетворяет :

$$(4x - 3y) = 4 \cdot (-8) - 3 \cdot (-8) =$$

$$-14 \leq x + y \leq 8$$

$$-2 \leq x - y \leq 2$$

$$3y \geq 9x - 6 \geq -8 \cdot 4 - 6 = -38$$

$$y \geq \left(-\frac{38}{3} \right)$$

$$4x^2 + x + 5\sqrt{x}$$

$$-6 \leq 3y - 9x$$

$$-8 \leq 3x - 4y$$

$$-8 \leq 3x - 4y$$

$$(5-y)(6+x) =$$

$$= 30 - yx - 6y + 5x$$

$$30 - x - y^2 \quad 6 + \sqrt{5-x} \geq \sqrt{x+6}$$

$$x \in [0; 5]$$

$$a^2 + b^2 \geq 11$$

$$a - b + 5 = 2ab$$

$$a - b$$

$$a^2 + b^2 \geq 2ab$$

$$\sqrt{11} - 0 = \sqrt{11}$$

$$x + 6 + 5 - x \geq 2ab$$

$$11 \geq 2ab$$

$$11 \geq a - b + 5$$

$$6 \geq a - b$$

$$a - b + 5 = 2ab$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$x \geq -8$$

~~$$4x - 3y \geq 6$$~~

~~$$3x - 4y \geq -8$$~~

~~$$-4y \geq -22$$~~

~~$$y \leq 8$$~~

$$\begin{array}{r} 2 \\ 24 \\ \times 7 \\ \hline 168 \end{array}$$

$$\textcircled{-3x \geq -24}$$

$$+ 3x - 4y \leq 8$$

$$+ 3x \geq -24$$
$$+ 4y - 3x \geq -8$$

$$4y \geq -32$$

$$y \geq -8$$

$$x \geq -8$$

~~$$3x \geq -24$$~~



$$14x + 7y$$

$$6x + 5y$$

$$3x + 2y$$

~~$$4x + 3y$$~~

~~$$6x + 5y$$~~

$$4x - 3y \geq -6$$

$$4y - 3x \geq -8$$

~~$$3x - 7y \geq -6$$~~

$$3y - 3x \geq -6$$

$$x \geq -2$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7
☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐

СТРАНИЦА
 ИЗ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$7(2x+y)$$

$$-6 \leq 4x - 3y \leq 6$$

$$-8 \leq 4y - 3x \leq 8$$

$$3y - 6 \leq 4x \leq 3y + 6$$

$$\frac{3}{2}y - 3 \leq 2x \leq \frac{3}{2}y + 3$$

~~23~~

$$A = m^2 - 2mn + n^2 + 9m - 9n$$

$$B = m^2n - mn^2 + 3mn$$

$$A = (m-n)^2 + 9(m-n) = (m-n)(m-n+9)$$

$$B = mn(m-n+3)$$

$$1) \quad (m-n)(m-n+9) = 13p^2$$

$$mn(m-n+3) = 3q^2$$

$$m-n+3=1 \quad m-n=-2$$

$$2) \quad n=1$$

$$m(m-1+3) =$$

$$(m-1)(m-1+9)$$

$$m(m+2) = 13p^2$$

$$(m-1)(m+8) = 3q^2$$

если $m=2$, то (X)

$$m(m+2) = 13p^2 = 13 \cdot 3 \cdot 3$$

$$(m-1)(m+8) = 12 = 3 \cdot 2 \cdot 2 \quad (\otimes)$$

$$13p^2$$

$$3q^2$$

$$m \neq n$$

$$15$$

$$1) \quad m=1$$

$$n(1-n+3)$$

$$(1-n)(1-n+9)$$

$$1-n < 0$$

$$1-n+9 < 0$$

$$n > 10$$

$$1-n+3 < 0$$

$$\otimes$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

1) $m=9$

$$(m-n)(m-n+8) = 12p^2$$

$$n(9-n+3) = 39$$

$$(9-3)(9+6) = 12p^2$$

$q > 3$ $q=16$ X

$$q+6=13$$

$$q=7$$

$$m=7$$

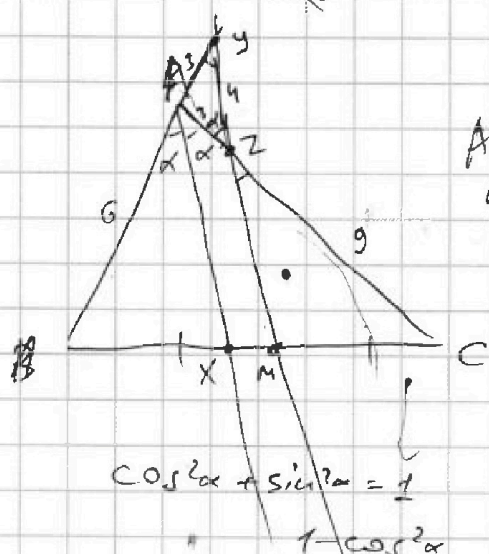
$$n=3$$

$$p=2$$

$$AC=12$$

$$AZ=3$$

$$YZ=4$$



$$\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha = 1$$

$$1 - \cos^2 \alpha$$

$$\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha = \cos^2 \alpha - (1 - \cos^2 \alpha)$$

$$= 2\cos^2 \alpha - 1 =$$

$$= 2 \cdot \frac{4}{9} - 1 = \frac{8}{9} - 1 = -\frac{1}{9}$$

$$= -\frac{1}{9}$$

$$\cos \alpha = \frac{16}{24} = \frac{2}{3}$$

$$X^2 = 6^2 + 9^2 + 2 \cdot 6 \cdot 9 \cdot \left(-\frac{1}{9}\right)$$

$$X^2 = 36 + 81 + 12 = 129$$

$$X = \sqrt{129}$$

$$\frac{13}{52}$$

$$\begin{array}{r} +81 \\ +36 \\ \hline 117 \\ +12 \\ \hline 129 \end{array}$$

$$\triangle ABC : \frac{AX}{XC} = \frac{CZ}{AZ} \cdot \frac{AY}{YB} = 1$$

$$\frac{9}{3} \cdot \frac{3}{3+X} = 1$$

$$X=6$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите **номер страницы** и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1
☐

2
☐

3
☐

4
☐

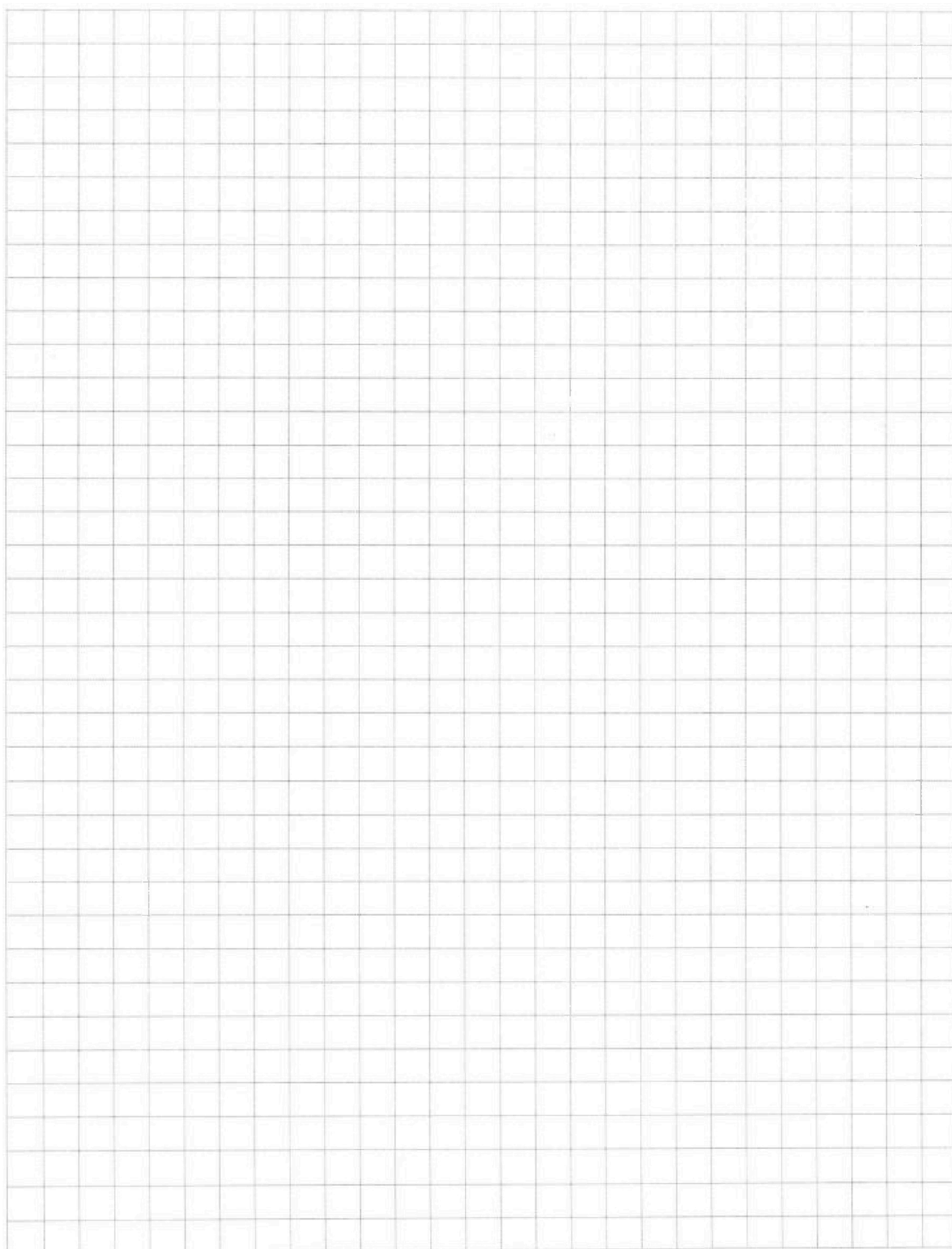
5
☐

6
☐

7
☐

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!



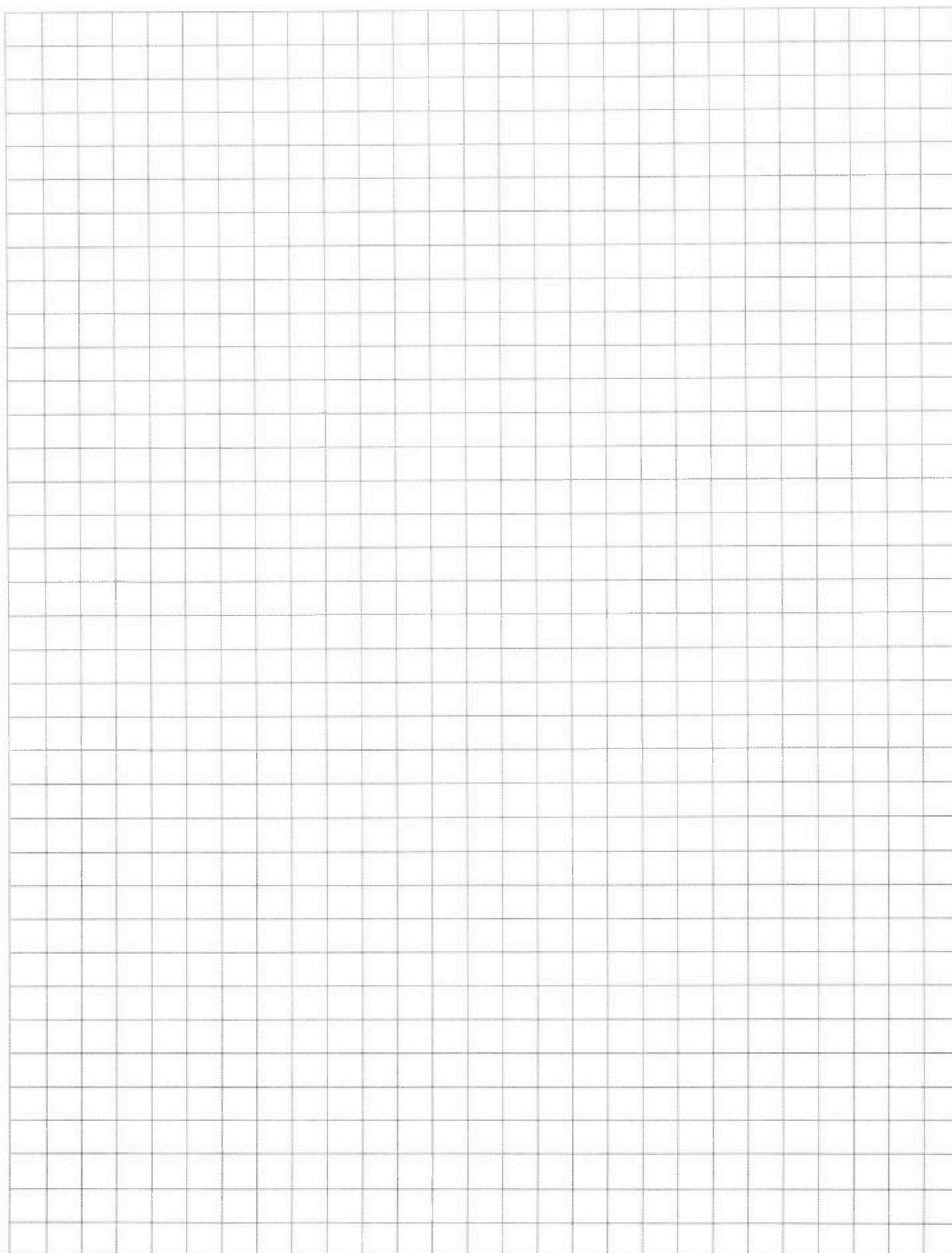


На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



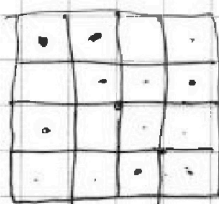
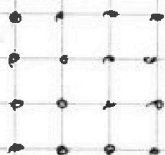


На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

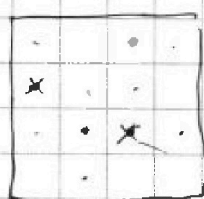
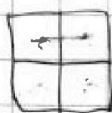
СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



~~2/23~~

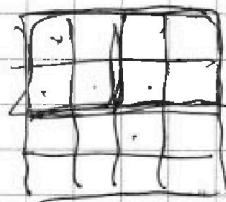
$$3 = \sqrt{2} + 1 = 2 \cdot 3 \cdot \sqrt{2}$$



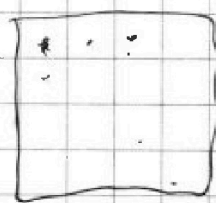
$$8 = 2 \cdot 2$$

(12)

$$\frac{2}{2} + \frac{4}{4} = 2$$



$$\begin{aligned} -6 &\leq -32 - 3y \leq 6 \\ -6 &\leq -3y \leq 38 \\ 26 &\leq -y \leq -12 \\ 100.99 & \\ 2 & \\ 50 & \end{aligned}$$



C_{100}^2

$$7(2x + y)$$

$$-6 \leq 4x - 3y \leq 6$$

$$100 : 4 = 25$$

$$100 : 2 = 50$$

$$-6 \leq 4x - 3y \leq 6$$

$$-8 \leq 3x - 4y \leq 8$$

$$\leq 2x + y \leq$$

$$-6 \leq -32 - 3y \leq 6$$

$$\begin{aligned} & \times 25 \\ & \hline 1250 \end{aligned}$$

$$-6 \leq 3y - 4x$$

$$-14 \leq 7x + 7y$$

$$-6 \leq 4x - 3y$$

$$-2 \leq x - y \leq 2$$

$$-8 \leq 4y - 3x$$

$$-8 \leq 3x - 4y$$

$$-8 \leq 5x - 4y$$

$$-8 \geq -\frac{38}{3} \cdot -8 \leq -24 - 4y \leq 8$$

$$-8 \leq 3x - 4y$$

$$16 \leq -4y \leq 32$$

$$-8 \leq 4y - 3x$$

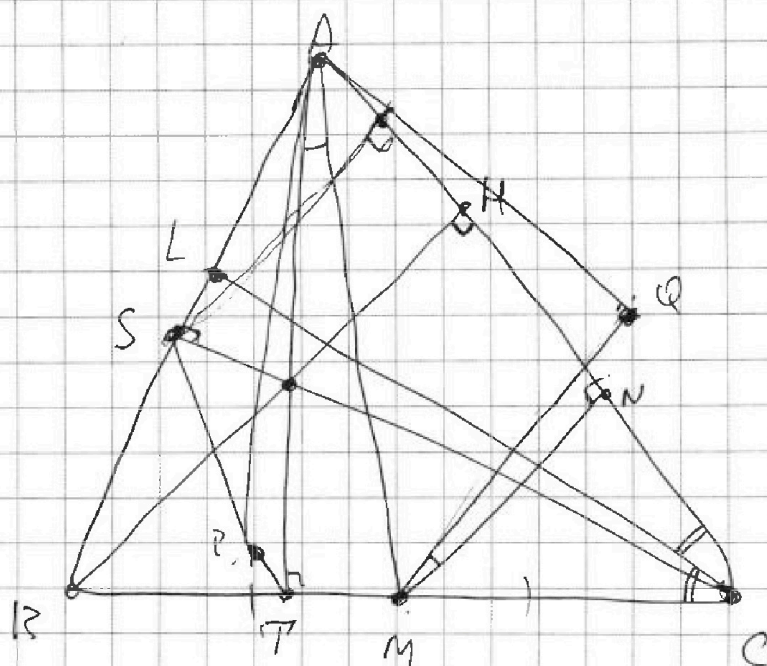
$$-8 \leq y \leq -4 \quad 4 \leq -y \leq 8$$

$$-16 \leq 2x$$

$$-8 \leq x$$



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!





На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1
☐

2
☐

3
☐

4
☐

5
☐

6
☐

7
☐

СТРАНИЦА
из

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$4x^4 + x + 5\sqrt{x} = 4y^4 + y + 5\sqrt{y}$$

$$\sqrt[4]{x} = t$$

$$x = t^4$$

$$x^4 = t^{16}$$

$$4t^{16} + t^4 + 5t = 4m^{16} + m^4 + 5m$$

$$(t-m)(4t^{15} - 4m^{15} + t^3 - m^3 + 5) = 0$$

$$\sqrt{x+6} + \sqrt{5-y} \geq 2\sqrt{5x+90-6y-xy}$$



$$\begin{array}{r} 144 \\ + 36 \\ \hline 180 \end{array} \quad \begin{array}{r} 144 \overline{) 180} \\ \underline{144} \\ 36 \\ \underline{36} \\ 0 \end{array}$$

13 14



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7
☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$a_1 = a, \quad a_2 = a + d$$
$$a_5 = 6x + 18 = a + 4d$$

$$a_7 = (x^2 - 4x)^2 = a + 6d$$

$$a_{11} = -3x^2 = a + 10d$$

$$2 \cdot ((x^2 - 4x)^2 - 6x - 18) = d = -3x^2 - (x^2 - 4x)^2$$

$$2(x^2 - 4x)^2 - 12x - 36 = -3x^2 - (x^2 - 4x)^2$$

$$3(x^2 - 4x)^2 + 3x^2 - 12x - 36 = 0$$

$$(x^2 - 4x)^2 + x^2 - 4x - 12 = 0$$

$$x^2 - 4x = t$$

$$t^2 + t - 12 = 0$$

$$(t - 3)(t + 4) = 0$$

$$\begin{cases} t = 3 \\ t = -4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^2 - 4x - 3 = 0 & (x-1)(x-3) = 0 \\ x^2 - 4x + 4 = 0 & (x-2)^2 = 0 \end{cases}$$

$$a_5 = 12 + 18 = 30$$

$$x = 16 + 12 = 28 = (2\sqrt{7})^2$$

$$a_7 = 16$$

$$a_{11} = -12$$

$$14 \sqrt{-7} \quad \frac{4 \pm 2\sqrt{7}}{2} = 2 \pm \sqrt{7}$$
$$16 - 28 = -12$$
$$\boxed{2}$$

$$a_5 = 6 \cdot 2 + 6\sqrt{7} + 18 = 30 + 6\sqrt{7}$$

$$a_7 = 36 +$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
из

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$14x + 7y = 7(2x + y)$$

$$\begin{cases} |4x - 3y| \leq 6 \\ |3x - 4y| \leq 8 \end{cases}$$

$$-6 \leq 4x - 3y \leq 6$$

$$-8 \leq 3x - 4y \leq 8$$

$$-6 \leq 4x - 3y \leq 6$$

$$-8 \leq 4y - 3x \leq 8$$

$$-14 \leq x + y \leq 14$$

$$3y - 6 \leq 4x \leq 3y + 6$$

$$4y - 8 \leq 3x \leq 4y + 8$$

$$7y - 14 \leq 7x \leq 7y + 14$$

$$-16 \leq 2x \leq 16$$

$$y - 2 \leq x \leq y + 2$$

$$-8 \leq x \leq 8$$

$$-2 \leq x - y \leq 2$$

$$-6 \leq 4x - 3y \leq 6$$

$$-2 \leq y - x \leq 2$$

$$-8 \leq 4y - 3x \leq 8$$

$$-16 \leq 2y \leq 16$$

$$-8 \leq y \leq 8$$

$$x \leq 8$$

$$-14 \leq x - 3y \leq 14$$

$$4x \leq 32$$

$$-8 \leq 4y - 3x \leq 8$$

$$-6 \leq -32 - 3y \leq 6$$

$$32 + 3y \geq 6 \quad 4x - 3y \leq 32 - 3y \leq 6$$

$$32 + 3y \geq 6$$

$$3y \geq -26$$

$$26 = 3y$$

$$y = \frac{26}{3} = 8\frac{2}{3}$$

$$-22 \leq 2x + y \leq 22$$

$$-6 + 16 = -22 \quad -32 + 18$$

⑥

$$6 > 32 + 3y \geq -6$$

$$-26 \geq 3y \geq -38$$

$$-\frac{26}{3} \geq y \geq -\frac{38}{3}$$