



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

10 КЛАСС. Вариант 6



1. [3 балла] Второй член арифметической прогрессии равен $12 - 12x$, четвёртый член равен $(x^2 + 4x)^2$, а восьмой равен $(-6x^2)$. Найдите x .
2. [4 балла] Найдите наименьшее значение выражения $10x + 5y$ при условии

$$\begin{cases} |2x - 3y| \leq 6, \\ |3x - 2y| \leq 4. \end{cases}$$

3. [5 баллов] Найдите все пары (m, n) натуральных чисел, для которых одно из чисел $A = m^2 - 4mn + 4n^2 + 13m - 26n$ и $B = m^2n - 2mn^2 - 2mn$ равно $17p^2$, а другое равно $15q^2$, где p и q — простые числа.
4. [5 баллов] Прямая, параллельная биссектрисе AX треугольника ABC , проходящая через середину M его стороны BC , пересекает сторону AC и продолжение стороны AB в точках Z и Y соответственно. Найдите BC , если $AC = 18$, $AZ = 6$, $YZ = 8$.
5. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \sqrt{x+4} - \sqrt{3-y} + 5 = 2\sqrt{12-x-y^2}, \\ 2x^5 + 4x^2 - \sqrt[3]{3y} = 2y^5 - \sqrt[3]{3x} + 4y^2. \end{cases}$$

6. [4 балла] На тетрадном листе нарисован квадрат 7×7 клеток (стороны квадрата идут вдоль границ клеток), а все узлы сетки внутри квадрата или на его границе покрашены в чёрный цвет. Найдите количество способов перекрасить два узла в белый цвет, если раскраски, получающиеся друг из друга поворотом, считаются одинаковыми.
7. [6 баллов] В треугольнике ABC на медиане AM и биссектрисе CL как на диаметрах построены окружности Ω и ω соответственно, пересекающиеся в точках P и Q . Отрезок PQ параллелен высоте треугольника ABC , проведённой из вершины B . Окружность Ω пересекает сторону AC повторно в точке N . Найдите длины сторон AC и BC , если $AB = 6$, $AN = 5$.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



СТРАНИЦА

1 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Пусть первый член арифм. прогрессии равен a_1 , тогда

второй член $a_2 = a_1 + k$

третий $a_3 = a_1 + 2k$

четвертый $a_4 = a_1 + 3k$

восьмой $a_8 = a_1 + 7k$

Тогда рассмотрим разности данных членов арифметической прогрессии:

$$a_4 - a_2 = a_1 + 3k - (a_1 + k) = 2k$$

$$a_8 - a_4 = a_1 + 7k - (a_1 + 3k) = 4k \Rightarrow$$

$$a_8 - a_2 = a_1 + 7k - (a_1 + k) = 6k$$

$$\Rightarrow 2(a_4 - a_2) = a_8 - a_4; (1)$$

$$\Rightarrow \cancel{3(a_4 - a_2)} = a_8 - a_4; (2)$$

по условию: $a_2 = 12 - 12x$

$$a_4 = (x^2 + 4x)^2$$

$$a_8 = -6x^2$$

Подставим a_2 , a_4 , a_8 в уравнение (1) и решим его:

$$2((x^2 + 4x)^2 - (12 - 12x)) = -6x^2 - (x^2 + 4x)^2$$

$$3(x^2 + 4x)^2 - 2(12 - 12x) + 6x^2 = 0$$

$$3(x^2 + 4x)^2 - 24 + 24x + 6x^2 = 0 \quad | :3$$

$$(x^2 + 4x)^2 + 2x^2 + 8x - 8 = 0$$

$$(x^2 + 4x)^2 + 2(x^2 + 4x) - 8 = 0$$

Заменим: $x^2 + 4x = t$

$$t^2 + 2t - 8 = 0$$

$$D = 4 + 4 \cdot 8 = 36$$

$$t_1 = \frac{-2 + 6}{2} = 2$$

$$t_2 = \frac{-2 - 6}{2} = -4$$

1) при $t = 2$:

$$x^2 + 4x = 2$$

$$x^2 + 4x - 2 = 0$$

$$D = 16 + 4 \cdot 2 = 24$$

$$x_1 = \frac{-4 + \sqrt{24}}{2} = -2 + \sqrt{6}$$

$$x_2 = -2 - \sqrt{6}$$

а) при $x = -2 + \sqrt{6}$:

$$a_2 = 12 - 12(-2 + \sqrt{6}) = 12 + 24 - 12\sqrt{6} = 36 - 12\sqrt{6}$$

$$a_4 = 4$$

$$a_8 = -6(-2 + \sqrt{6})^2 = -6(4 - 4\sqrt{6} + 6) = -6(10 - 4\sqrt{6}) = -60 + 24\sqrt{6}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☒ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА

2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Подставим a_2, a_4 и a_8 в уравнение (2):

$$3(4 - 36 + 12\sqrt{6}) = -60 + 24\sqrt{6}$$

$$-96 + 12\sqrt{6} = -60 + 24\sqrt{6}$$

$$12\sqrt{6} = -36$$

$$\text{Противоречие} \Rightarrow x \neq -2 + \sqrt{6}$$

1) при $x = -2 - \sqrt{6}$

$$a_2 = 12 - 12(-2 - \sqrt{6}) = 12 + 24 + 12\sqrt{6} = 36 + 12\sqrt{6}$$

$$a_4 = 4$$

$$a_8 = -6(-2 - \sqrt{6})^2 = -6(2 + \sqrt{6})^2 =$$

$$= -6(4 + 6 + 4\sqrt{6}) = -60 - 4\sqrt{6}$$

Подставим a_2, a_4 и a_8 в уравнение (2):

$$3(4 - 36 - 12\sqrt{6}) = -60 - 4\sqrt{6}$$

$$-96 - 36\sqrt{6} = -60 - 4\sqrt{6}$$

$$\text{Противоречие} \Rightarrow x \neq -2 - \sqrt{6}$$

2) при $t = -4$:

$$x^2 + 4x = -4$$

$$x^2 + 4x + 4 = 0$$

$$(x + 2)^2 = 0$$

$$x = -2$$

при $x = -2$:

$$a_2 = 12 - 12 \cdot (-2) = 12 + 24 = 36$$

$$a_4 = (2^2 + 4(-2))^2 = (4 - 8)^2 = 16$$

$$a_8 = -6 \cdot 2^2 = -6 \cdot 4 = -24$$

Подставим a_2, a_4 и a_8 в ур-е (2):

$$3(16 - 36) = -24 - 36$$

$$3(-20) = -60$$

$$-60 = -60$$

Значит $x = -2$ подходит

Ответ: $x = -2$.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☒ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА

1 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$A = m^2 - 4mn + 4n^2 + 13m - 26n = (m - 2n)^2 + 13(m - 2n) =$$

$$= (m - 2n)(m - 2n + 13)$$

$$B = m^2n - 2mn^2 - 2mn = mn(m - 2n - 2)$$

$$A = (m - 2n)(m - 2n + 13) \Rightarrow \text{разность наших-то двух делителей числа } A \text{ равна } m - 2n + 13 - m + 2n = 13$$

① Рассмотрим случай, когда $A = 17p^2$. Тогда рассмотрим все возможные разности делителей числа A и попробуем приравнять их к 13 — необходимой нам разности.

а) $17p^2 - p = 13$
 $17p^2 = 14$
 $p \notin \mathbb{Z} \Rightarrow$
 не подходит

б) $17p - p = 13$
 $16p = 13$
 $p \notin \mathbb{Z}$
 не подходит

в) $17 - p^2 = 13$
 $p^2 = 4$
 $p = 2$ — подходит
 $p = -2$ — не у-т усло-
 вию, т.к. p — простое,
 натуральное число

г) $p^2 - 17 = 13$
 $p^2 = 30$
 $p \notin \mathbb{Z}$
 не подходит

д) $p - 17p = 13$
 $-16p = 13$
 $p \notin \mathbb{Z}$
 не подходит

е) $1 - 17p^2 = 13$
 $17p^2 = -12$
 $p \in \emptyset$
 не подходит

Таким образом, нам подходит вариант, когда больший делитель числа A равен 17, а меньший равен $p^2 = 2^2 = 4$, т.е.

$$m - 2n = 4 \quad m - 2n + 13 = 17$$

$$\boxed{m = 2n + 4}$$

$$\text{Тогда } B = mn(m - 2n - 2) = (2n + 4)n(2n + 4 - 2n - 2) =$$

$$= (2n + 4) \cdot 2n = 4n^2 + 8n = 4n(n + 2) = 15q^2$$

$$\text{т.к. } q \text{ — простое} \Rightarrow q^2 = 4 \Rightarrow q = 2$$

$$q = -2 \text{ — не у-т усл.}$$

$$n(n + 2) = 15$$

$$n^2 + 2n - 15 = 0$$

$$D = 4 + 60 = 64$$

$$n_1 = \frac{-2 + 8}{2} = 3$$

$$n_2 = \frac{-2 - 8}{2} = -5$$

$$\Rightarrow m = 2 \cdot 3 + 4 = 10 \Rightarrow \boxed{\begin{matrix} m = 10 \\ n = 3 \end{matrix}}$$

Продолжим на след. странице.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



СТРАНИЦА

2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

② Рассмотрим случай, когда $A = 15q^2$. Тогда рассмотрим все возможные разности делителей числа A и проверим, удовлетворяют ли 13 — необходимая или разности:

а) $15q^2 - 1 = 13$

$$15q^2 = 14$$

$$q^2 \notin \mathbb{Z}$$

не подходит

б) $5q^2 - 3 = 13$

$$5q^2 = 16$$

$$q^2 \notin \mathbb{Z}$$

не подходит

в) $3q^2 - 5 = 13$

$$3q^2 = 18$$

$$q^2 = 6$$

$$q \notin \mathbb{Z}$$

не подходит

г) $q^2 - 15 = 13$

$$q^2 = 28$$

$$q \notin \mathbb{Z}$$

не подходит

д) $5q - 3q = 13$

$$2q = 13$$

$$q \notin \mathbb{Z}$$

не подходит

е) ~~$15q - q = 13$~~

$$14q = 13$$

$$q \notin \mathbb{Z}$$

не подходит

ж) $1 - 15q^2 = 13$

$$15q^2 = -12$$

$$q \notin \mathbb{Z}$$

не подходит

з) $3 - 5q^2 = 13$

$$5q^2 = -10$$

$$q^2 = -2$$

$$q \notin \mathbb{Z}$$

не подх.

и) $5 - 3q^2 = 13$

$$3q^2 = -8$$

$$q \notin \mathbb{Z}$$

не подх.

к) $15 - q^2 = 13$

$$q^2 = 2$$

$$q \notin \mathbb{Z}$$

не подходит

л) $3q - 5q = 13$

$$-2q = 13$$

$$q \notin \mathbb{Z}$$

не подх.

м) $q - 15q = 13$

$$-14q = 13$$

$$q \notin \mathbb{Z}$$

не подх.

Таким образом, A не может быть равно $15q^2$.
Значит единственной подходящей парой чисел
(m, n) является пара (10, 3)

Ответ: (10, 3)



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА

1 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Дано:

$\triangle ABC$

AX — бисс.

MY — середина BC

прямая $a \parallel AX$

$T \in a$

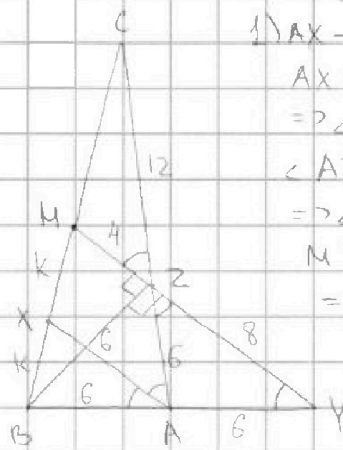
$a \cap AC = T$

$a \cap AB = T$

$AC = 18$

$AZ = 6$

$YZ = 8$



Решение:

$$1) AX - \text{бисс.} \Rightarrow \angle BAX = \angle XAZ$$

$$AX \parallel MY, AC - \text{сечение} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \angle XAZ = \angle YZA$$

$$\angle AZY \text{ и } \angle MZC - \text{верт.} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \angle AZY = \angle MZC$$

$$MY \parallel AX, BY - \text{сечение} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \angle ZYA = \angle XAB \text{ (свтв.)}$$

Тогда имеем:

$$\angle BAX = \angle XAZ = \angle AZY =$$

$$\angle MZC = \angle ZYA$$

$$2) \text{ ~~Рассм. } \triangle ACZ~~ AC = 18, AZ = 6 \Rightarrow CZ = AC - AZ = 12$$

$BC = ?$

4) Рассм. $\triangle AZY$:

$$\angle AZY = \angle ZYA \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \triangle AZY - \text{р/д} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow AY = AZ = 6$$

3) Рассм. $\triangle CZM$ и $\triangle CAX$:

$$\angle CZM = \angle CAX \text{ (по 1))}$$

$$\angle C - \text{общий}$$

$$\Rightarrow \frac{MC}{XC} = \frac{CZ}{CA} = \frac{MZ}{XA} = \frac{12}{18} = \frac{2}{3} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{MC}{XC} = \frac{2}{3} \Rightarrow XC = \frac{3}{2} MC$$

$$\Rightarrow \frac{MZ}{XA} = \frac{2}{3} \Rightarrow XA = \frac{3}{2} MZ$$

5) Рассм. $\triangle MYB$ и $\triangle XAB$.

$$\angle MYB = \angle XAB \text{ (по 1))}$$

$$\angle B - \text{общий}$$

$$\Rightarrow \frac{MY}{XA} = \frac{YB}{AB} = \frac{MB}{XB} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{MZ + 8}{\frac{3}{2} MZ} = \frac{6 + AB}{AB} = \frac{MC}{2MC - XC} = \frac{MC}{2MC - \frac{3}{2} MC} = \frac{MC}{\frac{1}{2} MC} = 2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{MZ + 8}{\frac{3}{2} MZ} = 2 \Rightarrow MZ + 8 = 3MZ \Rightarrow MZ = 4 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow MY = MZ + ZY = 4 + 8 = 12 \Rightarrow \frac{12}{XA} = 2 \Rightarrow XA = 6$$

$$\Rightarrow \frac{6 + AB}{AB} = 2 \Rightarrow AB = 6$$

Продолжение на след. странице



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



СТРАНИЦА

2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\frac{MB}{XB} = 2 \Rightarrow MB = 2XB = XM + XB \Rightarrow XM = XB$$

~~Рассм. $XM = XB = a$~~

Обозначим $XM = XB = k \Rightarrow MB = 2k \Rightarrow BC = 2MB = 4k$

6) Рассм. $\triangle BZY$ — вписан в окр-ть с центром в т. А, с радиусом $BA = ZA = YA \Rightarrow BY$ — диаметр $\Rightarrow \triangle BZY$ — п/у, $\angle BZY = 90^\circ$ (тк треугольник, описанный на диаметр описанной окружности — прямоугольный).

$$7) \angle MZB = 180^\circ - \angle BZY = 180^\circ - 90^\circ = 90^\circ$$

8) Рассм. $\triangle BZY$ — п/у. По т.-ме Пифагора:

$$BZ = \sqrt{BY^2 - ZY^2} = \sqrt{12^2 - 8^2} = \sqrt{144 - 64} = \sqrt{80}$$

9) Рассм. $\triangle BZM$ — п/у. По т.-ме Пифагора:

$$BM = \sqrt{MZ^2 + BZ^2} = \sqrt{6^2 + 80} = \sqrt{96} = 4\sqrt{6} = 2k \Rightarrow k = 2\sqrt{6} \Rightarrow BC = 4k = 4 \cdot 2\sqrt{6} = 8\sqrt{6}$$

Ответ: $BC = 8\sqrt{6}$

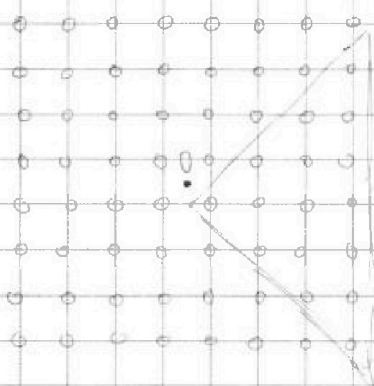


На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☒ 7 ☐

СТРАНИЦА
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



Количество способов выбрать 2 узла (без учета поворотов) равно $C_{380}^2 = C_{64}^2 = \frac{64!}{2! \cdot (64-2)!} = \frac{63 \cdot 64}{2} = 63 \cdot 32$.

Рассмотрим прицельным, отмеченный на рисунке для всех узлов, находящихся внутри него. Можно найти ~~один~~ узел, симметричный данному относительно т.О - центра квадрата. Раскрыв 2 такие точки мы получим

радиусу, которая через 2 поворота переходит в себя ~~и~~. Значит она была учтена 2 раза. Всего пар точек, учтенных два раза будет 16. Остальные пары будут учтены по 4 раза. $63 \cdot 32 - 16 \cdot 2 = 62 \cdot 32$ - число пар точек, учтенных 4 раза, умноженное на 4. Тогда, если все умножить на 4, получим

$$\frac{62 \cdot 32}{4} + 16 = 62 \cdot 8 + 8 \cdot 2 = 8 \cdot 64 = 8^3 = 512$$

Ответ: $8^3 = 512$

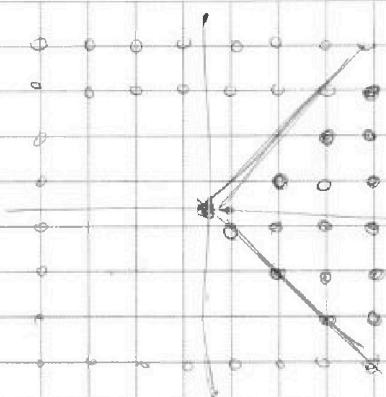


На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

СТРАНИЦА
из

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



16 пар точек можно
6 точек, где 11
можно выбрать
каждую точку,
зачит. 2 раз.

Остаток 4 раз.
Всего 84 комбинаций.
$$\frac{63 \cdot 64}{2} = 32 \cdot 63$$

~~Всего 32~~

~~Учитываю 2 раз.~~

$$\begin{aligned} & 16 = 32 \\ & 32 \cdot 63 - 32 = \\ & = 32 \cdot 62 - \text{учтено} \\ & \Rightarrow \sqrt{8 \cdot 62 + 16} = \\ & = 8 \cdot 62 + 8 \cdot 2 = \\ & = 8 \cdot 64 = 8^3 \end{aligned}$$

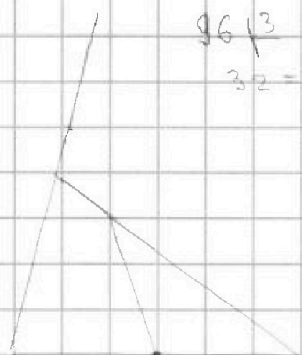


На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

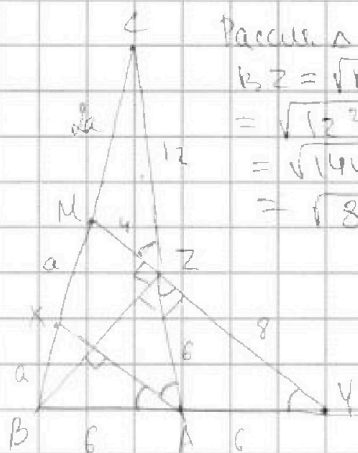
СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



$$96 \sqrt{3}$$

$$32 = 4^2 \cdot 2$$



Рассуж. $\triangle BZY$ - n/y.

$$BZ = \sqrt{BY^2 - YZ^2} =$$

$$= \sqrt{12^2 - 8^2} =$$

$$= \sqrt{144 - 64} =$$

$$= \sqrt{80}$$

~~$\sqrt{10} < \sqrt{16} < \sqrt{25}$~~

$$2,4 < \sqrt{16} < 2,5$$

$$2,5 \cdot 2 = 5 \cdot 2 = 10 \cdot 4 = 14 > 12 \sqrt{6}$$

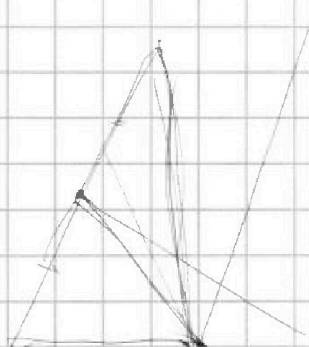
Рассуж. $\triangle BMZ$ - n/y.

$$BM = \sqrt{BZ^2 + MZ^2} =$$

$$= \sqrt{80 + 16} = \sqrt{96} =$$

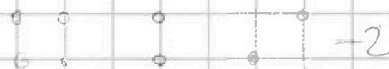
$$= 4\sqrt{6} \Rightarrow a = 2\sqrt{6} =$$

$$\Rightarrow BC = 4a = 4 \cdot 2\sqrt{6} = 8\sqrt{6}$$

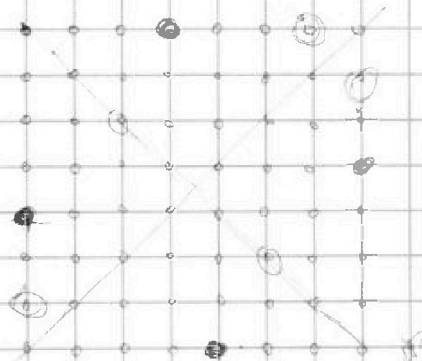


$$8 \cdot 2,5 = 4 \cdot 5 = 20 \sqrt{2}$$

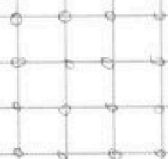
$$C_4 = \frac{4!}{2! \cdot 2!} = \frac{24}{2} = 12$$



Кол-во ~~напр.~~ пос-
читаем ~~по~~ факт.



точки на
гран 22
точки на не
гран 4



$$C_2^{16} = \frac{16!}{2! \cdot 14!} = \frac{15 \cdot 16}{2} = 15 \cdot 8 = 30 \cdot 4 = 120$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
из

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\sqrt{x+4} - \sqrt{3-y} + 5 = 2\sqrt{12-x-y}$$

$$(x+4)(3-y) = 3x+12-xy-4y$$

$$A = m^2 - 4mn + 4n^2 + 13m - 26n =$$

$$= (m-2n)^2 + 13(m-2n) =$$

$$= \underbrace{(m-2n)}_{\text{неч.}} \underbrace{(m-2n+13)}_{\text{неч.}} \Rightarrow \text{делится одновременно на } (13)$$

$$B = m^2n - 2mn^2 - 2mn =$$

$$= mn(m-2n-2) \Rightarrow m, n - \text{нечетные}$$

Рассмотрим число B: при $B = 17p^2$, $A = 15q^2$
его делители: $m, n, (m-2n-2)$

$$(1) m = 17$$

$$n = (m-2n-2)$$

$$(1) \text{ при } B = 17p^2 - \text{нечетное, } p \neq 2$$

$$A - \text{целое} \Rightarrow A = 15q^2 = 15 \cdot 2^2 = 15 \cdot 4 = 60$$

$$(m-2n)(m-2n+13) = 60$$

$$\begin{cases} m-2n = 15 \\ m-2n+13 = 4 \end{cases} \Rightarrow$$

Замечая, что разность чисел A делится на (13)

$$(1) \text{ при } B - \text{нечетное } m, n - \text{нечетные} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow m-2n - \text{неч.}; m-2n+13 - \text{нечетное}$$

$$a) \text{ при } B = 17p^2:$$

$$A = 15p^2 = 15p^2$$

$$(2) \text{ при } B - \text{нечетное}$$

$$(1) \text{ при } m - \text{нечетное}$$

$$17 \text{ и } p^2$$

$$p^2 - 17 = 13$$

$$p^2 = 13 + 17$$

$$p^2 = 30$$

$$p \notin \mathbb{Z}$$

$$p \quad p \quad 17$$

$$17 - p^2 = 13$$

$$p^2 = 4$$

$$p = 2$$

$$\text{при } A = 17p^2:$$

$$17p - p = 13$$

$$16p = 13$$

$$p \notin \mathbb{Z}$$

$$17p^2 - 1 = 13$$

$$17p^2 = 14$$

$$p \notin \mathbb{Z}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1
☐2
☐3
☐4
☐5
☐6
☐7
☐СТРАНИЦА
из

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$(14) a_1 = 12 - 12x$$

$$a_4 = (x^2 + 4x)^2$$

$$a_8 = (-6x^2)$$

$$a_4 - a_2 = 2k$$

$$a_8 - a_4 = 4k$$

$$a_8 - a_2 = 6k$$

$$2(a_4 - a_2) = (a_8 - a_4)$$

$$2((x^2 + 4x)^2 - 12 + 12x) = (-6x^2) - 12 + 12x$$

$$2(x^2 + 4x)^2 - 24 + 24x = -6x^2 - 12 + 12x$$

$$2(x^2 + 4x)^2 - 24 + 24x + 6x^2 + 12 - 12x = 0$$

$$2(x^2 + 4x)^2 + 6x^2 + 12x - 12 = 0 \quad | :2$$

$$(x^2 + 4x)^2 + 3x^2 + 6x - 12 = 0$$

$$(x^2 + 4x)^2 + 3(x^2 + 2x + 1) - 15 = 0$$

$$(x^2 + 4x)^2 + 3(x + 1)^2 - 15 = 0$$

$$x^4 + 8x^3 + 16x^2 + 3x^2 + 6x - 12 = 0$$

$$x^4 + 8x^3 + 19x^2 + 6x - 12 = 0$$

$$\text{Привести к нулю}$$

$$2a_4 - 2a_2 = a_8 - a_4$$

$$3a_4 - 2a_2 = a_8$$

$$3(x^2 + 4x)^2 - 2(12 - 12x) = -6x^2$$

$$3(x^2 + 4x)^2 - 24 + 24x + 6x^2 = 0 \quad | :3$$

$$(x^2 + 4x)^2 + 2x^2 + 8x - 8 = 0$$

$$(x^2 + 4x)^2 + 2(x^2 + 4x - 4) = 0$$

$$(x^2 + 4x)^2 + 2(x^2 + 4x) - 8 = 0$$

$$\text{Заменим } x^2 + 4x = t$$

$$t^2 + 2t - 8 = 0$$

$$D = 4 + 4 \cdot 8 = 36$$

$$t_1 = \frac{-2 + 6}{2} = 2$$

$$t_2 = \frac{-2 - 6}{2} = -4$$

$$1) \text{ При } t = 2:$$

$$x^2 + 4x = 2 \Rightarrow x^2 + 4x - 2 = 0$$

$$x = \frac{-4 \pm \sqrt{16 + 8}}{2}$$

$$x = \frac{-4 \pm \sqrt{24}}{2} = \frac{-4 \pm 2\sqrt{6}}{2}$$

$$D = 16 + 4 \cdot 2 = 24$$

$$x_1 = \frac{-4 + 2\sqrt{6}}{2} = -2 + \sqrt{6}$$

$$x_2 = \frac{-4 - 2\sqrt{6}}{2} = -2 - \sqrt{6}$$

$$a_2 = a_1 + k$$

$$a_4 = a_2 + 2k = a_1 + 3k$$

$$a_8 = a_4 + 4k = a_1 + 7k$$

$$\Rightarrow 2(a_4 - a_2) = (a_8 - a_4)$$

$$(-2)$$

$$a_1 = 12 + 24 = 36$$

$$a_4 = (4 - 8)^2 = 16$$

$$a_8 = 16 \cdot (-2)^2 = -24$$

$$a_4 - a_1 = -20$$

$$a_8 - a_4 = -24 - 16 = -40$$

$$a_8 - a_2 = -24 - 36 = -60$$

(V)

$$a_4 - a_1 = 16 - 36 = -20$$

$$= 4 - 12 - 24 + 12\sqrt{6} =$$

$$= 12\sqrt{6} - 32 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow k = 6\sqrt{6} - 16$$

$$2) \text{ При } t = -4:$$

$$x^2 + 4x = -4$$

$$x^2 + 4x + 4 = 0$$

$$D = 16 - 4 \cdot 4 = 0$$

$$x_1 = \frac{-4}{2} = -2$$

$$a_4 - a_1 = 16 - 36 = -20$$

$$= -6(4 - 4\sqrt{6} + 6) =$$

$$= -6(-4\sqrt{6} + 10) = 24\sqrt{6} - 60 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow k = 4\sqrt{6} - 10$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
ИЗ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

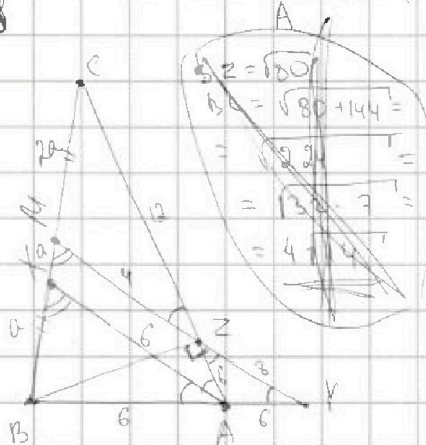
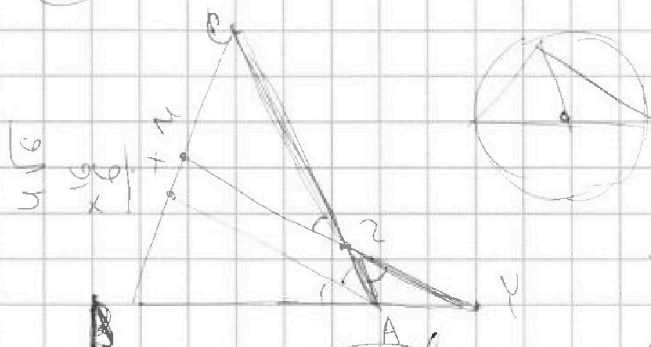
Решим $10x + 4y$
 $\begin{cases} 12x - 3y \leq 6 \\ 13x - 2y \leq 4 \end{cases}$

① при $2x - 3y < 0, x, y \in \mathbb{R}$

② при $3x - 2y < 0$

$$\begin{cases} 12x - 3y < 0 \cdot 3 \\ 13x - 2y < 0 \cdot 2 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 6x - 3y < 0 \\ 6x - 4y < 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} -9y + 4y < 0 \\ 6x - 4y < 0 \end{cases}$$
$$\begin{cases} -5y < 0 \\ 6x - 4y < 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} y < 0 \\ y < 0 \end{cases}$$

③ $A = m^2 - 4mn + 4n^2 + 13m - 26n$



$\angle Z = 180^\circ$
 $AC = \sqrt{80 + 144} = \sqrt{224} = 14\sqrt{2}$
 $\angle Z = 130^\circ$
 $\angle Z = 47.4^\circ$

$\triangle MCZ \sim \triangle XCA$

$$\frac{MC}{XC} = \frac{CZ}{CA} = \frac{MZ}{XA} = \frac{12}{18} = \frac{2}{3}$$

$\triangle MYB \sim \triangle XAB$

$$\frac{MY}{XA} = \frac{YB}{AB} = \frac{MB}{XB}$$

$$\frac{MB}{XB} = 2 \Rightarrow MB = 2XB = MZ + 8 = 2Q$$
$$\frac{3}{2} MZ = \frac{6 + AB}{AB} = \frac{MC}{2MC - XC} = 2$$

$$\frac{6 + AB}{AB} = 2$$

$$2AB = 6 + AB$$
$$AB = 6$$

$$\frac{MZ + 8}{\frac{3}{2} MZ} = 2$$

$$3MZ = MZ + 8$$

$$2MZ = 8$$

$$MZ = 4$$

$$\frac{12}{XA} = 2$$
$$XA = 6$$

$$\frac{MC}{2MC - \frac{3}{2} MC} = \frac{MC}{\frac{1}{2} MC} = 2$$

$\triangle BZY \in \text{сир-ми с центром в т. } A, \in \mathbb{R}$
 $\Rightarrow R = 6 \Rightarrow ABZY - \text{н/ч} = 5$
 $\Rightarrow BZ^2 = 12^2 - 6^2 = 144 - 36 = 108$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1
☐

2
☐

3
☐

4
☐

5
☐

6
☐

7
☐

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

при $p=2$ $A = 17 \cdot 2^2 = 17 \cdot 4$

$(m-2n)(m-2n+13) = 17 \cdot 4$

$m-2n+13 = 17$

~~$4 \cdot 17 = 68$~~

$m-2n = 4$

~~$m-2n+13 = 17$~~

$m = 2n + 4$

$B = mn(m-2n-2) = (2n+4)n(2n+4-2n-2) =$

$= (2n+4) \cdot 2n$

$B = 2(n+2) \cdot 2n = 4n(n+2) = 15q^2$

$q^2 = 4 \Rightarrow q = 2$

$n(n+2) = 15$

$n^2 + 2n - 15 = 0$

$D = 4 + 4 \cdot 15 = 64$

$n_1 = \frac{-2 + 8}{2} = 3$

$n_2 = \frac{-2 - 8}{2} = -5$ не у нас

Ответ:

$m = 2 \cdot 3 + 4 = 10$
 $n = 3$

при $A = 15q^2 = 15q^2 \cdot 1 = 5q^2 \cdot 3 = 3q^2 \cdot 5 = 15 \cdot q^2 =$

~~$15q^2$~~ $= 5q \cdot 3q = 15q \cdot q$

$15q^2 - 1 = 13$
 $q \notin \mathbb{Z}$

$q^2 - 15 = 13$
 $q^2 = 28$
 $q \notin \mathbb{Z}$

Нет решений

$5q^2 - 3 = 13$
 $5q^2 = 16$
 $q \notin \mathbb{Z}$

$5q \cdot 3q = 13$
 $15q^2 = 13$
 $q \notin \mathbb{Z}$

Нет решений

$3q^2 - 5 = 13$
 $3q^2 = 18$
 $q^2 = 6$
 $q \notin \mathbb{Z}$

$15q - q = 13$
 $14q = 13$
 $q \notin \mathbb{Z}$

Нет решений

$15 - q^2 = 13$
 $q^2 = 2$
 $q \notin \mathbb{Z}$

$q^2 = 2$
 $q \notin \mathbb{Z}$

Нет решений

при $m=10$
 $n=3$

$A = 100 - 180 + 36 + 130 - 26 \cdot 3 =$
 $= 260 - 198 = 62 = 4 \cdot 17$

$B = 100 - 180 - 60 = 60 = 15 \cdot 4$

⑤



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$|2x - 3y| \leq 6 \quad \text{касается} \quad 10x + 5y = ?$$

$$|3x - 2y| \leq 4$$

$$\textcircled{1} \text{ при } 2x - 3y < 0 \quad \begin{aligned} 2x &< 3y \\ x &< \frac{3}{2}y \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} -(2x - 3y) &\leq 6 \\ 2x - 3y &\geq -6 \\ 3y + 6 &\leq 2x \end{aligned}$$

$$\begin{cases} |2x - 3y| \leq 6 \\ |3x - 2y| \leq 4 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} (2x - 3y)(3x - 2y) &\leq 24 \\ 6x^2 - 9xy - 4xy - 6y^2 &\leq 24 \\ 6x^2 - 13xy - 6y^2 &\leq 24 \end{aligned}$$

$$10x + 5y = \text{касается} \quad \text{при } x = \text{касается}, \quad y = \text{касается}$$

$$2x \leq 6$$

$$3x \leq 4 \Rightarrow x \leq \frac{4}{3} \Rightarrow 10x + 5y = 10 \cdot \frac{4}{3} + 0 = \frac{40}{3}$$

$$\begin{cases} |2x - 3| \leq 6 \\ |3x + 2| \leq 4 \end{cases}$$

$$2x - 3y \leq 6 \quad | \cdot 3 \quad -$$

$$6x - 9y \leq 18$$

$$3x - 2y \leq 4 \quad | \cdot 2 \quad -$$

$$6x - 8y \leq 8$$

$$-9y + 8y \leq 10$$

$$-y \leq 10$$

$$(y \geq 10) \Rightarrow y \neq 10$$

$$4x - 6y \leq 12$$

$$9x - 6y \leq 12$$

$$4x - 9x \leq 0$$

$$-5x \leq 0$$

$$x \geq 0$$

$$x = 0 \quad y = 10$$