



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

10 КЛАСС. Вариант 5



1. [3 балла] Третий член арифметической прогрессии равен $3x + 3$, пятый член равен $(x^2 + 2x)^2$, а девятый равен $3x^2$. Найдите x .
2. [4 балла] Найдите наибольшее значение выражения $4y + 8x$ при условии

$$\begin{cases} |x - 3y| \leq 3, \\ |3x - y| \leq 1. \end{cases}$$

3. [5 баллов] Найдите все пары (m, n) натуральных чисел, для которых одно из чисел $A = m^2 + 2mn + n^2 - 9m - 9n$ и $B = m^2n + mn^2 - 3mn$ равно $13p^2$, а другое равно $75q^2$, где p и q – простые числа.
4. [5 баллов] Прямая, параллельная биссектрисе AX треугольника ABC , проходящая через середину M его стороны BC , пересекает сторону AB и продолжение стороны AC в точках Z и Y соответственно. Найдите BC , если $AC = 18$, $AZ = 6$, $YZ = 8$.
5. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \sqrt{x+1} - \sqrt{6-y} + 5 = 2\sqrt{6+5x-y^2}, \\ x^4 + 5x^2 - \sqrt{y} = y^4 - \sqrt{x} + 5y^2. \end{cases}$$

6. [4 балла] На тетрадном листе нарисован квадрат 8×8 клеток (стороны квадрата идут вдоль границ клеток), а все узлы сетки внутри квадрата или на его границе покрашены в чёрный цвет. Найдите количество способов перекрасить два узла в белый цвет, если раскраски, получающиеся друг из друга поворотом, считаются одинаковыми.
7. [6 баллов] В треугольнике ABC на медиане AM и биссектрисе CL как на диаметрах построены окружности Ω и ω соответственно, пересекающиеся в точках P и Q . Отрезок PQ параллелен высоте треугольника ABC , проведённой из вершины B . Окружность Ω пересекает сторону AC повторно в точке N . Найдите длины сторон AC и BC , если $AB = 10$, $AN = 8$.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
☒	☐	☐	☐	☐	☐	☐

СТРАНИЦА

1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Каждый член арифметической прогрессии представляется

$$так, a_n = a_1 + (n-1)d.$$

Выразим d через a_3, a_5 и a_7, a_9

$$a_5 - a_3 = 2d \Rightarrow a_5 - a_3 = 2d \Leftrightarrow d = \frac{(x^2+2x)^2 - 3x-3}{2}$$

$$a_9 - a_7 = 2d \Rightarrow a_9 - a_7 = 2d \Leftrightarrow d = \frac{3x^2 - (x^2+2x)^2}{4}$$

Приравняем d -ы.

$$\frac{(x^2+2x)^2 - 3x-3}{2} = \frac{3x^2 - (x^2+2x)^2}{4}$$

$$2((x^2+2x)^2 - 3x-3) = 3x^2 - (x^2+2x)^2$$

$$8(x^2+2x)^2 - 6x-6 - 3x^2 = 0$$

$$3x^4 + 12x^3 + 12x^2 - 6x - 6 - 3x^2 = 0$$

$$3(x^4 + 4x^3 + 3x^2) - 6(x+1) = 0$$

$$3x^2(x+1)(x+3) - 6(x+1) = 0$$

$$(3x^2(x+3) - 6)(x+1) = 0$$

$$x+1 \neq 0$$

$$3x^3 + 9x^2 - 6 = 0$$

корни $x = -1$

$$x = -1$$

$$3(x+1)(x^2+2x-2) = 0$$

корни $x = \frac{-2 \pm \sqrt{12}}{2}$

$$x = -1$$

$$x = -1; \frac{-2 + \sqrt{12}}{2}; \frac{-2 - \sqrt{12}}{2}$$

$$\text{Ответ: } x = -1, x = \frac{-2 + \sqrt{12}}{2}; x = \frac{-2 - \sqrt{12}}{2}$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

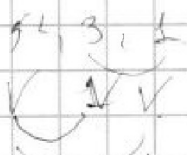


1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
из

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{cases} |x-3y| \leq 3 \\ |3x-y| \leq 1 \end{cases}$$



$$18^2 + 30^2$$

$$6^2(3^2 + 5^2) = 6^2 \cdot 2 \cdot 14$$

$$|x-3y| \leq 3$$

$$|3x-y| \leq 1$$

$$4x-4y \leq 4$$

$$0.5x-y \leq 1$$

$$A = m^2 + (m+n)^2 - g(m+n)$$

$$A = (m+n-g)(m+n) = 136^2$$

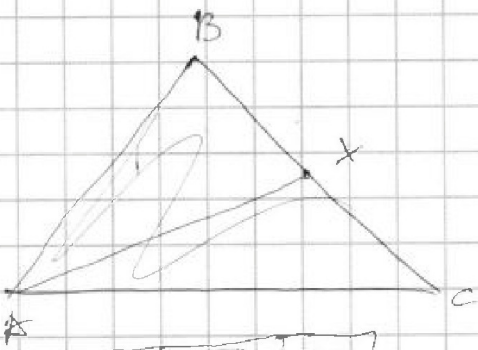
$$B = mn(n+m-3) = 959^2$$

$$45 \cdot 4 = 180 \cdot 2$$

$$2.5 \cdot 40$$

$$45 \cdot 9$$

$$(1-0.96)^2$$



$$a^2 + b^2 + 5 \cdot 2\sqrt{1^2 + 16^2 + 36} - 35$$

$$6^2 + 6^2 - 2 \cdot 6 \cdot 6$$

$$a - 6 + 5 = 2\sqrt{1^2 + 16^2 + 36} - 35$$

$$\sqrt{6+5x-y^2} = \sqrt{-42+24+56-35}$$

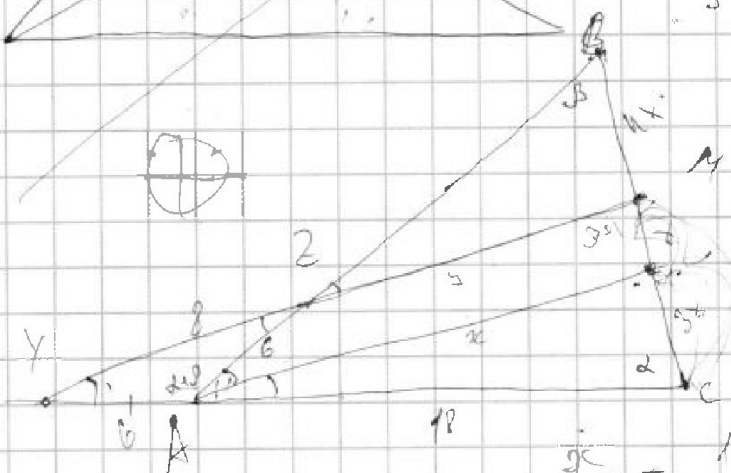
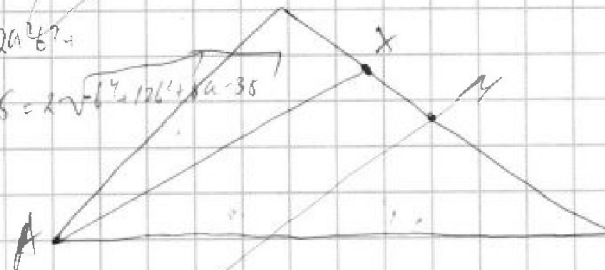
$$64 = 42 - 2 \cdot 30 \cdot \cos 2$$

$$64 = 42(1 - \cos 2)$$

$$\frac{6}{5} = (1 - \cos 2)$$

$$\cos 2 = \frac{1}{9}$$

$$\frac{16}{5} = \frac{16}{5}$$



$$\frac{9x}{y+8} = \frac{18}{24} = \frac{3}{4}$$

$$3y + 24 = 4x$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☒ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА

1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{cases} |x - 3y| \leq 3 \\ |3x - y| \leq 1 \end{cases} \quad \text{Рассмотрим четыре случая раскрытия модуля}$$

$$\begin{cases} 0 \leq x - 3y \leq 3 \\ 0 \leq 3x - y \leq 1 \end{cases} \quad \text{Получим} \quad \begin{cases} x \geq 3(y-1) \text{ и } x \leq \frac{4+y}{3} \\ \frac{4+y}{3} \geq 3(y-1) \Rightarrow x \geq 3(y-1) \end{cases}$$

$$4+y \geq 9y-9 \Leftrightarrow 1,25 \geq y \Rightarrow x \leq 0,25, \text{ тогда}$$

$$\max(4y+8x) = 5+6 = 11$$

$$\begin{cases} 0 \leq x - 3y \leq 3 \\ 0 \leq y - 3x \leq 1 \end{cases} \quad \begin{cases} x \leq 3(y+1) \\ x \geq \frac{y-1}{3} \end{cases} \quad \text{Получим}$$

$$3(y+1) \geq x \geq \frac{y-1}{3} \Rightarrow y \geq 1,25, x \geq 0,25$$

$$4y+8x \geq 4 \Rightarrow y \geq 1, x \geq \frac{4}{3}$$

$$\text{Далее } x \geq 3y \Rightarrow x = 3y+1, \frac{4}{3} \leq 3$$

$$\text{то } |3x - y| \leq 1 \Rightarrow |9y+3-1| \leq 1, -1 \leq 8y-2 \leq 1$$

$$\text{Получим } y_{\min} = \frac{10}{8} \text{ или } y = -3, \text{ тогда не подходит}$$

$$\text{Максимизируем } 4y+8x = 28y+8 \leq \frac{8}{3} + \frac{20}{3}y \leq \frac{8}{3} + \frac{20}{3} \cdot \frac{10}{8} \leq 11$$

$$\text{Если } x - 3y < 0, \text{ то } 3y \leq x < 1, \text{ тогда}$$

$$\text{Получим } |3x - y| = |3x - \frac{x+1}{3}| = |\frac{8x-1}{3}| \leq 1$$

$$-3 \leq 8x-1 \leq 3 \Rightarrow 8x \leq 4 \Rightarrow x \leq 0,5$$

$$\max 1 \text{ тогда } 4y+2x = \frac{4}{3}x + \frac{4}{3}(1-x) + 2x = \frac{28x+4}{3} \leq \frac{14 \cdot (1+1)+4}{3} = 11$$

$$\frac{4}{3} + \frac{14 \cdot 1}{3} \leq 11, \text{ или } y \leq 3$$

$$\text{Ответ: } 4y+2x \leq 11, \text{ критичн } y = 1,25, x = 0,25$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☒	☐	☐	☐	☐

СТРАНИЦА
1 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$A = m^2 + n^2 + 2mn - 9m - 9n = (m+n)^2 - 9(m+n) = (m+n)(m+n-9)$$

$$B = m^2n + mn^2 - 3mn = mn(m+n-3)$$

1) Рассмотрим случай, когда $A = 13p^2$, $B = 45q^2$

$$(m+n)(m+n-9) = 13p^2$$

$$mn(m+n-3) = 45q^2$$

Тогда $\log(m+n-9, m+n) = (m+n, 9)$ По лемме Дюрессе

такое $m+n$ может делиться на 3, 9. Если $m+n = 9k$, то

$$m+n-9 = 9(k-1) > 0, \text{ т.к. } 13p^2 > 0, \text{ то}$$

$(m+n)(m+n-9) = 9 \cdot 3^4 k(k-1)$ но это число делится на 3^4 а левая часть может делиться на 3^2 при $p=3$.

Тогда $m+n = 3k$, то $m+n-9 = 3(k-3)$, тогда

$$(m+n)(m+n-9) = 3k \cdot 3(k-3) = 9^2 \cdot k(k-3) = 13p^2 \text{ при } p=3 \Rightarrow p=3$$

$$\text{но тогда } k(k-3) = 13 \Leftrightarrow k^2 - 3k - 13 = 0 \Rightarrow k = \frac{3 \pm \sqrt{9+52}}{2} = \frac{3 \pm \sqrt{61}}{2} \notin \mathbb{Z}$$

$$\text{но } k^2 - 3k - 13 = 0 \Rightarrow D = 9 + 4 \cdot 13 = 61 \text{ тогда } k \notin \mathbb{Z}$$

но тогда $m+n \nmid 3$.

Если $m+n \nmid 3$, то и $(m+n-3) \nmid 3$, тогда что-то

рассмотрим число B , оно делится на 3, тогда что-то

из m, n делится на 3.

Так как $\log(m+n)(m+n-9) \leq 9 = 1$, то одно из этих

чисел будет равняться 13, так как $13p^2 = (m+n)(m+n-9) =$

$a \cdot b$, где $\log(a, b) = 1$, то одно из них равно 13, другое

p^2 , иных комбинаций невозможно кроме случаев

$(m+n-9) = 1$, тогда $\Leftrightarrow m+n = 10$ но $10 \nmid 13p^2$. Значит

$$\begin{cases} m+n=13 \\ m+n-9=p^2 \end{cases} \Rightarrow p=2 \text{ и } \begin{cases} m+n-9=13 \\ m+n=22 \neq p^2 \end{cases} \text{ не подходит}$$

Рассмотрим число $B = mn(m+n-3) = mn \cdot 10 = 45 \cdot q^2$, тогда

$$45q^2 : 10 \Leftrightarrow 45q^2 : 2 \Leftrightarrow q^2 : 2 \Rightarrow q=2$$

Получаем, что $\begin{cases} m+n=13 \\ mn = \frac{45 \cdot 4}{10} = 30 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m, n = (10, 3) \\ m, n = (3, 10) \end{cases}$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☒	☐	☐	☐	☐

СТРАНИЦА
2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

2) Разберем второй случай $A = 45g^2$, $B = 13p^2$

тогда мы знаем, что $A = (m+n)(m-n-g) = 45g^2 = 3 \cdot 5^2 \cdot g^2$

Значит, что если $(m+n)/(m-n-g) \div 3$, то тогда

$(m+n)/(m-n-g) \div g$, т.е. $\text{НОД}(m+n, m-n-g) = 1, 3, g$. Если

одно делится на 3, то и другое. Тогда $g^2 = 3$, так как

$$45g^2 \div g \Rightarrow 45g \div 3 \Rightarrow g = 3$$

$A = (m+n)(m-n-g) = 3 \cdot 3^2 \cdot 5^2$, так как $(m+n, m-n-g) = 1, 3, g$, то

$$\begin{cases} m+n = 3 \cdot 5^2 \\ m-n-g = g \end{cases} \quad \begin{cases} m+n = 3 \\ m-n-g = 3 \cdot 5^2 \end{cases} \quad \begin{cases} m+n = 3^2 \cdot 5^2 \\ m-n-g = 3 \end{cases} \quad \begin{cases} m+n = 3^2 \\ m-n-g = 5^2 \cdot 3 \end{cases}$$

↑ невозможна

↑ невозможно

$$\text{тогда} \begin{cases} m+n = 45 \\ m-n-g = g \end{cases} \quad \text{не подходит} \quad \begin{cases} m+n = 3^2 \cdot 5^2 \\ m-n-g = 3 \cdot 5^2 \cdot 3 \end{cases} \quad \text{не подходит}$$

Тогда во втором случае у нас нет ответа.

$$\text{Оси: } (m, n) = (3, 40); (40, 3)$$

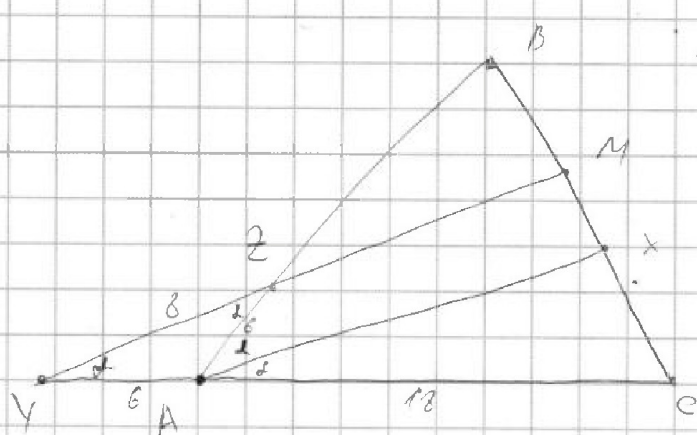


На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☒ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



AX - биссектриса.

$$\angle BAX = \alpha$$

$$\angle XAC = \alpha$$

$$MY \parallel AX \Rightarrow \angle YZA = \angle ZAX = \alpha$$

т.к. $MY \parallel AX$

$$\Rightarrow \angle MVA = \angle XAC$$

т.к. $MY \parallel AX$

$$\angle ZYA = \alpha = \angle ZAX \Rightarrow \triangle YZA - \text{равнобедренный} \Rightarrow ZA = AY = 6$$

$$AX \parallel MY \Rightarrow \triangle CAX \sim \triangle CYM \text{ (по двум углам } \angle XAC = \angle MCA)$$

$$\frac{CA}{CY} = \frac{CX}{CM} \Rightarrow \frac{CA}{CY} = \frac{12}{4} = \frac{3}{1} = \frac{CX}{CM} \Rightarrow CX = 3x, CM = 4x$$

$$\text{т.к. } M - \text{средина } CB \Rightarrow \angle MC = 8x \Leftrightarrow \angle BXC = 2\angle MC \Rightarrow \angle BXC = 16x = 54$$

$$\text{По доказанной биссектрисе } \frac{CX}{AC} = \frac{BX}{AB} \Rightarrow \frac{3x}{24} = \frac{54}{10} \Rightarrow x = 30$$

Найдем $\cos \angle ZAY$ по теореме косинусов

$$ZY^2 = AZ^2 + AY^2 - 2 \cdot AZ \cdot AY \cdot \cos \angle ZAY \Rightarrow \cos \angle ZAY = \frac{1}{9}$$

$$\cos \angle BAC = -\cos (40^\circ - \angle ZAY) = -\cos \angle ZAY = -\frac{1}{9}$$

По теореме косинусов найдем BC

$$BC = \sqrt{AC^2 + AB^2 - 2 \cdot \cos \angle BAC \cdot AC \cdot AB} = \sqrt{24^2 + 10^2 - 2 \cdot \left(-\frac{1}{9}\right) \cdot 24 \cdot 10} = \sqrt{1444} = 38$$

$$\sqrt{4 \cdot 19^2} = 38$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7
☐ ☐ ☐ ☐ ☒ ☐ ☐

СТРАНИЦА
 2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Рассмотрим ~~$x = 2,6$~~ ~~$a = \sqrt{x+1}$~~ ~~$\text{и } b = \sqrt{6-x}$~~

$$a^2 = x+1, \quad b^2 = 6-x \Rightarrow x = 6-b^2 \Rightarrow a^2 = 4-b^2 \Rightarrow a = \sqrt{4-b^2}$$

$$a-b+5 = 246 \Rightarrow a(1-26) = 6-5 \Rightarrow$$

$$\sqrt{4-b^2}(1-26) = 6-5 \quad \text{возведем обе части в квадрат}$$

$$(4-b)(1+4b^2-46) = b^2-10b+25$$

$$4 + 20b^2 - 281 + 4b^2 - 4b^3 - 6 = b^2 - 10b + 25 \Rightarrow$$

$$34b^2 - 286 + 4b^2 - 4b^3 - 12 = 0 \quad \text{Возведем в кубическое уравнение}$$

$$34b^2 - 298 - 4b^3 = 0$$

$$p = 62^2 - 4 \cdot 298 \cdot 12 = \sqrt{2922}$$

$$b_{1,2} = \frac{62 \pm \sqrt{2922}}{-24} = \frac{62 \pm \sqrt{2922}}{24}$$

$$b = x \Rightarrow \sqrt{\frac{62 \pm \sqrt{2922}}{24}}$$

$$x = 6 - \sqrt{\frac{62 \pm \sqrt{2922}}{24}}$$

$$\sqrt{x+1} - \sqrt{6-x} + 5 = 246 \Rightarrow \sqrt{x+1} - \sqrt{6-x} = 241$$

$$\sqrt{x+1}(1-2\sqrt{6-x}) - \sqrt{6-x} + 5 = 0$$

a



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☒ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
4 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{cases} \sqrt{x+1} - \sqrt{6-y} + 5 = 2\sqrt{6+5x-y^2} \\ x^4 + 5x^2 - \sqrt{y} = y^4 - \sqrt{x} + 5y^2 \end{cases}$$

Заметим, что из-за $\sqrt{x}, \sqrt{y} \Rightarrow x, y \geq 0$, и $\sqrt{6-y} \Leftrightarrow y \leq 6$.

Возведем первое выражение в квадрат.

$$(x+1) + (6-y) + 10\sqrt{x+1} \cdot \sqrt{6-y} + 25 = 4(6+5x-y^2)$$

Равно при первом выражении $x^4 + 5x^2 + \sqrt{x} = y^4 + 5y^2 + \sqrt{y}$, то

если $x > y \geq 1$ то первое будет больше чем второе, тогда $x^4 - y^4 = 0$ и $5x^2 - 5y^2 \geq 0$, $\sqrt{x} \geq \sqrt{y}$, тогда

$$1 \geq x \geq y \geq 0$$

$$x^4 - y^4 + 5(x^2 - y^2) - \sqrt{x} + \sqrt{y} = (x^2 - y^2)(x^2 + y^2) + 5(x^2 - y^2) + (\sqrt{x} - \sqrt{y}) = 0$$

$$(x^2 - y^2)(x^2 + y^2 + 5) + \sqrt{x} - \sqrt{y} = (x - y)(x + y)(x^2 + y^2 + 5) + (\sqrt{x} - \sqrt{y}) =$$

$$= (\sqrt{x} - \sqrt{y})(\sqrt{x} + \sqrt{y})(x^2 + y^2 + 5)(x + y) + 1 \geq 0$$

$$\begin{cases} \sqrt{x} - \sqrt{y} = 0 \\ B + 1 = 0 \end{cases} \begin{cases} \sqrt{x} = \sqrt{y} \\ B = -1 \end{cases}$$

$$B = -1, \text{ но } x + y \geq 0, \text{ тогда } B = -1 \text{ не подходит}$$

если из второго выражения $\sqrt{x} + \sqrt{y} \geq 0$,

$x^2 + y^2 + 5 \geq 0$, $x + y \geq 0$, тогда возможно иметь вариант

когда $x = y$, то есть

$$\sqrt{x+1} - \sqrt{6-x} + 5 = 2\sqrt{6+5x-x^2}$$

$$\sqrt{x+1} - \sqrt{6-x} + 5 = 2\sqrt{(x+1)(6-x)}$$

Заметим, что $x \leq 6$, тогда

$$2\sqrt{(x+1)(6-x)} \leq 2\sqrt{(x+1)(6-x)}$$



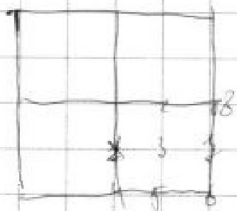
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☒ 7 ☐

СТРАНИЦА

1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

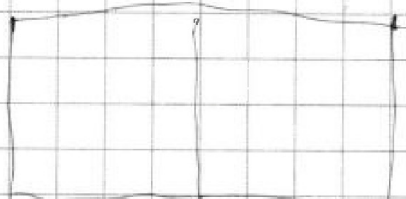


Тоже количество вариантов для ушей
равно $C_2^1 \cdot C_2^1 = 64$

В сумме было для квадрата

$$2^3 \times 2^2 = 64 + 36 + 2 = 108$$

Для 2×8 прямоугольников те же самые случаи



Для двух соседних $C_{20}^1 \cdot C_{20}^1 = 400$

Для противоположных $24 \cdot 24 = 576$

Для $2^3 \times 2^5$ будет всего $108 + 576 + 400$

Ответ: 1084

1 2 3 4 5
10 1 2 3 4
12 12 13 14 15
16 17 18 19 20

21 22 23 24
25 26 27 28 29
30 31 32 33 34
35 36 37 38 39
40 41 42 43 44



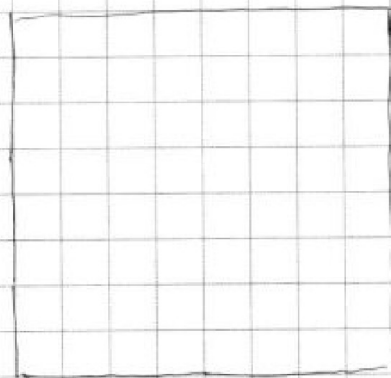
На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☒ 7 ☐

СТРАНИЦА

1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



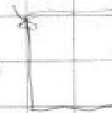
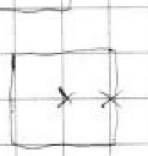
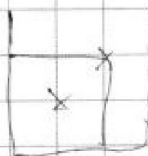
Взвешивать будем по принципу
по n , таким образом мы найдем
количество точек в 2×2 квадрате.

Далее $n=1$.



количество точек

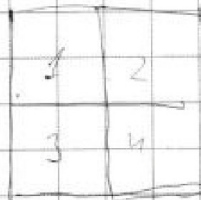
равно



равно 8

Для $n=2$ мы найдем либо либо два на два угла

имеет

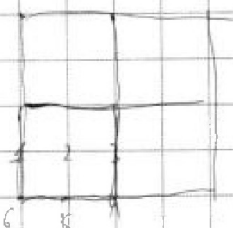


в одном из квадратов. Тогда можно

и 2 доказать. Тогда еще есть

лучше когда на границе два угла в разных квадратах

Тогда мы



это либо соседних два квадрата
либо противоположных. Если соседних

то нам из этого надо выбрать по
углам угла, кроме углов, которые

объекта будет коротко этих квадратов, получим что

это лучше мы уже получили. Тогда количество

точек в квадрате равно $3 \times 3 = 9$

расширяем границы, когда они не зависят по углам



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☒

СТРАНИЦА

2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

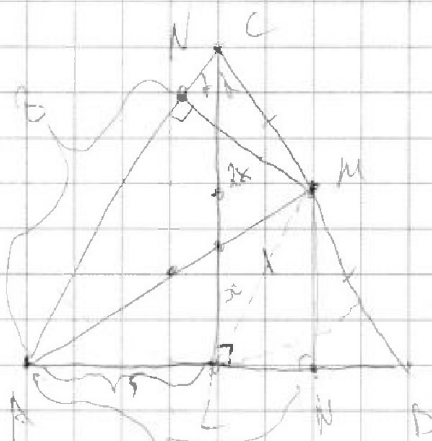
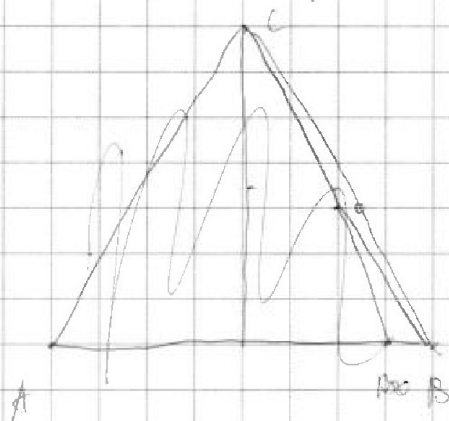
$$\angle MCE = \angle BLC = 50^\circ$$

CL - биссектриса и $CL \perp AB \Rightarrow \triangle ABC - \text{равнобедренный} \Rightarrow AC = CB$

$$\Rightarrow \text{тогда } CL - \text{средняя } AB = \frac{1}{2} AB = \frac{1}{2} \cdot 20 = 10$$

$$\angle A = 50^\circ$$

Тогда рассмотрим рисунок



$$\text{Тогда } CL - \text{средняя } AB \Rightarrow \angle M = \frac{1}{2} AC = \frac{1}{2} (AN + NC)$$

$$\angle M = \frac{1}{2} CB \text{ (CB - гипотенуза)}$$

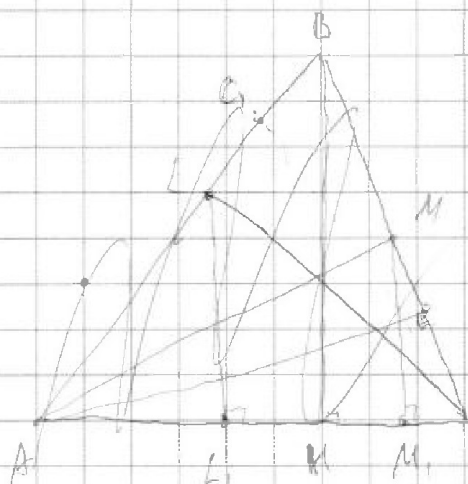


На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☒

СТРАНИЦА
1 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



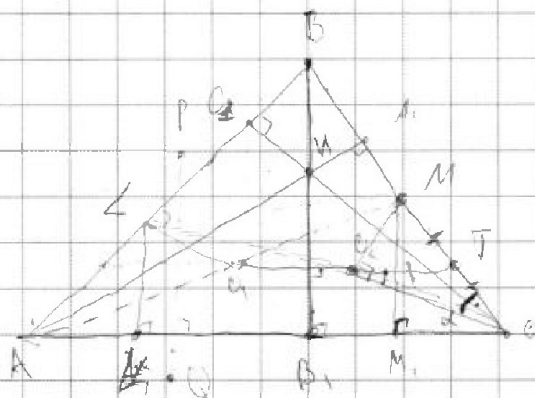
$\angle N \perp AC$, т.к.
 $\angle LNA$ опирается на диаметр
 $AN = 8$ $M_1 = M'$
 $AB = 10$

Точки N, L, C лежат на Ω
Точки A, M, M_1 - лежат на Ω
т.к. $AN \perp AC$

Вспомогательный круг, проходящий через точки A, M, M_1 и N

Вспомогательный круг PQ . Так как $Q_1, Q_2 \in PQ \Rightarrow Q_1, Q_2 \in \Omega$,
 $PQ \perp Q_1Q_2$ т.к. $PQ \parallel BB_1$, $\Rightarrow PQ \perp Q_1Q_2 \perp BB_1$, и $BB_1 \perp AC \Rightarrow AC \parallel Q_1Q_2$
 $\angle CQ_1 = \angle LCA = \alpha$

Т.к. CL - биссектриса $\Rightarrow \angle LCA = \angle LCN = \alpha$



$\angle CQ_1 = \angle LCA = \alpha$
 $\angle LCN = \angle LCA = \alpha$
 $\angle LCN = \angle LCA = \alpha$

Значит $ML = LC$ и $\angle LCN = \angle LCA$
 $AC = AM + MC = AM + LC$
 AA_1 и MM_1 - линии параллельны

$\angle AAC = \angle MMC = 90^\circ - 2\alpha$

$\triangle ALN \sim \triangle ASB_1$ (т.к. $\angle BAN = \angle B_1AS$ и $AN \parallel BB_1$) $\Rightarrow \frac{AL}{BB_1} = \frac{AN}{AB_1}$

$\Rightarrow \frac{AL}{BB_1} = \frac{AN}{AB_1}$. Продолжим Q_1Q_2 до пересечения с BC

т.к. $Q_1Q_2 \parallel AC$ и Q_1 - сев. AM то $Q_1Q_2 \parallel MC$ $\Rightarrow M_1T = TC$

$Q_1Q_2 \parallel AC \Rightarrow \angle Q_1Q_2C = \angle Q_1CA = \alpha$ (т.к. $Q_1Q_2 \parallel AC$) $\angle TQ_1C = \alpha = \angle TQ_2C$

$\Rightarrow \triangle Q_1TC \sim \triangle Q_2TC \Rightarrow TQ_1 = TQ_2 \Rightarrow \angle MQ_2C = 90^\circ$, т.к.

$\angle Q_1 = \angle Q_2$ т.к. $AO_1 \perp LC$ то $LM = MC$, $MC = \frac{1}{4} AB \Rightarrow$

$LM = BM = \frac{1}{4} AB$ т.к. $LM = MB = MC$ то M центр окружности
или септис. отрезок $\angle BAC \Rightarrow BC$ - диаметр $\Rightarrow \angle BLC = 90^\circ$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1
☐

2
☐

3
☐

4
☐

5
☐

6
☐

7
☐

СТРАНИЦА
из

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\sqrt{x+5} - \sqrt{x-6} = 5 \Rightarrow 2\sqrt{(x+1)(x-6)}$$

$$AB_1 = AC - 2CM_1 = AC - 2 \frac{CM \cdot CA_1}{CA} = \frac{CA^2 - CM \cdot CA_1}{CA}$$

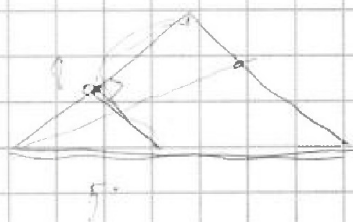
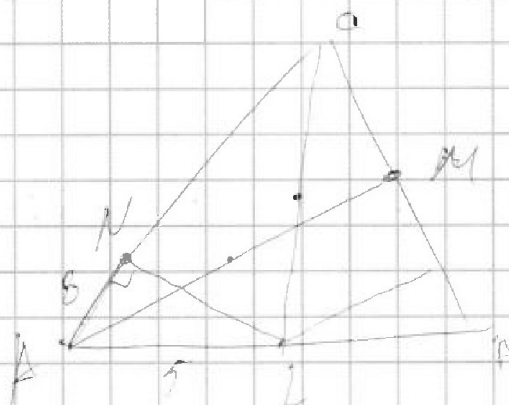
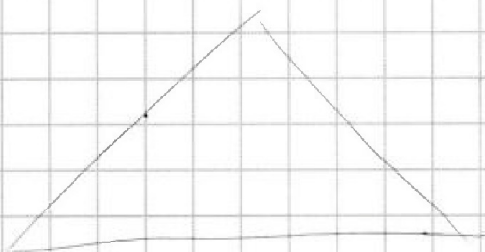
$$\frac{CA^2 - \frac{1}{2}LB \cdot CA_1}{CA} = CR = \frac{1}{2} \cdot \frac{LB}{LA} \cdot CA_1 \Rightarrow CA - \frac{1}{2} \cdot \frac{LB}{LA} \cdot CA_1 = \frac{CA}{CM} \cdot CM_1$$

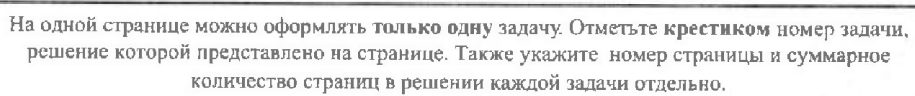
$$AB_1 = CA - \frac{LB}{LA} \cdot CA_1$$

$$AB_1 = \frac{B \cdot 10}{LA} = CA - \frac{LB}{LA} \cdot CA_1 \quad AB_1 = LB \quad \cos 2\alpha$$

$$BD = CA \cdot LA - LB \cdot CA_1 = CA(LA - LB \cdot \cos 2\alpha)$$

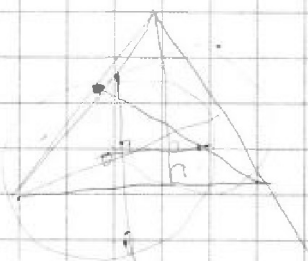
$$CA(LA - LB \cdot \cos 2\alpha) = AB_1$$





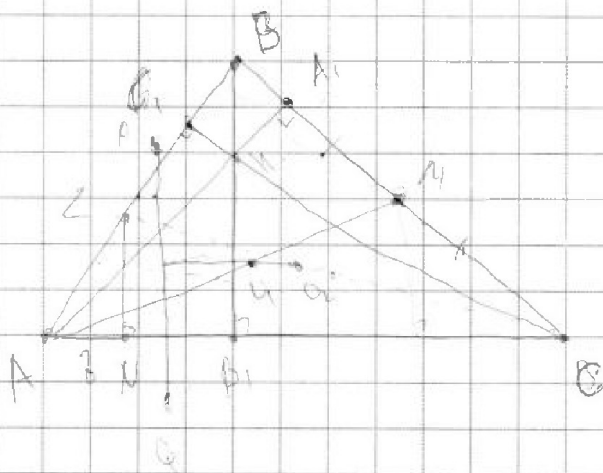
СТРАНИЦА
ИЗ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



69.4

$$\frac{264}{24} = 11$$





На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1
☐2
☐3
☐4
☐5
☐6
☐7
☐СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$a_3 = 3x + 13$$

$$a_5 = (x^2 + 2x)^2 = x^4 + 4x^3 + 4x^2$$

$$a_9 = 3x^2$$

$$a_n = a_1 + (n-1)d \quad \text{3-й член прогрессии арифметической прогрессии}$$

$$\text{Тогда: } a_9 - a_3 = 10 \cdot 9 - d \cdot 2 + a_1 - a_1 = 2d$$

$$a_9 - a_3 = x^4 + 4x^3 + 4x^2 - 3x - 3 - (3x^2 - x^4 - 4x^3 - 4x^2) =$$

$$2x^4 + 8x^3 + 8x^2 - 6x - 6 = 3x^2 - x^4 - 4x^3 - 4x^2 =$$

$$3x^4 + 8x^3 + 12x^2 - 6x - 6 = 0$$

$$3(x^4 + 8x^3 + 3x^2) - 6(x+1) = 0$$

$$3x^2(x^2 + 4x + 3) - 6(x+1) = 0$$

$$3x^2(x+1)(x+3) - 6(x+1) = 0$$

$$(x+1)(3x^2(x+3) - 6) = 0$$

$$x = -1$$

$$3x^3 + 9x^2 - 6 = 0$$

$$x^3 + 3x^2 - 2 = 0$$

$$x = -1$$

$$\sqrt{6+5x+y^2} = \sqrt{10-9^2+5(-3)^2} = \sqrt{(1-6)^2+5(-3)^2}$$

$$\sqrt{x+1} = \sqrt{6-y} + 5 = 2\sqrt{6+5x-y^2}$$

$$6+5x-y^2 = (6-y)^2 + 12(6-y) = -y^2 + 36 + 5$$

$$-36 - y^2 + 48y + 432 = 42y = 56$$

$$14x3 \quad 36 \div 12 \div 12$$

$$432 \quad \sqrt{432}$$

$$(x-y)(x^2+y^2)(x+y) + (\sqrt{x}-\sqrt{y})(\sqrt{x}+\sqrt{y}) + 5(x^2-y^2)$$

$$(x^2-y^2)(x+y) + 5(x^2-y^2) = 0$$

$$(x-y)(x+y)$$

$$(\sqrt{x}+\sqrt{y})(x+y)(\sqrt{x}-\sqrt{y})$$

$$(\sqrt{x}-\sqrt{y})(\sqrt{x}+\sqrt{y})(x+y)(\sqrt{x}+\sqrt{y}) + 5(x^2-y^2)$$

$$1324$$

$$10 \cdot 10 = 100 \quad 80 = 64$$

$$260 + 64 = 324 = 900$$

$$\frac{x^3 + 3x^2 - 2}{x^3 + x^2} \quad \frac{x+1}{x^2 + 2x - 2}$$

$$-2x^2 - 2$$

$$2x^2 + 2x$$

$$-2x - 2$$

$$D = 4 + 4x = 12$$

$$x_{1,2} = \frac{-2 \pm \sqrt{12}}{2}$$

$$13$$

$$3 \pm$$

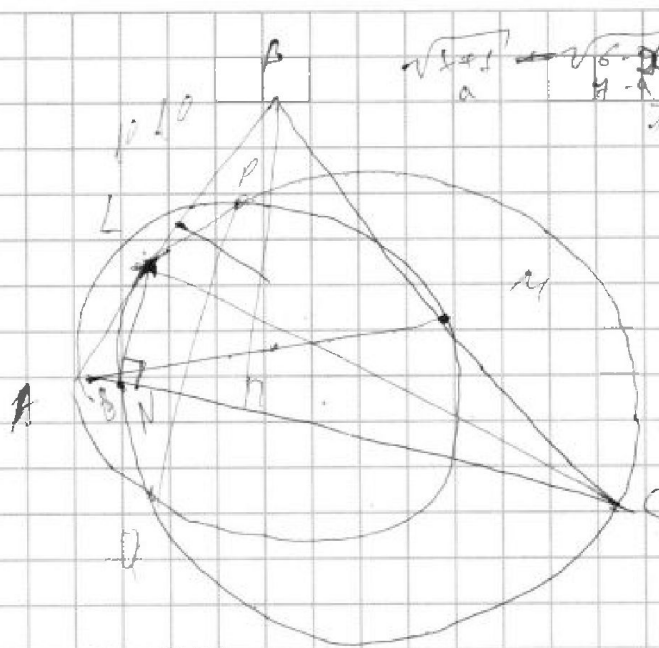


На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7
☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



$$\sqrt{x+1} - \sqrt{6-x} = 5 - 2\sqrt{(x+1)(6-x)}$$
$$18.24 / 34$$

$$23/34$$

$$\frac{6+x-4^2}{-x^2-x} = \frac{1}{-x+6}$$
$$6$$

$$x-y = 1 \quad d \geq 12$$
$$d-6+5 = 206$$

$$\begin{cases} |x-3y| \leq 3 \\ |3x-y| \leq 1 \end{cases} \quad \begin{cases} x-3y \leq 3 \\ 3x-y \leq 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x-y \leq 1 \\ a^2 = x+6 \\ b^2 = 6-x \\ a+b = 12 \end{cases}$$

$$x \leq 3(y+1) \quad (x-1)(y) = 1$$
$$x \leq \frac{1-y}{3} \quad P(x)(x+1) - P(x)y + 2x \leq 1$$

$$x-3y \leq 3 \quad x \leq 3(y+1) \quad x \leq \frac{1-y}{3} \quad 90 - \frac{1}{2}$$
$$3x-y \leq 1 \quad 31 \quad 964.4 \quad 48.4 \quad 960.48$$
$$y \leq 1.33 \quad 32.4 \quad 3600 \times 244 \quad (x+1)(y-1) \quad 812$$

$$\sqrt{x-4y^2}(\sqrt{x-4y^2}+5) + (\sqrt{x-4y^2}) = 0$$
$$3644 - 912 = 2922 \quad 1461$$

$$(x-y)(x-y)(x+4y+5) + (\sqrt{x-4y^2}) = 0$$
$$(x-y)(x-y)(x+4y+5) + 1 = 0$$

$$2.64 \times 10^6$$
$$\sqrt{x-4y^2} = 6 + 240 - 37$$
$$(x-1)(6-x) \geq 2.5^2$$
$$6+x-x^2 \geq 6.25$$
$$0 \geq x^2 - 5x + 0.25$$
$$p = 2.5 - 4 \times 0.25$$
$$\frac{5 \pm \sqrt{16}}{2}$$