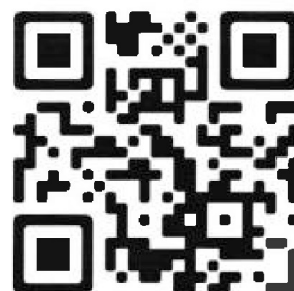




МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

9 КЛАСС. Вариант 9



1. [3 балла] Найдите все значения параметра t , при каждом из которых уравнение $x^2 + 2\sqrt{3}tx + 4t^2 - 4 = 0$ имеет два различных действительных корня, а их произведение положительно.
2. [4 балла] Натуральные числа a и b таковы, что их сумма равна 40, а значение выражения $a^2 - 2ab + b^2 + 15a - 15b$ равно $17p^5$, где p – некоторое простое число. Найдите числа a и b .
3. [5 баллов] На стороне BC треугольника ABC отмечены точки M и N так, что $BM = MN = NC$. Прямая, параллельная AN и проходящая через точку M , пересекает продолжение стороны AC за точку A в такой точке D , что $AB = CD$. Найдите AB , если $BC = 12$, $\cos(2\angle CEM) = -\frac{1}{4}$.
4. [5 баллов] В классе для занятий иностранным языком стоят три ряда парт, в каждом из которых по три парты, расположенных друг за другом. Парты рассчитаны на одного человека. Школьник хорошо видит доску в любом из следующих случаев (и только в них):
 - он сидит на первой парте в ряду,
 - ближайшая парта перед ним пуста,
 - за ближайшей партой перед ним сидит ученик меньшего роста.Сколькими способами можно рассадить в классе 8 учеников группы так, чтобы всем было хорошо видно доску, если известно, что все школьники разного роста? Ответ дайте в виде числа или выражения, содержащего не более двух слагаемых (в слагаемые могут входить факториалы, биномиальные коэффициенты).
5. [5 баллов] Продолжение сторон BC (за точку C) и AD (за точку D) вписанного в окружность четырёхугольника $ABCD$ пересекаются в точке E . Центр O окружности, вписанной в треугольник ABE , лежит на отрезке CD . Найдите наименьшее возможное значение суммы $ED + DO$, если известно, что $BE = 10$.
6. [4 балла] На острове расположено несколько деревень. Между некоторыми деревнями проложены дороги. Известно, что из любой деревни в любую другую можно добраться, причём по единственному маршруту. Также известно, что есть четыре деревни, из которых выходят 3, 4, 5 и 7 дорог соответственно, а из остальных деревень выходит ровно по одной дороге. Сколько деревень может быть на острове?
7. [5 баллов] Найдите все пары целых чисел $(x; y)$, удовлетворяющие уравнению

$$\sqrt{2x + 2y - x^2 - y^2} + \sqrt{1 - |x + y - 2|} = 1.$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1



2



3



4



5



6



7



СТРАНИЦА

1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$x^2 + 2\sqrt{3}tx + 4t^2 - 4 = 0$. Корни этого уравнения

$$x_{1,2} = \frac{-2\sqrt{3}t \pm \sqrt{12t^2 - 16t^2 + 16}}{2} = \frac{-2\sqrt{3}t \pm \sqrt{16 - 4t^2}}{2}$$

Это различные действительные числа если $16 - 4t^2 > 0$, $16 > 4t^2$, $4 > t^2$. По т. Виета

$x_1 x_2 = 4t^2 - 4$, произведение положительно, тогда $4t^2 - 4 > 0$, $t^2 > 1$, получаем $4 > t^2 > 1$.

$$2 > |t| > 1$$

$$2 > t > 1$$

$$-1 > t > -2$$

Ответ: $t \in (-2; -1) \cup (1; 2)$.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1
☐2
☒3
☐4
☐5
☐6
☐7
☐СТРАНИЦА
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Если сумма чисел $a+b=40$, то $(a-b)$ чётное число. $a^2-2ab+b^2+15a-15b=(a-b)^2+15(a-b)=$
 $= (a-b)(a-b+15)=17p^5$. Либо $a-b \equiv 17$, или $a-b+15 \equiv 17$, значит $a-b \equiv 0$ или $a-b \equiv 2$.

Максимум $a-b$ это 38, минимум -38.

Переберём $a-b$. Есть варианты -34; -32; -17; -15; 0; 2; 17; 19; 34; 36. Все нечётные не подходят, и $17p^5 \neq 0$, тогда $a-b \neq 0$. Проверим подчёркнутые числа.

$$(-34) \cdot (-19) = 17 \cdot 2 \cdot 19 \neq 17p^5$$

$$(-32) \cdot (-17) = 2^5 \cdot 17$$

$$2 \cdot 17 = 2 \cdot 17 \neq 17p^5$$

$$34 \cdot 49 = 2 \cdot 17 \cdot 7^2 \neq 17p^5$$

$$36 \cdot 51 = 2^2 \cdot 3^3 \cdot 17 \neq 17p^5. \text{ Тогда, } a-b = -32.$$

$$a+b=40 \quad a=4 \quad b=36.$$

Ответ: 4; 36.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1
☐

2
☐

3
☒

4
☐

5
☐

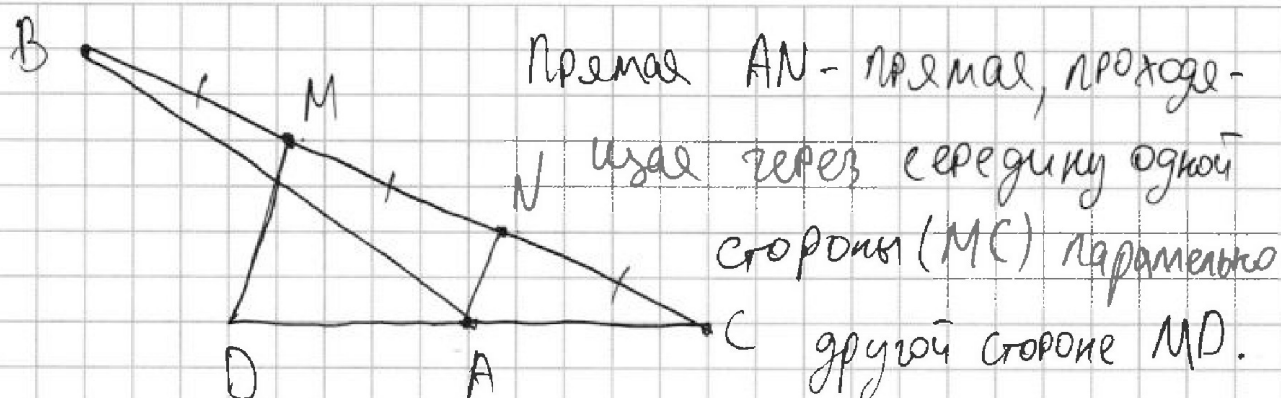
6
☐

7
☐

СТРАНИЦА

1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



Прямая AN - прямая, проходящая через середину одной стороны (MC) параллельно другой стороне MD. Значит, проходит через середину DC, а значит $AD = AC$. По условию, $CD = AB$. Пусть, $AC = a$, тогда $AB = 2a$. $AC : AB = CN : NB$. Значит, AN - биссектриса угла BAC. $\angle BAC = 2\angle CAN$. По условию, $\cos(2\angle CAN) = -\frac{1}{4} = \cos \angle BAC$. В $\triangle BAC$ по т. косинусов $AB^2 + AC^2 - 2AB \cdot AC \cdot \cos \angle BAC = BC^2$, по условию $BC = 12$. $4a^2 + a^2 - 4a^2 \cdot (-\frac{1}{4}) = 144$
 $6a^2 = 144$ $a^2 = 24$ $a = \sqrt{24}$, тогда $AB = 2a = 4\sqrt{6}$

Ответ: $4\sqrt{6}$.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

☐☐☐☒☐☐☐

СТРАНИЦА

1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Если людей a, b парт a , то в одном ряду будет пустая парт. Выбрать этот ряд 3 способа. Теперь рассадим людей на два оставшихся ряда. Если в ряду нет пустого места, то людей с ростами a, b, c рассадить можно единственным способом. Значит, вариантов заполнить этот ряд, это количество способов выбрать трёх людей, это $\frac{8 \cdot 7 \cdot 6}{3!} = 56$. Аналогично на другой ряд без пустого места нужно выбрать трёх людей, это $\frac{5 \cdot 4 \cdot 3}{3!} = 10$ вариантов. Остались 2 человека на ряд с пустым местом. Их рассадить 4 способа (если росты a, b), то

a	b	b	x
x	x	a	b
b	a	x	a

 также рассадки. Итого вариантов $3 \cdot 56 \cdot 10 \cdot 4 = 560 \cdot 12 = 6720$ вариантов. Примечание: Сначала мы выбираем трёх людей на самый левый ряд без пустого места, а затем на другой. Ответ: 6720 вариантов.

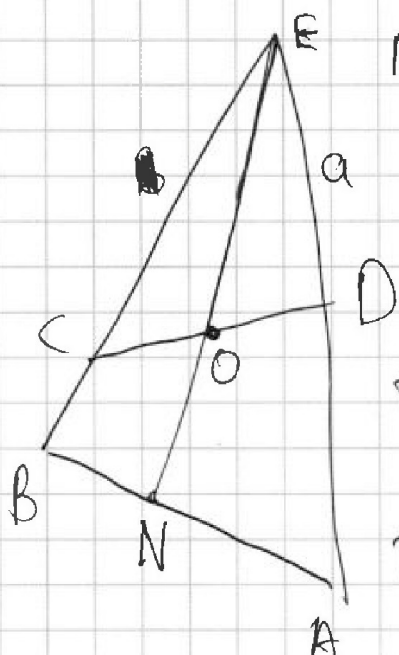


На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☒ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



Пусть, $ED = a$, $OD = ax$. $\triangle ABE \sim \triangle CDE$, потому что из вписанности $ABCD$ $\angle ABC = \angle CDE$ и $\angle BAD = \angle DCE$. По условию, $BE = 10$. Тогда, из подобия $\frac{OD}{BN} = \frac{ED}{BE} = \frac{a}{10}$, где EN — биссектриса $\angle BEA$.

Заметим, что O — центр $\triangle ABE$, тогда BO — биссектриса и EO , и AO . $BN = \frac{OD \cdot BE}{ED} = \frac{ax \cdot 10}{a} = 10x$. По свойству биссектрисы BO в $\triangle ABE$ $EO : ON = BE : BN = \frac{1}{x}$.

$EO : EN = \frac{1}{1+x}$. $EO : EN$ это отношение длин биссектрис в подобных $\triangle ABE$ и $\triangle CDE$, тогда коэффициент подобия $\triangle ABE$ и $\triangle CDE$ $1+x$.

Значит, $\frac{ED}{EB} = 1+x = \frac{a}{10} = 1+x$; ~~анализируем~~

$$a = \frac{10}{1+x}. \quad ED + OD = a + ax = a \cdot (1+x) = 10.$$

Ответ: 10.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7
☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☒ ☐

СТРАНИЦА
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Деревья - вершины, дороги - рёбра. Возьмём вершину степени 7, из неё рёбра выходят. Пусть вершин n , так как граф связный, то рёбер не менее $n-1$, так как между двумя вершинами только один путь, то граф без циклов. Значит, граф - это дерево на n вершинах. В нём $n-1$ рёбра. Посчитаем степени вершин. $3+4+5+7+(n-4) \cdot 1 = n+15$, это удвоенное число рёбер $n+15 = 2n-2$ $n=17$. Значит, деревьев 17.
Ответ: 17.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1
☐

2
☐

3
☐

4
☐

5
☐

6
☐

7
☒

СТРАНИЦА
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Так как, оба числа целые, то $x+y$ целое.

Так как, $\sqrt{2x+2y-x^2-y^2} \geq 0$, то $\sqrt{1-|x+y-2|} \leq 1$.

$0 \leq 1-|x+y-2| \leq 1$ $1 \geq |x+y-2| \geq 0$, тогда

$3 \geq x+y \geq -1$. Целые $x+y$ это 1, 2, 3. При $x+y=1$

получаем $y=1-x$, $\sqrt{2-x^2-1+2x-x^2} + \sqrt{1-1} = 1$

$$\sqrt{2-x^2-1+2x} = 1 \quad -2x^2+2x+1=1$$

$$2x^2-2x=0 \quad x=0 \text{ или } x=1; \quad y=1 \text{ или } y=0.$$

При $x+y=2$ $y=2-x$ $\sqrt{4-x^2-4+4x-x^2} + \sqrt{1-1} = 1$

$$4-x^2-4+4x-x^2=0$$

$$2x^2-4x=0 \quad x=2 \text{ или } x=0; \quad y=0 \text{ или } y=2$$

При $x+y=3$ $y=3-x$ $\sqrt{6-x^2-9+6x-x^2} + \sqrt{1-1} = 1$

$$6-x^2-9+6x-x^2=1$$

$$2x^2-6x+4=0 \quad x^2-3x+2=0. \text{ По т. обратной т. Виета}$$

$$x=1 \text{ или } x=2; \quad y=2 \text{ или } y=1.$$

Ответ: $(0;1); (1;0); (2;0); (0;2); (2;1); (1;2)$

$x^2 + 2\sqrt{3}t + x + 4t^2 - 4 = 0$
 $-2\sqrt{3}t \pm \sqrt{12t^2 - 16t^2 + 16}$
 $x_{1,2} = \frac{-2\sqrt{3}t \pm \sqrt{16 - 4t^2}}{2}$
 $16 > 4t^2$
 $4t^2 - 4 > 0$
 $t^2 > 1$
 $4 > t^2 > 1$
 $2 > |t| > 1$
 $2 > t > 1$
 $-2 < t < -1$
 $(a-b)^2 + 15(a-b) = (a-b)(a-b+15) =$
 $= 12 \cdot 5$
 $a-b = 19$
 $a-b = 34$
 $a-b = 36$
 $\frac{1}{2} = \frac{\sin \gamma}{\sin \angle BAC}$
 $\sin \angle BAC = \frac{\sqrt{15}}{4} = 2 \sin \alpha \cos \alpha$
 $\sin \sqrt{1-\sin^2 \alpha} =$
 $\sin 2\alpha = \frac{\sqrt{15}}{4}$
 $\sin^2 \alpha \cdot (1 - \sin^2 \alpha) = \frac{15}{64}$
 $\cos 2\alpha = -\frac{1}{4}$
 $2b = \frac{12 \cdot \angle BDC}{\sin \angle BDC}$
 $2b \cdot \sin \angle BDC = 12$
 $1 \leq x+y \leq 3$
 $-4 < x < 4$
 $-4 < y < 4$
 $-3 -2 -1$
 $1 2 3$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Handwritten mathematical work on grid paper, featuring a large triangle ABC and various geometric and algebraic derivations.

Triangle ABC: Vertices A, B, C. Side AB is labeled $10x$. Side AC is labeled 10 . Side BC is labeled b . A point D is on AC, and a point E is on BC. A line segment AD is drawn, and a line segment DE is drawn. The angle at D is marked with a circle and a dot. The angle at E is marked with a circle and a dot. The angle at A is marked with a circle and a dot. The angle at B is marked with a circle and a dot. The angle at C is marked with a circle and a dot.

Geometric Diagrams:

- A 3x3 grid.
- A circle with a center point.
- A star-like shape with 7 points.
- A tree-like structure with 7 nodes.
- A tree-like structure with 8 nodes.
- A tree-like structure with 9 nodes.
- A tree-like structure with 10 nodes.
- A tree-like structure with 11 nodes.
- A tree-like structure with 12 nodes.
- A tree-like structure with 13 nodes.
- A tree-like structure with 14 nodes.
- A tree-like structure with 15 nodes.
- A tree-like structure with 16 nodes.
- A tree-like structure with 17 nodes.
- A tree-like structure with 18 nodes.
- A tree-like structure with 19 nodes.
- A tree-like structure with 20 nodes.
- A tree-like structure with 21 nodes.
- A tree-like structure with 22 nodes.
- A tree-like structure with 23 nodes.
- A tree-like structure with 24 nodes.
- A tree-like structure with 25 nodes.
- A tree-like structure with 26 nodes.
- A tree-like structure with 27 nodes.
- A tree-like structure with 28 nodes.
- A tree-like structure with 29 nodes.
- A tree-like structure with 30 nodes.
- A tree-like structure with 31 nodes.
- A tree-like structure with 32 nodes.
- A tree-like structure with 33 nodes.
- A tree-like structure with 34 nodes.
- A tree-like structure with 35 nodes.
- A tree-like structure with 36 nodes.
- A tree-like structure with 37 nodes.
- A tree-like structure with 38 nodes.
- A tree-like structure with 39 nodes.
- A tree-like structure with 40 nodes.
- A tree-like structure with 41 nodes.
- A tree-like structure with 42 nodes.
- A tree-like structure with 43 nodes.
- A tree-like structure with 44 nodes.
- A tree-like structure with 45 nodes.
- A tree-like structure with 46 nodes.
- A tree-like structure with 47 nodes.
- A tree-like structure with 48 nodes.
- A tree-like structure with 49 nodes.
- A tree-like structure with 50 nodes.

Algebraic Equations and Formulas:

- $BE = 10$
- $a + b$
- $a + b + (a + b)$
- $\sqrt{x^2 + 2 - 2x}$
- n
- $n - 1$
- $2n - 2$
- $3 + 4 + 5 + 7 + n - 4 = 2n - 1$
- $n + 17 = 2n$
- $12 \dots 456$
- $3 \dots 123$
- $7 + 4 + 2 + 3 + 4 = 17$
- $8 \cdot 7 \cdot 6$
- $5 \cdot 4 \cdot 3 = 60$
- $6 \pm \sqrt{36 - 24} = 4$
- $3 - x \frac{n+1}{2} \frac{2n-1}{2}$
- $1 \ 2 \ 3$
- $2 \ 2$
- $0 \ 1$
- $2x^2 - 6x + 3 = 0$
- $\frac{8 \cdot 7 \cdot 6}{6} = 56$
- $2x + y - x^2 - y^2$
- $\sqrt{6 - x^2 - 9 + 6x - x^2} = 0$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА

ИЗ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

