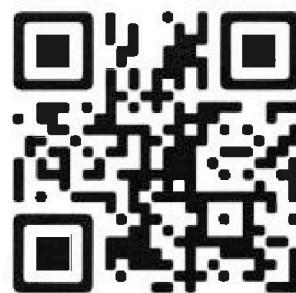




МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

9 КЛАСС. Вариант 10



1. [3 балла] Найдите все значения параметра t , при каждом из которых уравнение $x^2 + 4\sqrt{2}tx + 9t^2 - 9 = 0$ имеет два различных действительных корня, а их произведение положительно.
2. [4 балла] Натуральные числа a и b таковы, что $a - b = 12$, а значение выражения $a^2 + 2ab + b^2 + 3a + 3b$ равно $19p^4$, где p – некоторое простое число. Найдите числа a и b .
3. [5 баллов] На стороне BC треугольника ABC отмечены точки M и N так, что $BM = MN = NC$. Прямая, параллельная AN и проходящая через точку M , пересекает продолжение стороны AC за точку A в такой точке D , что $AB = CD$. Найдите AB , если $BC = 6$, $\cos(2\angle CEM) = -\frac{3}{4}$.
4. [5 баллов] В классе для занятий иностранным языком стоят четыре ряда парт, в каждом из которых по три парты, расположенных друг за другом. Парты рассчитаны на одного человека. Школьник хорошо видит доску в любом из следующих случаев (и только в них):
 - он сидит на первой парте в ряду,
 - ближайшая парта перед ним пуста,
 - за ближайшей партой перед ним сидит ученик меньшего роста.

Сколькими способами можно рассадить в классе 11 учеников группы так, чтобы всем было хорошо видно доску, если известно, что все школьники разного роста? Ответ дайте в виде числа или выражения, содержащего не более двух слагаемых (в слагаемые могут входить факториалы, биномиальные коэффициенты).

5. [5 баллов] Продолжение сторон BC (за точку C) и AD (за точку D) вписанного в окружность четырёхугольника $ABCD$ пересекаются в точке E . Центр O окружности, вписанной в треугольник ABE , лежит на отрезке CD . Найдите наибольшее возможное значение суммы $ED + DO$, если известно, что $BE = 12$.
6. [4 балла] На острове расположено несколько деревень. Между некоторыми деревнями проложены дороги. Известно, что из любой деревни в любую другую можно добраться, причём по единственному маршруту. Также известно, что есть четыре деревни, из которых выходят 5, 6, 7 и 9 дорог соответственно, а из остальных деревень выходит ровно по одной дороге. Сколько деревень может быть на острове?
7. [5 баллов] Найдите все пары целых чисел $(x; y)$, удовлетворяющие уравнению

$$\sqrt{2x - 2y - x^2 - y^2} + \sqrt{1 - |x - y - 1|} = 2.$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1
☒

2
☐

3
☐

4
☐

5
☐

6
☐

7
☐

СТРАНИЦА

2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$(t-1)(t+1) \geq 0 \Rightarrow t_1 = 1; t_2 = -1 \Rightarrow t \in (-\infty; -1) \cup (1; +\infty)$
1-возвращаясь к $(t-1)(t+1) > 0$. Перечислим совокупности значений для t : $\begin{cases} t \in (-3; 3) \\ t \in (-\infty; -1) \cup (1; +\infty) \end{cases}$. Итого, пересечением этих множеств будет $t \in (-3; -1) \cup (1; 3)$
Ответ: $t \in (-3; -1) \cup (1; 3)$.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1
☒

2
☐

3
☐

4
☐

5
☐

6
☐

7
☐

СТРАНИЦА
1 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$x^2 + 4\sqrt{t}tx + 9t^2 - 9 = 0$. Заметим дискриминанта по четной формуле $D_1 = b^2 - 4ac$ для данного уравнения с параметром t ($b = \frac{b}{2} = 2\sqrt{t}t$; $a = 1$; $c = 9t^2 - 9$):

$$D_1 = (2\sqrt{t}t)^2 - 4 \cdot (9t^2 - 9) = 8t^2 - 36t^2 + 36 = -28t^2 + 36 > 0$$

(Уточню при $D_1 \leq 0$ данное квадратное уравнение будет иметь не более одного различного действительного корня).

$$-28t^2 + 36 > 0$$

$$t^2 - 9 < 0$$

$(t-3)(t+3) < 0$ найдем корни уравнения $(t-3)/(t+3) = 0$:

$$t_1 = 3; t_2 = -3 \Rightarrow t \in (-3; 3) \text{ возвращаясь к}$$

$$(t-3)(t+3) < 0.$$

Далее заметим, что нам дано приведенное квадратное уравнение ($a=1$): $x^2 + 4\sqrt{t}tx + 9t^2 - 9 = 0 \Rightarrow$ значит, произведение корней x_1 и x_2 равно c или $x_1 \cdot x_2 = 9t^2 - 9$. По условию

$$x_1 \cdot x_2 > 0 \Rightarrow 9t^2 - 9 > 0 \text{ или } 9(t^2 - 1) > 0 \text{ или}$$

$$(t-1)(t+1) > 0 \Rightarrow \text{найдем корни уравнения}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☒ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА

1 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{cases} a-b=12 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a^2+2ab+b^2+3a+3b=19p^4, \text{ где } p - \text{ простое число.} \end{cases}$$

$$\text{Разложим } a^2+2ab+b^2+3a+3b = (a+b)^2+3(a+b) =$$

$$= (a+b)(a+b+3) = 19p^4, \text{ при этом } 19 - \text{ простое число} \Rightarrow$$

его нельзя разложить на простые множители (у 19 всего один простой множитель - 19) $\Rightarrow$ либо $(a+b):19$, либо $(a+b+3):19$.

Разложим $a+b$ и $a+b+3$ на простые множители в зависимости от двух случаев:

1) $(a+b):19$, тогда $a+b=19 \cdot p^x$, а $a+b+3=p^{4-x}$, где x - некоторое целое неотрицательное число.

2) $(a+b+3):19$, тогда $a+b=p^y$, а $a+b+3=p^{4-y} \cdot 19$, где y - некоторое целое неотрицательное число.

Рассмотрим каждый из случаев по отдельности и разобьем его на подслучаи

1) 1. $0 \leq x \leq 4$: тогда и $x \geq 0$ и $x-4 \geq 0 \Rightarrow$

$(a+b):p$ и $(a+b+3):p \Rightarrow 3:p \Rightarrow p=3$ (не простое число). Но в этом случае тоже если



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☒	☐	☐	☐	☐	☐

СТРАНИЦА
2 из 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

минимизировать x до $x=1$ ($x>0$), то
 $a+b \geq 19 \cdot 3 = 57$, а $a+b+3 \leq 3^3 = 27$. Противоречие

1.2: $\begin{cases} x=0 \\ -(x-4)=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=0 \\ x=4 \end{cases}$

или $\begin{cases} x=0 \\ x=4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \begin{cases} a+b=19 \\ a+b+3=p^4 \geq 22, \text{ но } 22 \text{ не является } 4\text{-ой степенью числа.} \end{cases} \\ \begin{cases} a+b=19p^4 \\ a+b+3 \geq 1 \Rightarrow a+b \geq -2 \Rightarrow \text{либо } a \text{ либо } b, \text{ либо оба не равны } 0, \text{ что противоречит условию задачи.} \end{cases} \end{cases}$

2.1. $0 < y < 4$: тогда и $y > 0$ и $y-4 > 0 \Rightarrow$

$(a+b):p; (a+b+3):p \Rightarrow 3:p \Rightarrow p=3$ (1 - не простое число). Тогда

$a+b=3^y$, а $a+b+3=19 \cdot 3^{y-4}$. Но если $y > 0$

следует, что $y \leq 3$, то тогда $a+b \leq 27$, а

$a+b+3 \geq 19 \cdot 3 = 57$, что невозможно.

2.2. $\begin{cases} y=0 \\ -(y-4)=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y=0 \\ y=4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \begin{cases} a+b=1 \\ a+b+3=19 \cdot p^4 > 19, \text{ что невозможно} \end{cases} \\ \begin{cases} a+b=p^4 \\ a+b+3=19 \Rightarrow a+b=16, \end{cases} \end{cases}$

а $16 \neq 4^2 \geq 2^4 = p^4 \Rightarrow p=2$, что

ничему не противоречит $\Rightarrow a+b=16$

$+ \begin{cases} a+b=16 \\ a-b=12 \end{cases} \Rightarrow 2a=28 \Rightarrow a=14 \text{ и } b=16-a=2.$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☒	☐	☐	☐	☐	☐

СТРАНИЦА
3 из 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Ответ: $n \approx 14$; $b \approx 2$.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☒	☐	☐	☐	☐

СТРАНИЦА

2 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$36 = 8x^2 \Rightarrow 9 = 2x^2 \Rightarrow x^2 = 4,5 \Rightarrow x = \sqrt{4,5}, a$$

$$AB = 2x = 2 \cdot \sqrt{4,5} = 2\sqrt{4,5}.$$

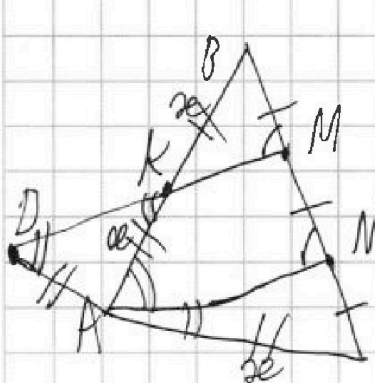
$$\text{Ответ: } AB = 2\sqrt{4,5}.$$



1 ☐ 2 ☐ 3 ☒ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
1 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



$$AB = CD$$

$$BM = MN = NC$$

K - точка пересечения AB и MD

$$\cos(\angle CAN) = \frac{3}{4}$$

Заметим, что $\triangle BKM \sim \triangle BAN$ (по 2-м углам: $\angle B$ - общий, $\angle BMK = \angle BNA$ (из $MK \parallel AN$ и общей сек. BN)) $\Rightarrow \frac{BM}{BN} = \frac{BK}{BA} = \frac{1}{2}$ (из $BM = MN = \frac{1}{2} BN = \frac{1}{2} (BM + MN)$). Значит, отрезки BM , MN и NC из $BC = 6$ и $BM + MN + NC = 6 \Rightarrow BM = MN = NC = 2$.

Далее из $MD \parallel AN$ следует, что $\angle CAN = \angle CDM$, а также $\triangle CMD \sim \triangle CNA$ ($\angle C$ - общий, $\angle CAN = \angle CDM$) $\Rightarrow$

$$\frac{AC}{CD} = \frac{CN}{CM} = \frac{1}{2} \Rightarrow AC = AD = \frac{1}{2} AE, \text{ а так как } AC = AB$$

то $AC = AD = \frac{1}{2} AE = \frac{1}{2} AB = AK = KB$. Далее рассмотрим из $AD = AK$ что $\triangle DAK$ - равност. $\Rightarrow \angle ADK = \angle AKD$, и из $AN \parallel MD$ следует, что $\angle DKA = \angle KAN$ (накр. лежа при сек. AK) $\Rightarrow$. Пусть $\angle B = \alpha$. Тогда и $\angle K = \alpha$, и $\angle A = \alpha$. Тогда $\angle BAC = \angle CAN + \angle KAN = 2\angle CAN$.

Заметим теперь косинус для $\triangle ABC$:

$$BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2 \cdot AB \cdot AC \cdot \cos(\angle CAN)$$

$$36 = 4x^2 + x^2 - 2 \cdot 2x \cdot x \cdot \left(-\frac{3}{4}\right) = 5x^2 + 4x^2 \cdot \frac{3}{4} = 8x^2$$



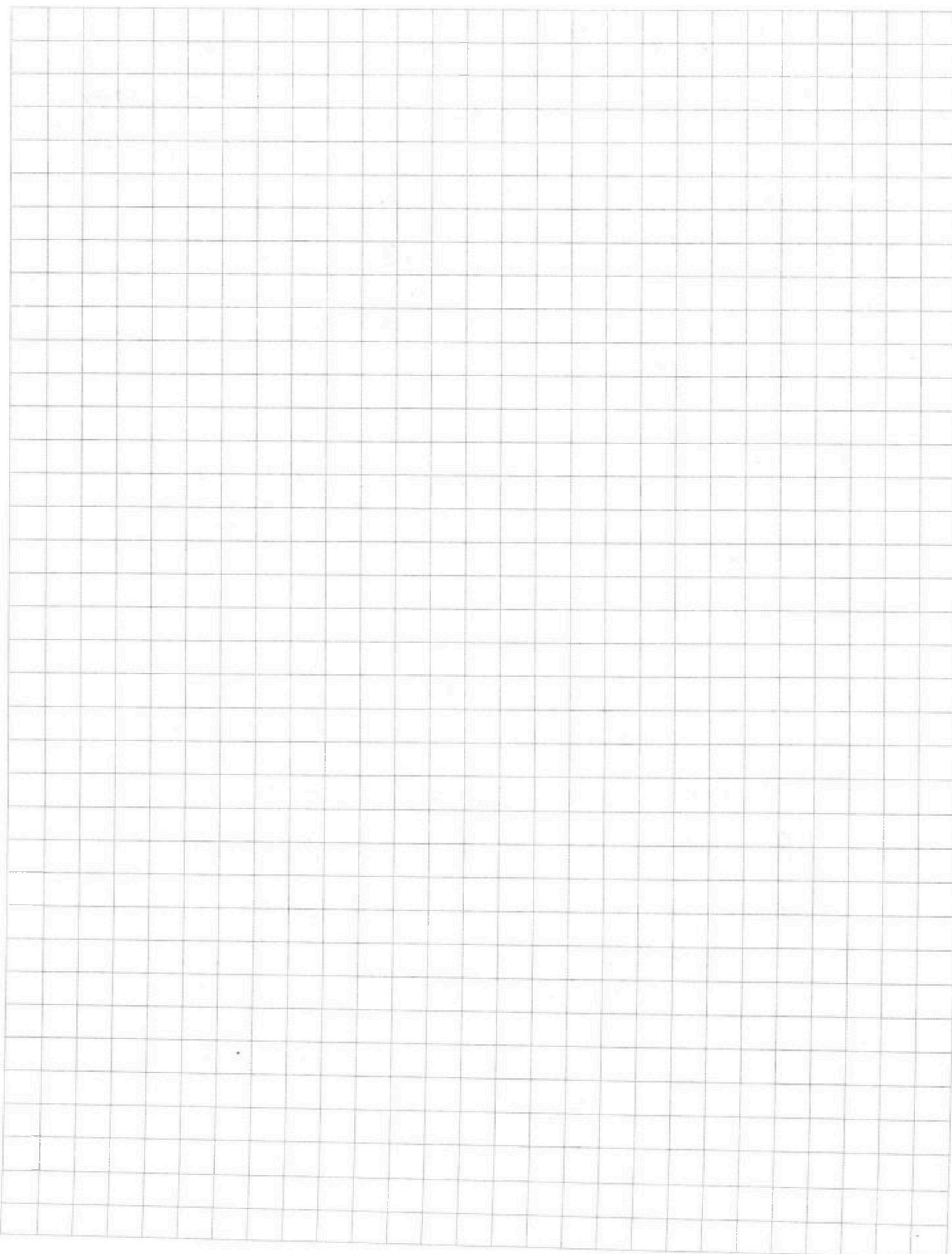
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☒	☐	☐	☐

СТРАНИЦА

из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!





На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☒ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
1 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Заметим, что ровно в классе $4 \cdot 3 = 12$ парта, а учеников всего 11 $\Rightarrow$ ровно 1 парта окажется пустой. При этом если есть школьники разного роста (у каждого свой рост разный), то есть самый низкий и самый высокий человек в классе, при этом низкий может сидеть за 1-ой и 2-ой партой, а именно за 2-ой, только тогда, когда парта перед ним пустая, а самый высокий - либо на 2-ой, либо на 3-ей парте, а именно на 2-ой только тогда, когда парта позади него пуста. При этом рассмотрим одну из возможных расстановок учеников и посчитаем количество таких расстановок, если номер парты в ряду у ученика не меняется, состав которого ряда не меняется, но ряды меняются по мере роста: всего таких расстановок ровно 4! Далее посчитаем число расстановок на 1 и 4! суммируем:

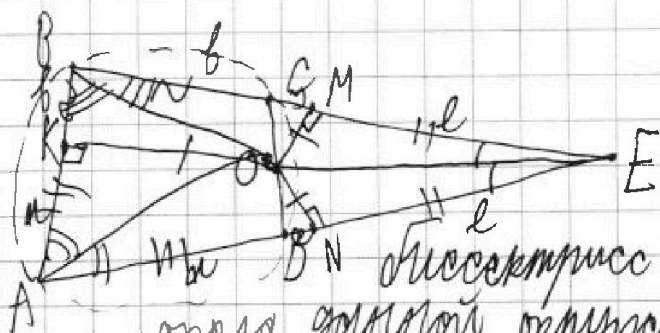


На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☒ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
1 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



Заметим что центр вписанной окружности совпадает с центром окружности, описанной около треугольника $\rightarrow$ EO - биссектриса ΔABE .

Пусть $\angle A = 2\alpha$, тогда из того, что ABC - вписанн. $\Rightarrow \angle C = 180 - 2\alpha \Rightarrow \angle ECD = 180 - (180 - 2\alpha) = 2\alpha \Rightarrow$

$\Delta ABE \sim \Delta CDE$ ($\angle E$ - общий и $\angle BAE = \angle DCE = 2\alpha$) $\Rightarrow$

$\frac{BE}{AE} = \frac{DE}{CE} \Rightarrow BE \cdot CE = AE \cdot DE$. Опустим перпендикуляры из точки O на отрезки BE, AE и AB:

K - точка пересечения AB с перпендик. из O; M - точка пересечения BE с перпендик. из O на BE, N - точка пересечения AE с перпендик. из O на AE.

Прямые точки M, N, K являются точками касания окружности с центром в точке O, прямые

$OK \perp AB$, $ON \perp AE$ (это радиусы данной окружности):

при этом $BM = BK$, $EM = EN$, $AN = AK$ (так как

касательная к окружности с центром в точке O и пересекается в общей точке $\Rightarrow$ из точки пересечения отрезка касательной к окружности (ровны). Опустим

$BK = BM = b$, $AK = AN = a$, $EM = EN = c$.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☒ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
2 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Пусть $N \in \alpha$, а $CM = y$. Тогда $(a \pm x)/(a \pm (a + e)) \cdot (e \pm x) = (b \pm e) \cdot (e \pm y)$ (в зависимости от положения N относительно R) и M относительно C).
 Также так как OE - бисс., то $\frac{OB}{EO} = \frac{CE}{OE} \cdot \frac{OC}{CE}$
 Также из $\frac{BE}{AE} = \frac{DE}{CE} = \frac{OD}{OC} \Rightarrow OD = BE \cdot \frac{OC}{AE}$.

$$ED = BE \cdot \frac{CE}{AE}$$

$$ED + OD = BE \cdot \left(\frac{CE + OC}{AE} \right) = \frac{BE}{AE} \cdot (CE + OC).$$

При этом $AE = a + e$; $CE = e \pm y$; $BE = r$.

$$ED + OD = \frac{r}{a + e} \cdot (e \pm y + OC) =$$

$$\text{из } (a + e) \cdot (e \pm x) = (b + e) \cdot (e \pm y)$$

$$ae + ex \pm ax \pm ex = be + ex \pm ey \pm by$$

$$ae \pm ax \pm be = be \pm ey \pm by$$

$$\pm ax + ae - be \pm ey = \pm ax \pm by$$

$$e(\pm x + a - b \pm y) = \pm ax \pm by$$

$$\frac{1}{e} = \frac{\pm x + a - b \pm y}{\pm ax \pm by} \Rightarrow e = \frac{\pm ax \pm by}{\pm x + a - b \pm y}$$

$$= \frac{r}{a + \frac{\pm ax \pm by}{\pm x + a - b \pm y}} \cdot (e \pm y + OC)$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☒	☐

СТРАНИЦА

2 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

а из которой составленной $(n-4)$ вершины выходят ровно 1 ребро. Посчитаем общее число ребер как половину от суммы степеней вершин (отдельно вершин - то число ребер, которое выходит из каждой вершины): $\frac{5+8+9+(n-4) \cdot 1}{2} =$

$$= \frac{23+n}{2} = \frac{n+23}{2} = n-1$$

$$n+23=2n-2$$

- $n = -23 \Rightarrow n = 25$ - число деревьев, которое может быть на острове.

Ответ: $n=25$.



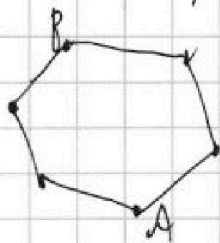
1 2 3 4 5 6 7

☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☒ ☐

СТРАНИЦА
1 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Представим дороги и деревья в виде графа, где точки $\bullet$ - деревья, а ребра — дороги, соединяющие две деревья капогд. Пусть у нас всего n деревьев, при этом чтобы граф был связный, нужно хотя бы $n-1$ ребро (иначе хотя бы одна деревня окажется изолированной), но при этом при количестве ребер не менее n в графе обязательно будут циклы, рассмотрим один из них (возможных, вообще-то две произвольные точки A, B ; при этом из A в B можно пойти уже минимум 2-мя маршрутами (для



любого цикла эта будет так, что можно по нему можно обойти (пройти через все вершины) и вернуться в исходную, и значит, можно пройти абсолютно всю сторону и также все обойти. Но если в графе меньше n ребер, всего $n-1$ ребро, то граф может быть и $n-1$ ребер при n вершинах. При этом у 4-х вершин выходит 5, 6, 4 и 3 ребра соответственно;



1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☒

СТРАНИЦА
1 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Для начала покажем, что под корнем могут находиться только неотрицательные числа $\Rightarrow$
 $1 - |x - y - 1| \geq 0$ или $|x - y - 1| \leq 1$, а так как модуль всегда неотрицателен, то $|x - y - 1| \geq 0$, а так как x и y — целые числа, то $|x - y - 1| = 0, 1$.
 Рассмотрим 2 этих случая:

1) $|x - y - 1| = 0 \Rightarrow \sqrt{1 - |x - y - 1|} = \sqrt{1} = 1 \Rightarrow$

$\sqrt{2x - 2y - x^2 - y^2} = 1 \Rightarrow 2x - 2y - x^2 - y^2 = 1$ или

$2(x - y) - (x^2 + y^2) = 1$. Из $|x - y - 1| = 0$ следует, что $x - y - 1 = 0$ или $x - y = 1$. Подставим $x - y = 1$:

$2 \cdot 1 - (x^2 + y^2) = 1 \Rightarrow x^2 + y^2 = 1$

$x - y = 1 \Rightarrow x = y + 1$

$\begin{cases} x^2 + y^2 = 1 \\ x = y + 1 \end{cases}$

$(y + 1)^2 + y^2 = 1 \Rightarrow y^2 + 2y + 1 + y^2 - 1 = 2y^2 + 2y = 2y(y + 1) = 0$,

корни этого уравнения $y_1 = 0$ и $y_2 = -1 \Rightarrow$

$x_1 = y_1 + 1 = 1$; $x_2 = y_2 + 1 = -1 + 1 = 0$.

Получим две пары (x, y) : $(1, 0)$; $(0, -1)$.

2) $|x - y - 1| = 1 \Rightarrow \begin{cases} x - y - 1 = 1 \\ x - y - 1 = -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x - y = 2 \\ x - y = 0 \end{cases}$

$1 - |x - y - 1| = 0 \Rightarrow \sqrt{1 - |x - y - 1|} = 0 \Rightarrow$

$\sqrt{2x - 2y - x^2 - y^2} = 0 \Rightarrow 2x - 2y - x^2 - y^2 = 0$

$2(x - y) - (x^2 + y^2) = 0$. Тогда:

$\begin{cases} x - y = 2 \\ x - y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2 \cdot 2 - (x^2 + y^2) = 0 \\ 2 \cdot 0 - (x^2 + y^2) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 = 4 \\ x^2 + y^2 = 0 \end{cases}$

Из $x^2 + y^2 = -4$ получим противоречие для этой системы.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☒

СТРАНИЦА

2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

в этом случае $|x - y - 1| = 1 \Rightarrow 1 - |x - y - 1| = 0 \Rightarrow$

$$\sqrt{1 - |x - y - 1|} = 0 \Rightarrow \sqrt{2x - 2y - x^2 - y^2}$$

тут мы: $x^2 \geq 0$; $y^2 \geq 0 \Rightarrow x^2 + y^2 \geq 0$, но в данном случае $x^2 + y^2 = -4$. Далее перейдем к системе уравнений:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x - y = 2 \Rightarrow x = y + 2 \end{cases}$$

$$(y + 2)^2 + y^2 = y^2 + 4y + 4 + y^2 = 2y^2 + 4y + 4 = 0 \text{ или}$$

$$y^2 + 2y + 2 = 0. \text{ Выделим полный квадрат:}$$

$$y^2 + 2y + 1 = -1 \text{ или } (y + 1)^2 = -1, \text{ получаем противоречие } ((y + 1)^2 \geq 0, -1 < 0).$$

Всего за 2 случая мы получили 2 пары (x, y) :
 $(1, 0); (0, -1).$

Ответ: 2 пары: $(1, 0); (0, -1).$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Максимизировать $(4-x)$ ~~$(x-4)$~~ $go (4-x) \geq 3 (x \geq 4)$, то
 $a+b+3 \leq 19.$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

СТРАНИЦА
из

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Для начала поймём, что под корнем могут находиться только неотрицательные числа $\Rightarrow$

$$1 - |x - y - 1| \geq 0 \Rightarrow |x - y - 1| \leq 1, \text{ при этом}$$

$|x - y - 1| \geq 0$ (модуль всегда неотрицательный). Пока

же только пока x, y — целые, то и $|x - y - 1|$ — тоже

целое. Рассмотрим 2 случая:

1) $|x - y - 1| = 0 \Rightarrow x - y - 1 = 0 \Rightarrow x - y = 1$

2) $|x - y - 1| = 1$

$$x - y - 1 = 1$$

$$x - y - 1 = -1$$

$$x - y = 2$$

$$x - y = 0$$

При этом в 1-ом случае $1 - |x - y - 1| = 1 \Rightarrow$

$$\sqrt{1 - |x - y - 1|} \geq 1 \Rightarrow \sqrt{2x - 2y - x^2 - y^2} \geq 2 - 1 \geq 1 \Rightarrow$$

$$2x - 2y - x^2 - y^2 \geq 1 \text{ или } 2(x - y) - (x - y)(x + y) \geq 1$$

или $(x - y)(2 - x - y) \geq 1$, а учитывая то, что

в 1-ом случае получили $x - y = 1$, то и $2 - x - y \geq 1$

$$\text{или } -x - y \geq -1 \Rightarrow x + y \geq 1. \text{ Получаем систему}$$

$$\text{уравнений: } \begin{cases} x - y = 1 \\ x + y \geq 1 \end{cases} \quad \begin{cases} x \geq 2 \Rightarrow x = 1 \\ y \geq 1 - x \geq 0 \end{cases}$$

Далее перейдём ко 2-ому случаю:



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1
☐

2
☐

3
☐

4
☐

5
☐

6
☐

7
☐

СТРАНИЦА
из

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$x^2 + 4\sqrt{2}tx + 9t^2 - 9 = 0$$

Найдём дискриминант данного квадратного уравнения (дискриминант по четной формуле):

$$D_1 = k^2 - ac = 2\sqrt{2}t - 9t^2 + 9 > 0 \text{ (иначе будет не}$$

$k = \frac{b}{2} = 2\sqrt{2}t$; $a = 1$; $c = 9t^2 - 9$ более одного действительного корня в данном уравнении).

$$-9t^2 + 2\sqrt{2}t + 9 > 0$$

$9t^2 - 2\sqrt{2}t - 9 < 0$. Далее найдём корни данного квадратного уравнения при $9t^2 - 2\sqrt{2}t - 9 = 0$.

$$D_2 = k^2 - ac =$$