



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

11 КЛАСС. Вариант 11



1. [3 балла] Углы выпуклого многоугольника образуют арифметическую прогрессию, имеющую разность 2° и начинающуюся с угла 143° . Какое наибольшее число вершин может быть у такого многоугольника?
2. [4 балла] Целые числа x, y, z удовлетворяют равенству $x \ln 16 + y \ln 8 + z \ln 24 = \ln 6$. Найдите наименьшее возможное значение выражения $x^2 + y^2 + z^2$.
3. [4 балла] Из множества M , состоящего из семи подряд идущих натуральных чисел, выбираются шестёрки попарно различных чисел такие, что сумма чисел в каждой из шестёрок – простое число. Пусть p и q – две из таких сумм. Найдите множество M , если $p^2 - q^2 = 792$.
4. [5 баллов] Диагонали BD и AC трапеции $ABCD$ пересекаются в точке M , а отношение оснований $AD : BC = 1 : 2$. Точки I_1 и I_2 – центры окружностей ω_1 и ω_2 , вписанных в треугольники BMC и AMD соответственно. Прямая, проходящая через точку M , пересекает ω_1 в точках X и Y , а ω_2 – в точках Z и W (X и Z находятся ближе к M). Найдите радиус окружности ω_1 , если $I_1I_2 = 13/2$, а $MZ \cdot MY = 5$.
5. [5 баллов] Что больше: $5 - 4 \sin \frac{3\pi}{14}$ или $4 \cos \frac{\pi}{7} - 5 \sin \frac{\pi}{14}$?
6. [4 балла] Даны 12 точек: 7 из них лежат на одной окружности в плоскости α , а остальные 5 расположены вне плоскости α . Известно, что если четыре точки из всех 12 лежат в одной плоскости, то эта плоскость – α . Сколько существует выпуклых пирамид с вершинами в данных точках?
7. [6 баллов] Дана правильная шестиугольная пирамида $SAB CDEF$ (S – вершина) со стороной основания 2 и боковым ребром 4. Точка X лежит на прямой SF , точка Y – на прямой AD , причём отрезок XY параллелен плоскости SAB (или лежит в ней). Найдите наименьшую возможную длину отрезка XY .



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1
☒

2
☐

3
☐

4
☐

5
☐

6
☐

7
☐

СТРАНИЦА
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

№1

Для выпуклого n -угольника сумма углов равна $180^\circ \cdot (n-2)$;

Углы многоугольника составляют арифметическую прогрессию. a_n — n -й член арифметической прогрессии, d — разность арифметической прогрессии; a_1 — первый член арифметической прогрессии.

$$a_1 = 143^\circ; \quad d = 2^\circ; \quad a_n = a_1 + (n-1)d$$

$$180^\circ(n-2) = \frac{n \cdot (a_1 + a_n)}{2} = \frac{n \cdot (2a_1 + (n-1)d)}{2}$$

$$180(n-2) = \frac{n \cdot (2 \cdot 143^\circ + (n-1) \cdot 2)}{2} = n \cdot (143^\circ + n - 1) = n \cdot (142 + n)$$

$$180n - 360 = 142n + n^2; \quad n^2 - 38n + 360 = 0$$

$$D = 38^2 - 4 \cdot 360 = 4 \cdot 19^2 - 4 \cdot 360 = 4 \cdot (19^2 - 360) =$$

$$= 4$$

$$n = \frac{38 \pm \sqrt{D}}{2} = \frac{38 \pm 2}{2} = 19 \pm 1 = \{18; 20\}$$

Наибольшее возможное n — 20.

Ответ: 20



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☒	☐	☐	☐	☐	☐

СТРАНИЦА
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

№2

$$x \ln 16 + y \ln 8 + z \ln 24 = \ln 6$$

$$x \ln 2^4 + y \ln 2^3 + z \ln(2^3 \cdot 3) = \ln(2 \cdot 3)$$

$$4x \ln 2 + 3y \ln 2 + 3z \ln 2 + z \ln 3 = \ln 2 + \ln 3; (4x + 3y + 3z) \ln 2 - \ln 2 = (1 - z) \ln 3$$

т.к. $x, y, z \in \mathbb{Z}$:

$$\begin{cases} 4x + 3y + 3z = 1 \\ 1 - z = 0 \end{cases}, \text{ иначе } (4x + 3y + 3z) \ln 2 - \ln 2 \neq (1 - z) \ln 3$$

из $1 - z = 0$ следует, что $z = 1$.

Тогда $4x + 3y + 3 = 1; 4x + 3y = -2; x = \frac{-2 - 3y}{4}$

$$x^2 + y^2 + z^2 = x^2 + y^2 + 1 = \frac{(2 + 3y)^2}{16} + y^2 + 1 \rightarrow \text{минимально.}$$

$$f(y) = \frac{(2 + 3y)^2}{16} + y^2 + 1; f(y) - \text{минимум} \Rightarrow f'(y) = 0$$

$f(y)$ - парабола ветвями вверх

$$f'(y) = \frac{2 \cdot (2 + 3y) \cdot 3}{16} + 2y = \frac{12 + 18y + 32y}{16} = 0;$$

$$12 + 50y = 0; y = -\frac{12}{50} = -0,24$$

Тогда $\frac{(2 + 3y)^2}{16} + y^2 + 1 = \frac{(2 - 3 \cdot 0,24)^2}{16} + (0,24)^2 + 1 =$

$$= 0,1024 + 0,0576 + 1 = 1,16 - \text{минимальное значение } (x^2 + y^2 + z^2)$$

Ответ: 1,16



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☒	☐	☐	☐	☐

СТРАНИЦА

4 ИЗ 4

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

№3

$$M = \{a_1, a_2, a_3, \dots, a_7\} = \{a_1, a_1+1, a_1+2, \dots, a_1+6\}; a_1 \in \mathbb{N}$$

p, q - простые; $p = a_1 + a_2 + \dots + a_7 - a_p$, где $a_p \in \{a_1, a_2, \dots, a_7\}$

Тогда $a_p = a_1 + k_p$, где $k_p \in \mathbb{Z}$ и $k_p \in [0; 6]$.

$$p = a_1 + a_1 + 1 + \dots + a_1 + 6 - a_1 - k_p = 6 \cdot a_1 + 21 - k_p > 20$$

т.к. p - простое, $6 \cdot a_1 + 21 - k_p \not\equiv 3 \Rightarrow k_p \not\equiv 3$ и

$$6 \cdot a_1 + 21 - k_p \not\equiv 2 \Rightarrow 6 \cdot a_1 + 21 - k_p \equiv 1 \pmod{2};$$

$$k_p \equiv 0 \pmod{2}; k_p = \{2; 4\}.$$

Аналогично для q :

$$q = a_1 + a_2 + \dots + a_7 - a_q; a_q \in \{a_1, a_2, \dots, a_7\}$$

$$a_q = a_1 + k_q; k_q \in \mathbb{Z} \text{ и } k_q \in [0; 6]$$

т.к. q - простое и $q > 20$:

$$q = 6a_1 + 21 - k_q; k_q = \{2; 4\}$$

$$p^2 - q^2 = (p - q)(p + q) = 792$$

$$792 = (p - q)(p + q) = (6a_1 + 21 - k_p - 6a_1 - 21 + k_q)(6a_1 + 21 - k_p + 6a_1 + 21 - k_q) = (k_q - k_p)(12a_1 + 42 - k_p - k_q)$$

1) При $k_q = k_p$: $k_q - k_p = 0$; $(k_q - k_p)(12a_1 + 42 - k_p - k_q) = 0 \neq 792$
(противоречие)

2) $k_q = 2$; $k_p = 4$: $\begin{cases} (k_q - k_p) \cdot (12a_1 + 42 - k_p - k_q) < 0 \\ (k_q - k_p) \cdot (12a_1 + 42 - k_p - k_q) = 792 > 0 \end{cases}$
(Противоречие)

3) $k_q = 4$; $k_p = 2$: $\begin{aligned} (k_q - k_p) \cdot (12a_1 + 42 - k_p - k_q) &= 792 \\ (4 - 2) \cdot (12a_1 + 42 - 4 - 2) &= 792 \\ (12a_1 + 42 - 6) &= 396 \\ 2a_1 + 6 &= 66 \\ a_1 + 3 &= 33; a_1 &= 30 \end{aligned}$

Тогда $a_2 = 31$; $a_3 = 32$; $a_4 = 33$; $a_5 = 34$; $a_6 = 35$; $a_7 = 36$

$$M = \{30; 31; 32; 33; 34; 35; 36\}$$

Ответ: $\{30; 31; 32; 33; 34; 35; 36\}$.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА

1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

14

Дано:

ABCD - трапеция;

$BD \cap AC = M$

$\frac{AD}{BC} = \frac{1}{2}$

ω_1 - окр. впис. в $\triangle BMC$;

ω_2 - окр. впис. в $\triangle AMD$

l - прямая

$M \in l$;

$l \cap \omega_1 = X, Y$

$l \cap \omega_2 = Z, W$

I_1 - центр ω_1

I_2 - центр ω_2

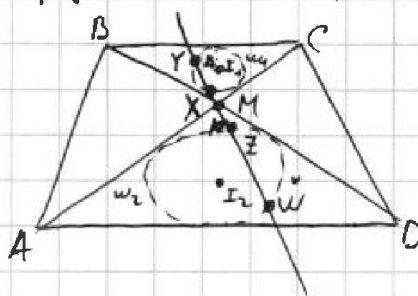
$I_1 I_2 = \frac{13}{2}$

$MZ \cdot MY = 5$

$r_1 = ?$

Решение:

r_1 - радиус окр. ω_1 ; r_2 - радиус ω_2



1) $I_1 \in$ биссектрисе $\angle BMC$

$I_2 \in$ биссектрисе $\angle AMD$

$\angle CMI_1 = \frac{1}{2} \angle CMB = \frac{1}{2} \angle AMD = \angle AMI_2$, тогда I_1, M, I_2 лежат на одной прямой.

$I_1 I_2 = I_1 M + MI_2$;

2) $\triangle BCM \sim \triangle AMD$ ($\angle BCA = \angle CAD$, какрест. лем.; $\angle CBD = \angle BDA$, какрест. лем.; $\angle BMC = \angle AMD$, верт.) по 3 углам; k - коэффициент подобия

$k = \frac{BC}{AD} = 2$; в подобных треугольниках $k = \frac{r_1}{r_2}$; $r_2 = \frac{r_1}{k}$;

3) $\triangle AMD$ ~~подобен~~ ~~гомотетичен~~ $\triangle BMC$ ~~относ. к M~~ с коэф. $-k$; ~~AMD~~ $\rightarrow$ Тогда $MX = k MZ$;
 $MY = k MW$;

$MZ \cdot MY = k \cdot MX \cdot MY$; $I_1 I_2 \cap \omega_1 = T_1$;

отрезок $I_1 I_2 \cap \omega_2 = T_2$; $MT_1 = k MT_2$;

$MX \cdot MY = MT_1 \cdot (MT_1 + 2r_1)$

4) $I_1 I_2 = MT_1 + r_1 + MT_2 + r_2 = MT_1 + r_1 + \frac{MT_1 + r_1}{k} = (1 + \frac{1}{k})(MT_1 + r_1)$

$MT_1 = \frac{I_1 I_2}{1 + \frac{1}{k}} - r_1$;

5) $MX \cdot MY = (\frac{I_1 I_2}{1 + \frac{1}{k}} - r_1) \cdot (\frac{I_1 I_2}{1 + \frac{1}{k}} + r_1) = \frac{(I_1 I_2)^2}{(1 + \frac{1}{k})^2} - r_1^2$;

$r_1 = \sqrt{\frac{(I_1 I_2)^2}{(1 + \frac{1}{k})^2} - MX \cdot MY} = \sqrt{\frac{13^2}{4 \cdot \frac{9}{4}} - 5} = \sqrt{\frac{169 - 45}{9}} = \frac{12}{3}$

Ответ: $\frac{12}{3}$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

☐ ☐ ☐ ☐ ☒ ☐ ☐

СТРАНИЦА

1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

N5

$5 - 4 \sin \frac{3\sqrt{3}}{14} = 5$ Обозначим $\frac{\sqrt{3}}{14}$ за d , тогда $\sin \frac{3\sqrt{3}}{14} = \sin 3d$,
 ~~$5 - 4 \sin \frac{3\sqrt{3}}{14} = 5$~~ $\cos \frac{\sqrt{3}}{14} = \cos 2d$

$$5 - 4 \sin \frac{3\sqrt{3}}{14} = 5 - 4 \sin(3d)$$

$$\sin 3d = \sin(d+2d) = \sin d \cos 2d + \sin 2d \cos d = \sin d \cos^2 d - \sin^3 d + 2 \sin d \cos^2 d$$

$$5 - 4 \sin(3d) = 5 - 4(3 \sin d \cos^2 d - \sin^3 d) = 5 - 4(3 \sin d - 4 \sin^3 d) =$$

$$= 5 - 12 \sin d + 16 \sin^3 d$$

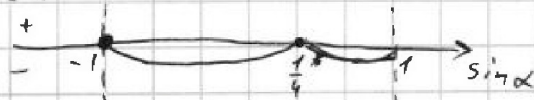
$$4 \cos \frac{\pi}{7} - 5 \sin \frac{\pi}{14} = 4 \cos 2d - 5 \sin d = 4 - 5 \sin d - 8 \sin^2 d$$

Сравнивание $5 - 4 \sin \frac{3\sqrt{3}}{14}$ и $4 \cos \frac{\pi}{7} - 5 \sin \frac{\pi}{14}$ аналогично
сравниванию $5 - 12 \sin d + 16 \sin^3 d$ и $4 - 5 \sin d - 8 \sin^2 d$, аналогично
сравниванию 0 и $(4 - 5 \sin d - 8 \sin^2 d) - (5 - 12 \sin d + 16 \sin^3 d)$

$$4 - 5 \sin d - 8 \sin^2 d - (5 - 12 \sin d + 16 \sin^3 d) = -16 \sin^3 d - 8 \sin^2 d + 7 \sin d - 1$$

$$= -(\sin d - \frac{1}{4})(\sin d - \frac{1}{4})(\sin d + 1) \cdot 4^2$$

Воспользуемся методом интервалов для определения знака:



При $\sin d \in (-1; \frac{1}{4})$ $-4 + 7 \sin d - 8 \sin^2 d - 16 \sin^3 d < 0$

При $\sin d \in (\frac{1}{4}; 1)$ $-1 + 7 \sin d - 8 \sin^2 d - 16 \sin^3 d > 0$

Проведем обратную замену:

$$\sin d = \sin \frac{\pi}{14} \neq \frac{1}{4} ; \sin \frac{\pi}{14} < \sin \frac{\pi}{6} < \frac{1}{2} < \frac{1}{4} \cdot \text{т.к. } \sqrt{2}(\sqrt{3}-1) < 1 \text{ т.к.}$$

$$\sin \frac{\pi}{14} \neq -1$$

$$2(4 - 2\sqrt{3}) < 1, \text{ т.к. } 4\sqrt{3} > 7$$

Тогда $5 - 4 \sin \frac{3\sqrt{3}}{14} > 4 \cos \frac{\pi}{7} - 5 \sin \frac{\pi}{14}$

Ответ: $5 - 4 \sin \frac{3\sqrt{3}}{14} > 4 \cos \frac{\pi}{7} - 5 \sin \frac{\pi}{14}$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☒ ☐

СТРАНИЦА

1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

№6

Все основания пирамид, у которых ≥ 4 угла лежат в плоскости d . Тогда кол-во пирамид с основаниями с ≥ 4 углами = $C_7^4 \cdot 5 + C_7^5 \cdot 5 + C_7^6 \cdot 5 + C_7^7 \cdot 5 = 5 \cdot (C_7^4 + C_7^5 + C_7^6 + C_7^7)$

кол-во кол-во
способов точек вне
выбрать 4 d
точки в d

Любые 4 точки не в 1 плоскости образуют треугольную пирамиду. Тогда всего треугольных пирамид = кол-во способов выбрать 4 точки — кол-во способов выбрать 4 точки (все в d) = $C_{12}^4 - C_7^4$

Тогда всего выпуклых пирамид:

$$C_{12}^4 - C_7^4 + 5 \cdot (C_7^4 + C_7^5 + C_7^6 + C_7^7) = \frac{12!}{4! \cdot 8!} - \frac{7!}{4! \cdot 3!} + 5 \cdot \left(\frac{7!}{4! \cdot 3!} + \frac{7!}{5! \cdot 2!} + \frac{7!}{6! \cdot 1!} \right)$$

$$= \frac{12!}{4! \cdot 8!} - \frac{7!}{4! \cdot 3!} + 5 \cdot \left(\frac{7!}{4! \cdot 3!} + \frac{7!}{5! \cdot 2!} + \frac{7!}{6! \cdot 1!} \right)$$

$$= \frac{12!}{4! \cdot 8!} + 5 \cdot (35 + 21 + 1) = \frac{12!}{4! \cdot 8!} + 5 \cdot 57 = \frac{12 \cdot 11 \cdot 10 \cdot 9}{4!} + 5 \cdot 57 =$$

$$= 99 \cdot 5 + 5 \cdot 57 = 5 \cdot 156 = 780$$

Ответ: 780 выпуклых пирамид.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7
☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☒

СТРАНИЦА

1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

№ 7

Дано:

$SAB CDEF$ (5-вершинка),

$ABCDEF$ - прав. шестиугольник

$AB = 2$

$AS = BS = CS = DS = ES = FS = 4$

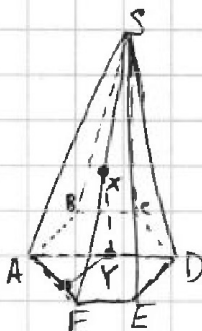
$X \in SF$

$Y \in AD$

$XY \parallel (SAB)$

$\min XY = ?$

Решение:



1) Рассмотрим плоскость, проходящую через XY , ~~параллельную~~ параллельную (SAB)

На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
из

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



$$5 - 4 \sin \frac{3\pi}{14}$$

$$4 \cos \frac{\pi}{7} - 5 \sin \frac{\pi}{14}$$



$$1 - \sin d (16 \sin^2 d + 8 \sin d + 7)$$

$(-\frac{1}{4})$ - вершина

$$= \frac{\sqrt{2}(\sqrt{3}-1)}{4} (2 \cdot (4 - 2\sqrt{3}) + 2\sqrt{2}(\sqrt{3}-1) - 7) =$$

$$= -\frac{\sqrt{2}(\sqrt{3}-1)}{4} \cdot (12 - 2\sqrt{3} + 2\sqrt{2}(\sqrt{3}-1) - 7) = -\frac{\sqrt{2}(\sqrt{3}-1)}{4} \cdot (5 - 2\sqrt{3} + 2\sqrt{2}(\sqrt{3}-1))$$

$$= -\frac{\sqrt{2}(\sqrt{3}-1)}{4} + \frac{\sqrt{2}(\sqrt{3}-1)}{2} - (\sqrt{3}-1)^2 = \frac{2\sqrt{6}(\sqrt{3}-1) - \sqrt{2}(\sqrt{3}-1) - 4(\sqrt{3}-1)^2}{4}$$

$$= \frac{(\sqrt{3}-1)}{4} \cdot (2\sqrt{6} - \sqrt{2} - 4) \stackrel{?}{<} 1$$

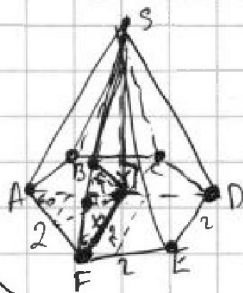
$$(\sqrt{3}-1)(2\sqrt{6} - \sqrt{2} - 4) \stackrel{?}{<} 4$$

$$8\sqrt{2} - \sqrt{6} - 4\sqrt{3} - 2\sqrt{6} + \sqrt{2} \stackrel{?}{<} 0$$

$$7\sqrt{2} - 3\sqrt{6} - 4\sqrt{3} \stackrel{?}{<} 0$$

$$7\sqrt{2} - \sqrt{3} \cdot (3\sqrt{2} + 4) \stackrel{?}{<} 0 \quad (ga) \Rightarrow \text{пр. уменьш. - win}$$

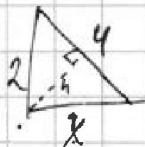
$$5 - 4 \sin \frac{3\pi}{14} > 4 \cos \frac{\pi}{7} - 5 \sin \frac{\pi}{14}$$



$$(ABS) \parallel (FYS) \Rightarrow FY \parallel AB \Rightarrow Y = FC \cap AD$$

$$FY = \frac{1}{2} FC$$

$$\frac{180 \cdot 4}{6} = 120$$



$$x^2 = 16 - 4 = 12;$$

$$x = 2\sqrt{3}$$

$$4h = 2x; h = \frac{x}{2} = \sqrt{3}$$

$$XY = AS = 4$$



$$S = \frac{13}{2}$$

$$k = 2$$

$$r_{w1} + \frac{kn}{r_{w1}} + k(r_{w1} + \frac{kn}{r_{w1}}) = S$$

$$(k+1)r_{w1}^2 + (k+1)kn - S r_{w1} = 0$$

$$r_{w1} + MT + k(r_{w1} + MT) = S$$

$$MZ \cdot MY = \frac{S}{k} \cdot \frac{MX \cdot MY}{k} = \frac{MT \cdot r_{w1}}{k} = \frac{S}{k}$$

$$MT + MT = \frac{kn}{k r_{w1}}$$

$$r_{w1} + \frac{n}{k r_{w1}} + k r_{w1} + \frac{n}{r_{w1}} = S$$

$$(k+1)r_{w1}^2 + S r_{w1} + n(1 + \frac{1}{k}) = 0$$

$$D = S^2 - 4 \cdot n^2 \cdot \frac{(k+1)^2}{k} = \frac{169}{4} - 4 \cdot 100 \cdot \frac{9}{2} =$$

$$= 6 + \frac{5}{6} + 2 + \frac{1}{2} = 9, \dots$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
из

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\sin \frac{\pi}{14} \stackrel{?}{=} \frac{1}{4}$$

$$\frac{\pi}{12} \quad \frac{\pi}{15}$$
$$\frac{180}{12} / \frac{12}{60} \quad \frac{180}{15} / \frac{12}{60}$$

$$x \rightarrow 2x$$

$$\sin \frac{\pi}{14} \stackrel{?}{=} \frac{1}{4}$$

$$\frac{\sqrt{2}(\sqrt{3}-1)}{4} < \frac{1}{4}$$

$$2(4-2\sqrt{3}) \stackrel{?}{<} 1$$

$$4-2\sqrt{3} \stackrel{?}{<} \frac{1}{2}$$

$$2\sqrt{3} \stackrel{?}{>} 3\frac{1}{2} = \frac{7}{2}; \quad \sqrt{3} \stackrel{?}{>} \frac{7}{4}$$

$$\frac{3}{4} < \frac{49}{16} \text{ нет}$$

$$\frac{\sqrt{2}(\sqrt{3}-1)}{4} \stackrel{?}{<} \frac{1}{4}$$

$$\sqrt{2}(\sqrt{3}-1) \stackrel{?}{<} 1$$

$$2 \cdot (3+1-2\sqrt{3}) \stackrel{?}{<} 1$$

$$8-4\sqrt{3} \stackrel{?}{<} 1$$

$$4\sqrt{3} \stackrel{?}{>} 7; \quad \sqrt{3} \stackrel{?}{>} \frac{7}{4}; \quad \frac{3}{4} > \frac{49}{16} \text{ (нет)}$$

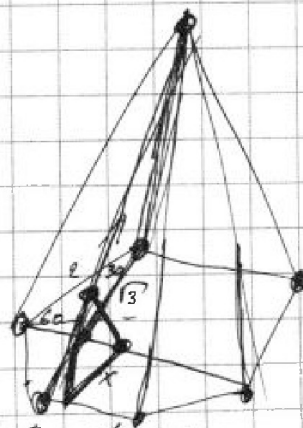
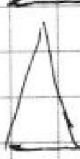
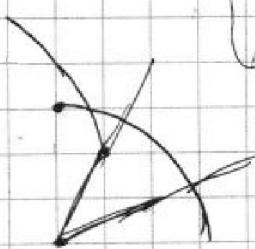
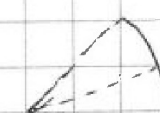
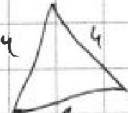
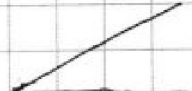
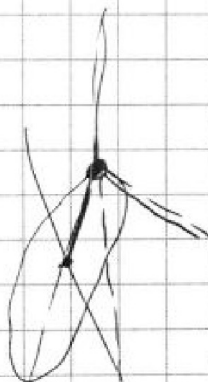
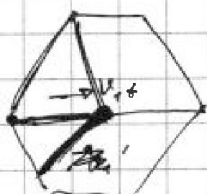


$$16x^2 = x^2 + 1;$$

$$x = \sqrt{\frac{1}{15}}$$

$$\sin \alpha = \frac{1}{4};$$

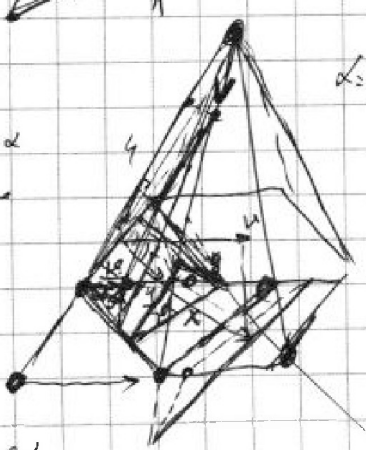
$$1 - \frac{1}{16} = \frac{15}{16}$$



$$L = x^2 + y^2 - 2xy \cos \alpha$$
$$L' = 0 = 2x + 2y + 2xy \sin \alpha$$



$$x \in (0; \sqrt{3})$$
$$x \in (0; 2)$$



$$L' = 4x^2 + 2x^2 - 2 \cdot x \cdot \cos \alpha$$

$$L' = 0 = 2^2 - 2 \cdot 4 \cdot \cos \alpha$$

$$-1 = -2 \cos \alpha; \quad \cos \alpha = \frac{1}{2}; \quad \alpha = 60^\circ$$

$$\cos \alpha = +\frac{1}{2}; \quad \alpha = 120^\circ$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1
☐

2
☐

3
☐

4
☐

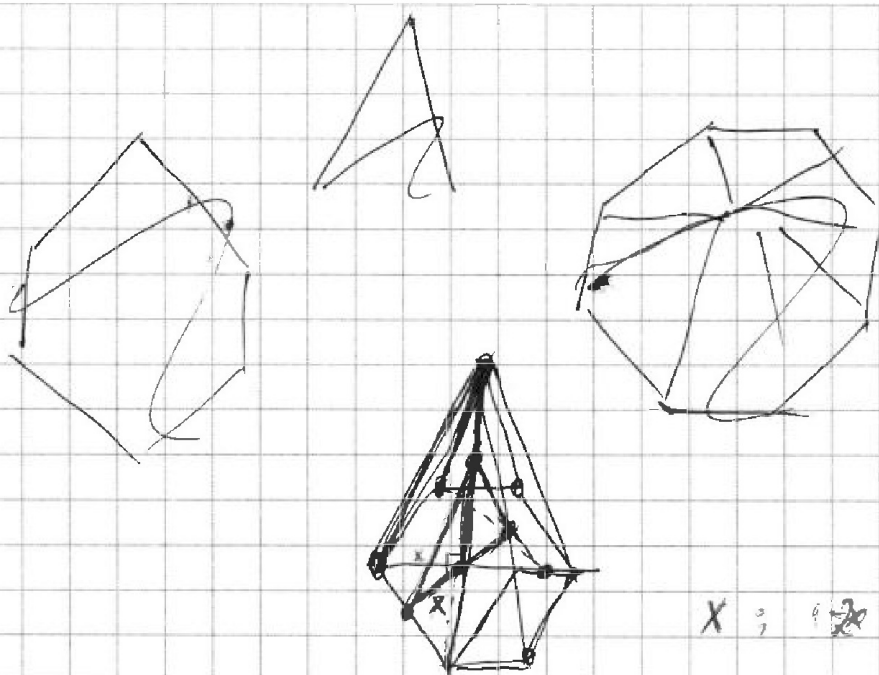
5
☐

6
☐

7
☐

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!





На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
из

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$5 - 4\sin \frac{3\pi}{14} \quad ? \quad 4\cos \frac{\pi}{7} - 5\sin \frac{\pi}{14}$$

$$\frac{\pi}{14} = \frac{90}{7} = 12.8 \dots$$

$$\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha = 1 - 2\sin^2 \alpha$$

$$5 - 4\sin 3\alpha \quad ? \quad 4\cos 2\alpha - 5\sin \alpha = 4 - 5\sin \alpha - 8\sin^2 \alpha$$

$$\begin{aligned} \sin(\alpha + 2\alpha) &= \sin 2\alpha \cos \alpha + \sin \alpha \cos 2\alpha = \cos^2 \alpha (2\sin \alpha) \\ &= 2\sin \alpha \cos^2 \alpha + \sin \alpha \cos^2 \alpha - \sin^3 \alpha = \sin \alpha (3\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha) \\ &= \sin \alpha (3 - 4\sin^2 \alpha) \end{aligned}$$

$$5 - 12\sin \alpha + 16\sin^3 \alpha \quad ? \quad 4 - 5\sin \alpha - 8\sin^2 \alpha$$

$$1 \quad 15 = \frac{\sqrt{2}(\sqrt{3}-1)}{4} > \left(\frac{1}{2}\right)$$

$$\sin\left(\frac{\pi}{8}\right) = \sin\left(\frac{\sqrt{2}}{4} \cdot \frac{1}{2}\right)$$

$$\begin{aligned} ? \quad 12\sin \alpha - 5\sin \alpha - 8\sin^2 \alpha - 16\sin^3 \alpha &= \\ ? \quad 7\sin \alpha - 8\sin^2 \alpha - 16\sin^3 \alpha &= \\ = -\sin \alpha (8\sin^2 \alpha + 8\sin \alpha - 7) \end{aligned}$$

$$16\sin^2 \alpha + 8\sin \alpha - 7$$

$$D = 4^2 \cdot 2^2 + 4 \cdot 4^2 \cdot 7 = 4^3 \cdot (8) = 4^4 \cdot 2$$

$$\sin \alpha = \frac{8 \pm 16\sqrt{2}}{32} = \frac{1 \pm 2\sqrt{2}}{4}$$

$$\sin \frac{\pi}{4} = 2\sin \frac{\pi}{8} \sqrt{1 - \sin^2 \frac{\pi}{8}}; \quad \sin^2 \frac{\pi}{8} = 1 - \sin^2 \frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

$$\sin \alpha < \frac{1}{2}$$

$$\sin \alpha \cdot (16\sin^2 \alpha + 8\sin \alpha - 7) < \frac{1}{2} \cdot (4 + 4 - 7) = \left(\frac{1}{2}\right)$$

$$\sin \alpha < \frac{\sqrt{2}(\sqrt{3}-1)}{4}$$

$$\frac{(\sqrt{2}(\sqrt{3}-1))^2}{4} + \left(\frac{\sqrt{2}(\sqrt{3}-1)}{4}\right)^2 = \frac{3+1-2\sqrt{3}}{8} + \frac{3+1-2\sqrt{3}}{8} = 1$$

$$\sin \alpha (16\sin^2 \alpha + 8\sin \alpha - 7) < \frac{\sqrt{2}(\sqrt{3}-1)}{4}$$

$$p^2 - q^2 = 792 \quad p, q - \text{reciprocal}$$

$$(p-q)(p+q) = 792 = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 11$$

$$a_1; a_1+1; a_1+2; \dots; a_1+6$$

$$S_6 = \frac{7 \cdot (a_1 + a_1 + 6)}{2} = 7a_1 + 21$$

$$S_{16} = 6a_1 + 21 - k; \quad k \in [0; 67]; \quad k \in \mathbb{Z}$$

$$p \Rightarrow k \in \{3\} \quad k \neq \{0; 1; 3; 5; 6\}$$

$$(6a_1 + 21 - k_1 + 6a_1 + 21 - k_2)(6a_1 + 21 - k_1 - 6a_1 - 21 + k_2) = (12a_1 + 42 - k_1 - k_2) \cdot (k_2 - k_1)$$

$$\cdot (k_2 - k_1) = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 11$$

$$k_2 - k_1 = \{6; 8; 2; 4\}$$

$$1) k_2 - k_1 = 6; \quad k_2 = 6; \quad k_1 = 0$$

$$(12a_1 + 42 - 6) \cdot 6 = 6 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 11; \quad 12a_1(2a_1 + 6) = 22; \quad a_1 + 3 = 11; \quad a_1 = 8$$

$$p = 6 \cdot 8 + 21 - 6 = 3$$

$$2) k_2 - k_1 = 8; \quad k_2 = 5; \quad k_1 = 2$$

$$k_2 - k_1 = 2$$

$$k_2 = 4; \quad k_1 = 2$$

$$(12a_1 + 42 - 6) \cdot 8 = 6 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 11; \quad 24a_1 + 6 = 66; \quad a_1 + 3 = 33; \quad a_1 = 30$$

$$p = 6 \cdot 30 + 21 - 2/4 = 201 - 2/4 = [199; 197] \text{ га}$$