МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

11 КЛАСС. Вариант 11

1. [3 балла] Углы выпуклого многоугольника образуют арифметическую прогрессию, имеющую разность 2° и начинающуюся с угла 143°. Какое наибольшее число вершин может быть у такого многоугольника?

2. [4 балла] Целые числа x, y, z удовлетворяют равенству $x\ln 16 + y\ln 8 + z\ln 24 = \ln 6$. Найдите наименьшее возможное значение выражения $x^2 + y^2 + z^2$.

3. [4 балла] Из множества M, состоящего из семи подряд идущих натуральных чисел, выбираются шестёрки попарно различных чисел такие, что сумма чисел в каждой из шестёрок – простое число. Пусть p и q – две из таких сумм. Найдите множество M, если $p^2 - q^2 = 792$.

4. [5 баллов] Диагонали BD и AC трапеции $ABCD$ пересекаются в точке M, а отношение оснований $AD : BC = 1 : 2$. Точки I_1 и I_2 – центры окружностей ω_1 и ω_2, вписанных в треугольники BMC и AMD соответственно. Прямая, проходящая через точку M, пересекает ω_1 в точках X и Y, а ω_2 – в точках Z и W (X и Z находятся ближе к M). Найдите радиус окружности ω_1, если $I_1I_2 = 13/2$, а $MZ \cdot MY = 5$.

5. [5 баллов] Что больше: $5 - 4\sin\dfrac{3\pi}{14}$ или $4\cos\dfrac{\pi}{7} - 5\sin\dfrac{\pi}{14}$?

6. [4 балла] Даны 12 точек: 7 из них лежат на одной окружности в плоскости α, а остальные 5 расположены вне плоскости α. Известно, что если четыре точки из всех 12 лежат в одной плоскости, то эта плоскость – α. Сколько существует выпуклых пирамид с вершинами в данных точках?

7. [6 баллов] Дана правильная шестиугольная пирамида $SABCDEF$ (S – вершина) со стороной основания 2 и боковым ребром 4. Точка X лежит на прямой SF, точка Y – на прямой AD, причём отрезок XY параллелен плоскости SAB (или лежит в ней). Найдите наименьшую возможную длину отрезка XY.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☒ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА 1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются** отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Пусть a - возрастающая арифметическая прогрессия, которую образуют углы многоугольника. Её разность $d=2^\circ$, а $a_1 = 143^\circ$. Как известно, сумма углов выпуклого n-угольника определяется по формуле $S_n = 180^\circ \cdot (n-2)$. С другой стороны можно определить S_n как сумму первых n членов прогрессии a:

$$S_n = \frac{(a_1+a_n)n}{2}$$

$$S_n = \frac{a_1 + a_1 + d(n-1)}{2} n = \frac{2a_1 + d(n-1)}{2} n$$

$$S_n = S_n \Rightarrow 180(n-2) = \frac{2a_1 + d(n-1)}{2} n \Rightarrow 180(n-2) = \left(a_1 + \frac{d}{2}(n-1)\right) n$$

Подставим известные значения:

$$180(n-2) = (143 + n - 1)n \Rightarrow 180n - 360 = \cancel{143n}\ 142n + n^2$$

Получаем квадратное ур-ие:

$$n^2 - 38n + 360 = 0$$

$$D = 38^2 - 4\cdot 360 = 1444 - 1440 = 4 > 0 \Rightarrow 2 \text{ корня}$$

$$n = \frac{38 \pm 2}{2} = 18;\ 20.$$

$20 > 18$. Проверим, что при $n=20$, многоугольник выпуклый:

$a_n = a_1 + d(n-1) = 143^\circ + 2^\circ(20-1) = 143^\circ + 38^\circ = 181^\circ > 180^\circ \Rightarrow$ многоугольник невыпуклый. $n \neq 20$.

$n=18$: $a_n = 143^\circ + 2^\circ \cdot 17 = 177^\circ < 180^\circ \Rightarrow$ многоугольник выпуклый.

Покажем, что прогрессия неубывающая, т.е. если $d = -2^\circ$, то каждый из углов не превосходит $143^\circ \Rightarrow S_n \leq 143n$. Тогда:

$$143n > 180(n-2)$$

$$37n < 360$$

$$n < 10 \cdot \frac{36}{37}$$

$n < 10$, а $10 < 18 \Rightarrow n_{max} = 18$.

Ответ: 18.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☒ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА 1 ИЗ 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

$x^2, y^2, z^2 \geq 0$, ~~поэтому для них~~ справедливо нер-во о ~~средних:~~

$\cancel{\frac{x^2+y^2+z^2}{3}}$

I. Пусть ~~$x, y, z > 0$~~ $x, y, z \neq 0$

Тогда, $x^2, y^2, z^2 > 0$

По нер-ву о средних:

$$\frac{x^2+y^2+z^2}{3} \geq \sqrt[3]{x^2y^2z^2}$$

Равенство достигается при $x=y=z$. Найдём x:

$x\ln 16 + x\ln 8 + x\ln 24 = \ln 6$

$x\ln(16\cdot 8\cdot 24) = \ln 6$

$x\ln(2^4\cdot 2^3\cdot 2^3\cdot 3) = \ln 6 \Rightarrow x = \log_{2^{10}\cdot 3} 6 > 0$

Тогда $x^2+y^2+z^2 = 3x^2 = 3\log^2_{2^{10}\cdot 3} 6 = 3\left(\frac{\ln 6}{\ln(2^{10}\cdot 3)}\right)^2$

~~II. Пусть $z=0$~~:

Заметим, что $\ln 16 = \ln 2^4 = 4\ln 2$; $\ln 8 = \ln 2^3 = 3\ln 2$;

$\ln 24 = \ln 8 + \ln 3 = 3\ln 2 + \ln 3$:

Исходное рав-во принимает вид:

$$4x\ln 2 + 3y\ln 2 + 3z\ln 2 + z\ln 3 = \ln 6$$

$\ln 6 = \ln 2 + \ln 3$, подставим:

$$\ln 2(4x+3y+3z-1) = \ln 3(1-z) \quad |:\ln 2 \neq 0$$

$$4x+3y+3z-1 = \log_2 3(1-z) \quad (*)$$

Левая часть рав-ва яв-ся целым числом, а правая произведением целого $(1-z)$ на иррациональное $\log_2 3$. Единственный случай равенства возможен, если обе части равны 0 (т.к. произведение целого числа на иррациональное иррационально, кроме случая, когда произведение равно 0).

Докажем, что $\log_2 3$ иррационально. Допустим $a = \log_2 3$ яв-ся рациональным $\Rightarrow 2^a = 3$. Если a рационально, то оно представимо в виде $\frac{p}{q}$, $q>0$ ~~$q \neq 0$~~ $\Rightarrow 2^{\frac{p}{q}} = 3$. Возведём обе части рав-ва в степень $q \Rightarrow 2^p = 3^q$. Графики показательных фун-

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☒ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

кривые 2^x и 3^x пересекаются в единственной точке $(0;1)$.
Тогда $p=q=0$, однако $q>0$. Противоречие! $\Rightarrow a=\log_2 3$ иррационально.

Значит $(*)$ обращается в $0=0$:

$$\begin{cases}4x+3y+3z-1=0\\ \log_2 3(1-z)=0\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}1-z=0 \quad (\text{т.к. } \log_2 3>0)\\ 4x+3y+3z-1=0\end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases}z=1\\ 4x+3y+3-1=0\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}z=1\\ 4x+3y=-2\end{cases}$$

$x^2+y^2+z^2=x^2+y^2+1$, т.е. x^2+y^2 должно быть минимально.
~~По нер-ву о средних:~~

$\frac{x^2+y^2}{2} \geq \sqrt{|x|^2\cdot|y|^2}=|xy| \Rightarrow x^2+y^2 \geq 2|xy|$. При чём равенство достигается только при $|x|=|y|$:

$$\begin{cases}4x+3y=-2\\ |x|=|y|\end{cases} \Rightarrow \cancel{\begin{cases}x=\frac{-3y-2}{4}\\ |x|=|y|\end{cases}}$$ Тогда $x=y$ или $x=-y$.

~~Далее разобьём на все возможные случаи~~
~~При раскрытии модуля~~

I. $x=y$:
$4x+3x=-2 \Rightarrow x=-\frac{2}{7}$. Однако $x\in\mathbb{Z} \Rightarrow x\neq y$.

II. $x=-y$:
$4x-3x=-2 \Rightarrow x=-2$, $x\in\mathbb{Z}$. Т.к. $y=-x \Rightarrow y=2$.

Значит $x^2+y^2\geq 2|xy|$, $2|xy|=2\cdot|(-2)\cdot(2)|=8 \Rightarrow x^2+y^2\geq 8$, равенство достигается при $x=-2, y=2$.
Итого имеем, что $x^2+y^2+z^2\geq 9$, а $x^2+y^2+z^2=9$ при $z=1$, $x=-2$, $y=2$.
Проверка $4\cdot(-2)\ln 2+3\cdot 2\ln 2+3\cdot 1\cdot\ln 2+\ln 3=\ln 6$ ✓ Верно!

Ответ: 9, при $x=-2, y=2, z=1$.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☒ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА 3 ИЗ 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

Пусть $p = x^2+y^2$. Т.к. $4x+3y=-2 \Rightarrow x = \frac{-3y-2}{4}$.

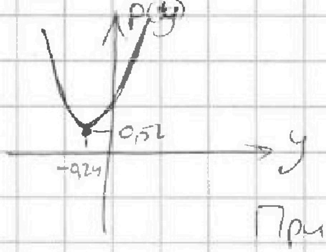
Тогда $p = y^2 + \left(\frac{-3y-2}{4}\right)^2 = y^2 + \left(-\frac{3}{4}y - \frac{1}{2}\right)^2 =$

$= y^2 + \left(\frac{3}{4}y+\frac{1}{2}\right)^2 = y^2 + \left(\frac{9}{16}y^2 + \frac{3}{4}y + \frac{1}{4}\right) = \frac{25}{16}y^2 + \frac{3}{4}y + \frac{1}{4}$

~~Ко~~ Минимум p можно искать, как вершину параболы $p(y)$:

$y_0 = \frac{-\frac{3}{4}}{2\cdot\frac{25}{16}} = -\frac{\frac{3}{4}}{\frac{25}{8}} = -\frac{3\cdot 8}{4\cdot 25} = -0,24$ $\quad p(y_0)=0,52>0$, т.е. $p(y)>0$ при $y\in\mathbb{R}$.

$y\in\mathbb{Z}$. Из $4x+3y=-2$ ясно, что $y \vdots 2$, а также $y\neq 0$, иначе $x\notin\mathbb{Z}$.



Т.к. $y\neq 0$, то ближайший целый чётный, $y=-2$ (с удалением от y_0 растёт $p(y)$).

При $y=-2$, $x=1$. Т.к $x\in\mathbb{Z}$, то это и есть искомый минимум!

$x^2+y^2+z^2 \geqslant 1+4+1 \Rightarrow x^2+y^2+z^2 \geqslant 6$, равенство достигается при $x=1$, $y=-2$, $z=1$.

Проверка:

$4\cdot 1\ln 2 + 3\cdot(-2)\ln 2 + 3\cdot 1\ln 2 + \ln 3 = \ln 6$ V Верно!

Ответ: 6, при $x=1$, $y=-2$, $z=1$.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☒ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА 1 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно**. Порча QR-кода недопустима!

$p^2-q^2=792=2^3\cdot 3^2\cdot 11$

$(p-q)(p+q)=2^3\cdot 3^2\cdot 11$

Сумма первых 6 натуральных чисел $\frac{1+6}{2}\cdot 6=21$, так что $p,q>21$.

Тогда $p,q \not\vdots\, 2 \Rightarrow (p-q)$ и $(p+q)\ \vdots\ 2$.

$(p-q)+(p+q)=2p$, т.е. такая сумма делится только на 2, на 1 и на некоторое простое число, большее 21. Это означает, что только одно число из $(p-q)$ и $(p+q)$ делится на 3^2, ибо если каждое из них $\vdots\,3$, то и $p\,\vdots\,3$. Также ясно, что $p-q<p+q$. Рассмотрим все допустимые варианты разложения $p-q$ и $p+q$ на простые множители:

I $\begin{cases} p-q=2\cdot 3^2 \\ p+q=2\cdot 2\cdot 11 \end{cases} \Rightarrow$ I $\begin{cases} p-q=18 \\ p+q=44 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} p=31 \\ q=13 \end{cases}$ $13<21 \Rightarrow$ разложение не реализуется

II $\begin{cases} p-q=2\cdot 2 \\ p+q=2\cdot 3^2\cdot 11 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} p-q=4 \\ p+q=198 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} p=101 \\ q=97 \end{cases}$

III $\begin{cases} p-q=2\cdot 11 \\ p+q=2\cdot 2\cdot 3^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} p-q=22 \\ p+q=36 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} p=29 \\ q=7 \end{cases}$ $7<21 \Rightarrow$ разложение не реализуется.

IV случай, когда $p-q=2$, $p+q=2\cdot 2\cdot 3^2\cdot 11$.

Очевидно, что разобраны все случаи разложений, т.к. 2 обязательно входит в каждое разложение, а в наборе $\{3^2; 2; 11\}$ произведение любых 2-ух чисел больше третьего, т.е $(p-q)$ раскладывается на произведение 2 и какого-либо числа из набора, или единицы.

Тогда $p=101$, $q=97$ (II)

~~Оцени~~ Пусть M начинается с n, т.е. $M=\{n, n+1, n+2, n+3, n+4, n+5, n+6\}$.

Оценим n ~~снизу~~ сверху.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☒	☐	☐	☐	☐

СТРАНИЦА 2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

$q = 97$ и ~~$q = S_M$~~ q яв-ся разностью суммы всех чисел из M S_M и одним из чисел из M $\Rightarrow q \geq S_M - (n+6) =$
$= S_M - n - 6$.

$S_M = n + (n+1) + (n+2) + \ldots + (n+1) = 7n + \frac{1+6}{2} \cdot 6 = 7n + 21$

Тогда:

$q \geq S_M - n - 6$

$97 \geq 7n + 21 - n - 6 \Rightarrow 82 \geq 6n \Rightarrow n \leq \frac{41}{3} \Rightarrow n \leq 13$

$S_M = 7n + 21 \Rightarrow 7n + 21 \geq 101 + n \Rightarrow 6n \geq 80 \Rightarrow n \geq \frac{40}{3}$

Т.е. $n \in \varnothing$ при $n \in \mathbb{Z}$.

Тогда остаётся лишь IV случай:

$$\begin{cases} p - q = 2 \\ p + q = 2 \cdot 2 \cdot 3^2 \cdot 11 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} p - q = 2 \\ p + q = 396 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} p = 199 \\ q = 197 \end{cases}$$

Оценим n сверху:

$q \geq S_M - n - 6 \Rightarrow 197 \geq 7n + 21 - n - 6 \Rightarrow 182 \geq 6n \Rightarrow$

$\Rightarrow n \leq \frac{91}{3} \Rightarrow n \leq 30$

Оценим n снизу:

$S_M \geq p + n~~+6~~ \Rightarrow 7n + 21 \geq 199 + n \Rightarrow 6n \geq 178 \Rightarrow n \geq \frac{89}{3} \Rightarrow$

$\Rightarrow n \geq 30 \Rightarrow n = 30$, т.е. $M = \{30; 31; 32; 33; 34; 35; 36\}$

$p = 30 + 31 + 33 + 34 + 35 + 36$; $q = 30; 31; 32; 33; 35; 36$.

Ответ: $M = \{30; 31; 32; 33; 34; 35; 36\}$.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☒	☐	☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

$4\sin\left(\frac{3\pi}{14}\right) = 4\cdot\sin\left(3\cdot\frac{\pi}{14}\right) = 4\cdot\left(3\sin\frac{\pi}{14} - 4\sin^3\frac{\pi}{14}\right)$

$4\cos\frac{\pi}{7} = 4\left(1-2\sin^2\frac{\pi}{14}\right)$

Тогда сравниваем:

$5 - 4\left(3\sin\frac{\pi}{14} - 4\sin^3\frac{\pi}{14}\right) \vee 4\left(1-2\sin^2\frac{\pi}{14}\right) - 5\sin\frac{\pi}{14}$

Пусть $t_0 = \sin\frac{\pi}{14}$, $t>0$.

$5-4(3t_0-4t_0^3) \vee 4(1-2t_0^2)-5t_0$

$5-12t_0+16t_0^3 \vee 4-8t_0^2-5t_0$

$16t_0^3+8t_0^2-7t_0+1 \vee 0$ (*)

Пусть $f(t) = 16t_0^3+8t_0^2-7t_0+1$

Найдём нули производной $f'(t) = 48t^2+16t-7$

$48t^2+16t-7=0$; $D = 16^2+48\cdot7\cdot4 = 1600>0 \Rightarrow 2к$

$t_{1,2} = \frac{-16\pm40}{2\cdot48} = \frac{-2\pm5}{12} = -\frac{7}{12};\ \frac{1}{4}$

$+\quad -\frac{7}{12}\quad -\quad \frac{1}{4}\quad +\quad f'(t)$

$f\left(\frac14\right) = 16\cdot\frac{1}{64}+8\cdot\frac{1}{16}-7\cdot\frac14+1 = \frac14+\frac12-\frac74+1 = \cancel{\tfrac{1}{2}}\,0$

$\cancel{f\left(-\frac{7}{12}\right) = 16\cdot\left(-\frac{7^3}{12^3}\right)}$ $f(0) = +1$

$f\left(\frac12\right) = 16\cdot\frac18+8\cdot\frac14-7\cdot\frac12+1 = 2+2-\frac72+1 = \overset{5}{\cancel{3}}-\frac72 = \overset{\frac32}{\cancel{\tfrac{1}{2}}}$

$0<\frac{\pi}{14}<\frac{\pi}{6}$, т.к $\sin x$ возрастает при $x\in\left(0;\frac{\pi}{2}\right)$, то

$\sin(0)<\sin\frac{\pi}{14}<\sin\frac{\pi}{6} \Rightarrow 0<\sin\frac{\pi}{14}<\frac12 \Rightarrow 0<t_0<\frac12$

При $t\in\left[0;\frac14\right]$ $f(t)$ убывает и ~~наибольшее~~ наименьшее значение функции на отрезке равно $\cancel{f(0)=-1}$ $f\left(\frac14\right)=0$. При $t\in\left[\frac14;\frac12\right]$ $f(t)$ возрастает и ~~макс наибольшее~~ наименьшее значение на отрезке равно $f\left(\frac14\right) = \cancel{\tfrac12}\,0$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☒ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

Тогда наибольшее значение на отрезке $t \in [0; \frac{1}{2}]$ соответствует $f(\frac{1}{2}) = -\frac{1}{2} < 0$. Т.к t_0 принадлежит данному отрезку, то $f(t_0) < f(\frac{1}{2}) < 0$.

Приходим к исходному нер-ву:

$(*)$: $f(t_0) < 0 \Rightarrow 4\cos\frac{\pi}{7} - 5\sin\frac{\pi}{14}$ больше

Ответ: $4\cos\frac{\pi}{7} - 5\sin\frac{\pi}{14}$.

Очевидно, $t_0 \in [0; \frac{1}{2}]$. $f(t)$ на данном отрезке остаётся положительной и лишь в точке $t = \frac{1}{4}$ обращается в 0. $t_0 \neq \frac{1}{4} \Rightarrow f(t_0) > 0$.

Тогда левая часть больше правой в $(*)$

$\sin\alpha < \alpha \Rightarrow \sin\frac{\pi}{14} < \frac{\pi}{14} < \frac{1}{4}$ (т.к. $4\pi < 14$), ~~т.к.~~ (поэтому $t_0 \neq \frac{1}{4}$)

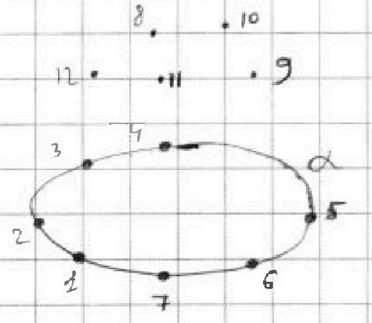
Ответ: $5 - 4\sin\frac{3\pi}{14}$ больше.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☒	☐

СТРАНИЦА 1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!



Пронумеруем точки. Т.к. любые 4 точки могут лежать только в α, то ~~4-х и более угольные пирамиды имеют основания, лежащие в α.~~ то 4-х и более угольные основания у пирамид лежат именно в α.

~~Треугольн~~ Пирамиды с треугольным основанием:

Такую пирамиду задают ~~обе~~ любые 4 точки. Единственное ограничение: хотя бы одна из них не лежит в α, иначе пирамида невыпуклая. Такие рассуждения обусловлены тем, что любые 3 т. задают плоскость.

Всего множеств из 4-х точек: $C_{12}^4 = \frac{12!}{4!\cdot 8!} = \frac{9\cdot 10\cdot 11\cdot 12}{4\cdot 3\cdot 2} = 9\cdot 5\cdot 11 = 495$ шт.

Из них все 4 $\in \alpha$ в $C_7^4 = \frac{7!}{4!\cdot 3!} = \frac{5\cdot 6\cdot 7}{6} = 35$ множествах.

Всего выпуклых треугольных пирамид $495 - 35 = 460$ шт.

4-х и более угольные основания лежат в α. Тогда вершиной может стать любая из 5 не лежащих в α точек, а ~~основание~~ n-угольное основание можно выбрать C_7^n способами. Приведём таблицу с кол-вом n-угольных оснований в α:

n	C_7^n	кол-во	пирамид = кол-во ×5
4	$\frac{7!}{4!\cdot 3!}$	35	
5	$\frac{7!}{5!\cdot 2!}$	21	
6	$\frac{7!}{6!\cdot 1}$	7	
7	$\frac{7!}{7!\cdot 0!}$	1	

Кол-во пирамид = кол-во оснований ×5:

$N_{\geq 4} = 5\cdot(35+21+7+1) =$

$= 64\cdot 5 = 320$

Суммарно пирамид $320 + 460 = 780$ шт.

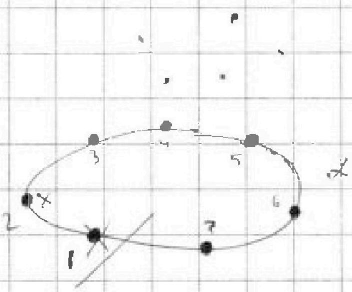
Ответ: 780 шт.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☒ 2 ☒ 3 ☒ 4 ☒ 5 ☒ 6 ☒ 7 ☒

СТРАНИЦА __ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!



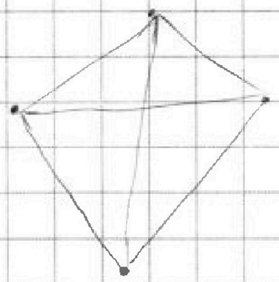
$$C_{12}^3 + C_{12}^4$$

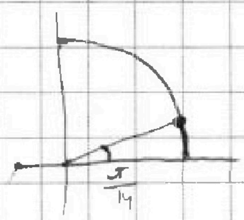
$$C_{12}^3 = \frac{12!}{3!\cdot 9!} = \frac{10\cdot 11\cdot 12}{24} = 220$$

$$C_7^3 = \frac{7!}{3!\cdot 4!} = \frac{5\cdot 6\cdot 7}{6} = 35$$

$$\frac{5+1}{2}\cdot 5 = 15 + \frac{4+1}{2}\cdot 4 + \frac{3+1}{2}\cdot 3 + \frac{2+1}{2}\cdot 2 + 1 =$$

$$= \underbrace{15+10}_{25} + \underbrace{6+3}_{10} 4 -$$





$$\frac{\frac{\pi}{6}}{\frac{3\pi}{14}} = \frac{14}{6\cdot 3} = \frac{14}{18} = \frac{7}{9}$$

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{7}{9} = \frac{7}{18}$$

$$\frac{\pi}{14} < \frac{1}{4}$$

$4\pi < 14$

3,14 | 14

3

$0,25\cdot 14 =$

$$= 14\cdot\frac{1}{4} = \frac{7}{2} = 3,5$$

$\sin\alpha < \alpha$

$$\sin\frac{\pi}{14} < \frac{\pi}{14} < \frac{1}{4}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
☒	☒	☒	☒	☒	☒	☒

СТРАНИЦА __ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
☒	☒	☒	☒	☒	☒	☒

СТРАНИЦА __ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

$x(\ln 16\cdot 8 = \ln 6$

$x = \log_{2^7} 6$

$2x^2 = 2\log^2_{2^7} 6$

$S_n - a_x + S_n - a_y =$

$= 2S_n - a_x - a_y$

792 | 2
396 | 2
198 | 2
99 | 3
33 | 3
11 | 11
1

$792 = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 11$

чёт чёт

$(p-q)(p+q) = 2^3\cdot 3^2 \cdot 11$

$2\cdot 3^2 3$ $\quad 2\cdot 2\cdot 11$

$101 \times 97 = 9797$

$198 \times 4 = 792$

$4x\ln 2 + 3y\ln 2 + 3z\ln 2 + z\ln 3 = \ln 6$

$350 + 45 + 1$

$150 + 45 + 3$

$\ln 2(4x + 3y + 3z) + z\ln 3 = \ln 2 + \ln 3$

$50 + 45 + 4$ $\quad p = 31$, $q = 13$

$n + (n+1) + (n+2) + (n+3) + (n+4) + (n+5) + (n+6)$

$\ln 2(4x + 3y + 3z - 1) = \ln 3(1 - z)$

$n = 10 \mid 91$

$n = 11 \mid 98$ $\quad a = \log_2 3$

$4x + 3y + 3z - 1 = \ln_2 3(1-z)$

$\boxed{7n+21}$

$n = 12 \mid 105$ $\quad 2^a = 3$

$n = 13 \mid 112$

$\underbrace{4x+3y+3z-1}_{z_1}$

$\frac{p-q}{2\cdot 3^2}$ $\quad \frac{p+q}{2}$ $\quad \frac{p-q}{2}$ $\quad \frac{p+q}{2}$ z_2

$p - q + p + q = 2p$

$\frac{1+7}{2}\cdot 7 = 28$

$2^{\frac{p}{q}} = 3$

$2^p = 3^q$ $\quad 4$

$\frac{28}{14}\cdot\frac{9}{25} + \frac{3}{4}\cdot\frac{6}{25} + \frac{1}{4} =$

$3(-2) + 4x = -2$

$4x = 4$

$x = 1$

$1^2 + 4 = 5$

$\frac{1+6}{2}\cdot 6 = 21$

$= \frac{9}{100} + \frac{18}{100} + \frac{25}{100} = \frac{3\cdot 2}{25} = \frac{6}{25}$

$S_n - a_x$ $\quad a_y - a_x$

$S_n - a_y$

$\frac{1}{8} + \frac{7}{8} - 1$

$1 + 2 + 3 + \dots = 21$

$16\cdot\frac{2}{8\cdot 88}$

$150 + 45 + 4 = 199$

$-\frac{1}{16^2} + \frac{8}{16^2} + \frac{2}{16} - \frac{2}{16}$

$4\cos\frac{\pi}{7} = 4\left(\cos^2\frac{\pi}{14}\right.$

$\sin(2\alpha + \alpha) = \sin 2\alpha\cos\alpha + \cos 2\alpha\sin\alpha =$

$\boxed{\sin 3\alpha = 3\sin\alpha - 4\sin^3\alpha}$

$= 2\sin\alpha\cos^2\alpha + (\cos^2\alpha - \sin^2\alpha)\sin\alpha =$ $\quad n = 14$

$97 + n + 6 \geq 7n + 21$ $\quad = 2\sin\alpha\cos^2\alpha + \cos^2\alpha\sin\alpha - \sin^3\alpha =$

$82 \geq 6n$ $\quad = 3\sin\alpha\cos^2\alpha - \sin^3\alpha =$

$36\cdot 11 = 360 + 36$

$\frac{1}{4} + \frac{2}{4} - \frac{7}{4} - \frac{4}{4}$

$6\cdot\frac{1}{8} + 8\cdot\frac{1}{4} - \frac{7}{2} + 1 = 3\sin\alpha(1 - \sin^2\alpha) - \sin^3\alpha =$

$13 \geq n$ $\quad = 3\sin\alpha - 3\sin^3\alpha - \sin^3\alpha = 3\sin\alpha - 4\sin^3\alpha$

$2\cdot 16\cdot 3$

$\frac{16}{64} + \frac{8}{16} - \frac{7}{4} + 1$ $\quad -2 + 2$

$48 \times 28 = 384 + 96 = 1344$ $\quad 48$

$48t^2 + 16t - 7 > 0$

$\frac{1}{4} + \frac{1}{2} - \frac{7}{4} - 1$

$256 + 48\cdot 7\cdot 4 =$

$1344 + 256 = 1600$

$2 + 2 - \frac{7}{2} - 1 = \quad (50+2)(30+2) =$

$= 1500 - 100 - 60\ 14$

$= 4 - 1 - 3\frac{1}{2}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☒ 2 ☒ 3 ☒ 4 ☒ 5 ☒ 6 ☒ 7 ☒

СТРАНИЦА __ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

$a_1 = 143°$ $d = 2°$

$\frac{x^2+y^2}{2} \geq \sqrt{x^2y^2} = xy$

$\sin 3\alpha = \sin(2\alpha+\alpha) = \sin 2\alpha \cos\alpha + \cos 2\alpha \sin\alpha =$

$= 2\sin\alpha\cos^2\alpha + \sin\alpha - 2\sin^3\alpha$

$2\sin\alpha - 2\sin^3\alpha$

$180(n-2)$

△ $180°$

□ $360°$

$4x\ln 2 +$

$S_n = \frac{a_1+a_n}{2}\cdot n = \frac{a_1+a_1+d(n-1)}{2}n = \frac{2a_1+d(n-1)}{2}n$

$180(n-2) = \frac{2a_1+d(n-1)}{2}n$

$180n - 360 = (143+n-1)n$

$180n - 360 = \cancel{143n+n^2}\ 142n + n^2$

$\cancel{38n}$ $n^2 - 38n + 360 = 0$

$n = \frac{38 \pm 2}{2} = 18;\ 20.$

$143 + 2\cdot 19 = 143+38 =$

$\frac{3x^2}{3} = \sqrt[3]{x^6}$

$4\cdot 9\cdot 4\cdot 10 = 16\cdot 9\cdot 10 = (4\cdot 3)^2\cdot 10$

$S_n \leq 143n$

$143n \geq 180(n-2)$

$143n \geq 180n - 360$

$360 \geq 37n$

$10\cdot\frac{3}{37} \geq n$

$(40-2)(40-2) = 1600 - 80 - 80 + 4 =$

$= 1440$

$x\ln 16 + y\ln 8 + z\ln 24 = \ln 6$

$\cancel{2x\ln 4}$ $4x\ln 2 + 3y\ln 2 + 3z\ln 2 + z\ln 3 = \ln 2 + \ln 3$

$x^2+y^2+z^2 \geq \sqrt{x^2+y^2+z^2}\cdot\sqrt{x^2+y^2+z^2}$

$4x + 3y + 3z + z\frac{\ln 3}{\ln 2} = 1 + \frac{\ln 3}{\ln 2}$

$\frac{x^2+y^2+z^2}{3} \geq \sqrt[3]{x^2y^2z^2}$

$x^2+y^2+z^2 \geq \sqrt[3]{27x^2y^2z^2}$

$x = y = z$

$\cancel{x\ln 16 + y\ln 8}$

$x\ln 16 + x\ln 8 + x\ln 24 = \ln 6$

$\underbrace{4x\ln 2 + 3x\ln 2 + 3x\ln 2}$ $+ x\ln 3 = \ln 2 + \ln 3$

$10x\ln 2 + x\ln 3 = \ln 2 + \ln 3$

$x(10\ln 2 + \ln 3) = \ln 2 + \ln 3$

$x = \frac{\ln 2 + \ln 3}{10\ln 2 + \ln 3}$

$x^2 = \frac{(\ln 2+\ln 3)^2}{(10\ln 2+\ln 3)^2} = \frac{\ln^2 6}{\ln^2(2^{10}\cdot 3)} = \left(\log_{2^{10}\cdot 3} 6\right)^2$

$5\cdot 6\cdot 7$

$\frac{6\cdot 7}{2} = 3\cdot 7 = 21$

$320 + 460 = 780$

$143 + 38 = 181$

$143 + 34 = 177$

$180 - 143 = 37$

$35 + 21 = 56$, $56 + 7 = 63$

$360 \cdot 4 = 1440$

$38 \cdot 38 = 1444$