

$$5 - 4 \sin \frac{9\pi}{14} \quad 3 \sin \frac{6\pi}{14} - 4 \cos \frac{2\pi}{7}$$



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

11 КЛАСС. Вариант 12



1. [3 балла] Углы выпуклого многоугольника образуют арифметическую прогрессию, имеющую разность 2° и начинающуюся с угла 132° . Какое наибольшее число вершин может быть у такого многоугольника?
2. [4 балла] Целые числа x, y, z удовлетворяют равенству $x \ln 25 + y \ln 75 + z \ln 125 = \ln 45$. Найдите наименьшее возможное значение выражения $x^2 + y^2 + z^2$.
3. [4 балла] Из множества M , состоящего из семи подряд идущих натуральных чисел, выбираются шестёрки попарно различных чисел такие, что сумма чисел в каждой из шестёрок – простое число. Пусть p и q – две из таких сумм. Найдите множество M , если $p^2 - q^2 = 1080$.
4. [5 баллов] Диагонали BD и AC трапеции $ABCD$ пересекаются в точке M , а отношение оснований $AD : BC = 1 : 2$. Точки I_1 и I_2 – центры окружностей ω_1 и ω_2 , вписанных в треугольники BMC и AMD соответственно. Прямая, проходящая через точку M , пересекает ω_1 в точках X и Y , а ω_2 – в точках Z и W (X и Z находятся ближе к M). Найдите радиус окружности ω_1 , если $I_1 I_2 = 8$, а $MZ \cdot MY = 9$.
5. [5 баллов] Что больше: $5 - 4 \sin \frac{9\pi}{14}$ или $3 \sin \frac{3\pi}{14} - 4 \cos \frac{3\pi}{7}$?
6. [4 балла] Даны 12 точек: 8 из них лежат на одной окружности в плоскости α , а остальные 4 расположены вне плоскости α . Известно, что если четыре точки из всех 12 лежат в одной плоскости, то эта плоскость – α . Сколько существует выпуклых пирамид с вершинами в данных точках?
7. [6 баллов] Дана правильная шестиугольная пирамида $SABCDEF$ (S – вершина) со стороной основания 1 и боковым ребром $\sqrt{2}$. Точка X лежит на прямой SF , точка Y – на прямой AD , причём отрезок XY параллелен плоскости SAB (или лежит в ней). Найдите наименьшую возможную длину отрезка XY .

$$132 + 134 + 136 \dots 132 + (n-1) \cdot 2$$

$$S_n = \frac{132 \cdot 2 + (n-1) \cdot 2}{2} \cdot n =$$

$$= (132 + n-1)n = (131+n)n = (n-2)180 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 131n + n^2 - 180n + 360 = 0$$

$$n^2 - 49n + 360 = 0$$

$$D = 31^2$$

$$\frac{49 \pm 31}{2} = \boxed{40}, 9$$

$$132 + 99 \cdot 2 > 180$$

$$a_1 a_2 (p-q)(p+q) = 1080 = 2^3 \cdot 3^3 \cdot 5$$

$$1080 = 2 \cdot 5 \cdot 2 \cdot 3^3 \cdot 2 + 2^3 \cdot 3^3 \cdot 5$$

$$24 \cdot 4 = 108$$

$$\begin{array}{r} 8 \\ 49 \\ \times 49 \\ \hline 441 \\ 196 \\ \hline 2401 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} h \\ \times 360 \\ \hline 1440 \end{array} \quad \begin{array}{r} 2401 \\ - 1440 \\ \hline 961 \end{array}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☒ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

1) Допустим у многоугольника n вершин, тогда сумма его углов равна:

$$S = 132 + (132 + 2 \cdot 1) + \dots + (132 + 2 \cdot (n-1)) = \frac{132 + 132 + 2(n-1)}{2} \cdot n =$$
$$= (132 + n - 1) n = (131 + n) n$$

2) С другой стороны сумма углов выпуклого многоугольника на n вершинах задается формулой:

$$S = (n-2) \cdot 180$$

$$\Rightarrow (n-2) \cdot 180 = (131+n) n \Leftrightarrow n^2 + 131n - 180n + 360 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow n^2 - 49n + 360 = 0$$

$$D = 2401 - 360 \cdot 4 = 961 = 31^2$$

$$n_1 = \frac{49 + 31}{2} = 40$$

$$n_2 = \frac{49 - 31}{2} = 9$$

3) При $n=40$ последний угол многоугольника будет равен: $132 + (40-1) \cdot 2 = 132 + 78 = 210^\circ$, но многоугольник выпуклый, значит каждый угол $< 180^\circ \Rightarrow$
 $\Rightarrow n=40$ не подходит.

4) При $n=9$ самый большой угол равен:

$$132 + 8 \cdot 2 = 148^\circ \Rightarrow n=9 \text{ подходит (все углы } < 180^\circ)$$

Других вариантов нет, потому:

Ответ: 9



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



СТРАНИЦА

1 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$x \ln 25 + y \ln 75 + z \ln 125 = \ln 45$$

$$x, y, z \in \mathbb{Z}$$

$$2x \ln 5 + y(\ln 25 + \ln 3) + 3z \ln 5 = \ln 9 + \ln 5$$

$$2x \ln 5 + 2y \ln 5 + y \ln 3 + 3z \ln 5 = 2 \ln 3 + \ln 5 = 0 \quad \rightarrow \text{по св-вам логарифмов}$$

$$\ln 5 \cdot (2x + 2y + 3z - 1) + \ln 3 \cdot (y - 2) = 0$$

$$1^{\circ} \begin{cases} 2x + 2y + 3z - 1 = 0 \\ y - 2 = 0 \end{cases}$$

$$2^{\circ} \ln 5 \cdot (2x + 2y + 3z - 1) = -\ln 3 \cdot (y - 2)$$

$$2^{\circ}) \quad 2x + 2y + 3z - 1 = -\frac{\ln 3}{\ln 5} (y - 2)$$

$$2x + 2y + 3z - 1 = -\log_5 3 (y - 2)$$

В левой части целое число, а в правой не рациональное число умноженное на целое $\Rightarrow$ решений в целых числах у уравнения нет.

$$1^{\circ}) \begin{cases} 2x + 2y + 3z - 1 = 0 \\ y = 2 \end{cases} \Rightarrow 2x + 3z = -3$$

$$\Rightarrow x = \frac{-3z - 3}{2} = -3 \frac{z + 1}{2}; \quad \text{т.к. } x \in \mathbb{Z}, \text{ то } z + 1 : 2$$

$$\Rightarrow z \text{ нечетное и равно: } z = 2k + 1, \quad k \in \mathbb{Z}$$

$$x = -3 \frac{2k + 1 + 1}{2} = -3 \cdot (k + 1) =$$

$$= -3k - 3, \quad \text{итого система имеет решение:}$$

$$\begin{cases} x = -3k - 3 \\ z = 2k + 1 \\ y = 2; k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

$$\Rightarrow x^2 + y^2 + z^2 = (-3k - 3)^2 + (2k + 1)^2 + 2^2 = f(k)$$

$$= 9k^2 + 18k + 9 + 4k^2 + 4k + 1 + 4 = 13k^2 + 22k + 14, \quad k \in \mathbb{Z}$$

$f(k)$ - это парабола ветвями вверх значит наименьшее значение достигается в точке:

$$k = \frac{-22}{2 \cdot 13} = -\frac{22}{26} \quad \text{это значение лежит между -1 и 0.}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1
☐

2
☒

3
☐

4
☐

5
☐

6
☐

7
☐

СТРАНИЦА
2 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Т.к. $k \in \mathbb{Z}$, то наименьшее значение достигается либо при $k = -1$, либо при $k = 0$, итак:

$$f(-1) = 13 + 22 + 14 = 5$$

$$f(0) = 0 + 0 + 14 = 14 > f(-1)$$

$\Rightarrow$ Наименьшее значение $x^2 + y^2 + z^2$ равно 5 и достигается при $x = -1 - (-1) - 3 = 0$; $y = 2$ и $z = -2 \cdot 1 + 1 = -1$

Ответ: 5

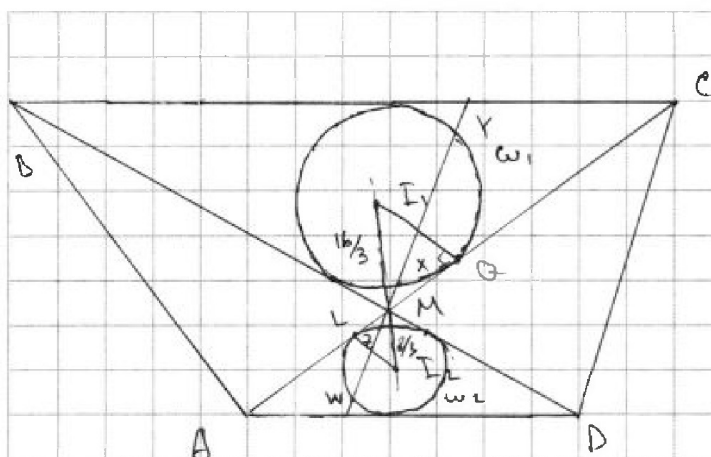


На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☒ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
1 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



$$I_1 I_2 = 8; \frac{AD}{BC} = \frac{1}{2}$$

$$2 \cdot MM \cdot MY = 9$$

$$R_{\omega_1} = ?$$

Решение:

1) MC - касается ω_1 в точке Q; AM касается ω_2 в точке L, тогда $\triangle I_2 LM \sim \triangle I_1 QM$ по 2-м углам ($\angle I_1 MQ = \angle LMI_2$ верт. и $\angle I_1 QM = \angle MLI_2 = 90^\circ$)

2) $\triangle MBC \sim \triangle MAD$ (ABCD - трапеция) $\Rightarrow$ k - коэффициент подобия равен: $k = \frac{BC}{AD} = 2$.

3) $r = \frac{S}{p} \Rightarrow \frac{1}{r} = \frac{p}{S}$ (p - периметр), r - радиус вписанной

$$\Rightarrow \frac{R_{\omega_1}}{R_{\omega_2}} = \frac{S_{MBC}}{S_{MAD}} \cdot \frac{p(MAD)}{p(MBC)} = k^2 \cdot \frac{1}{k} = k \Rightarrow R_{\omega_1} = 2 R_{\omega_2}$$

4) Из 3 следует что $\triangle LMI_2 \sim \triangle MI_1 Q$ с коэф. подобия 2 $\Rightarrow I_1 M = 2 I_2 M$, но

$$I_1 M + I_2 M = 8 \Rightarrow I_2 M = \frac{8}{3}; I_1 M = \frac{16}{3}$$

5) При сжатии с центром в точке M относительно прямой $I_1 I_2$ с коэф. -2 окружность ω_2 перейдет в окруж. $\omega_1 \Rightarrow$ точка Z перейдет в точку X, а значит $2 \cdot MM = \frac{1}{2} MX \Rightarrow MX = 2 \cdot 2 \cdot MM = 8$

6) Степень точки M относительно ω_1 :

$$MX \cdot MY = MQ^2 \Rightarrow 2 \cdot 2 \cdot MM \cdot MY = MQ^2 \Rightarrow MQ = \sqrt{2 \cdot 9} = 3\sqrt{2}$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1
☐

2
☐

3
☐

4
☒

5
☐

6
☐

7
☐

СТРАНИЦА
2 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

8) По г. Пифагора где I, Q, M :

$$QI^2 = IM^2 - MQ^2 = \left(\frac{16}{3}\right)^2 - 18 = \frac{256 - 18 \cdot 9}{9} =$$
$$= \frac{256 - 162}{9} = \frac{94}{9} \Rightarrow QI = \frac{\sqrt{94}}{3} = R_w$$

Ответ: $\frac{\sqrt{94}}{3}$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☒ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
1 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

1) Выведем формулу $\sin(3\alpha)$

$$\begin{aligned}\sin(3\alpha) &= \sin(2\alpha + \alpha) = \sin 2\alpha \cos \alpha + \sin \alpha \cos 2\alpha = 2\sin \alpha \cos^2 \alpha + \\ &+ \sin \alpha (1 - 2\sin^2 \alpha) = 2\sin \alpha (1 - \sin^2 \alpha) + 2\sin^3 \alpha + \sin \alpha = \\ &= 3\sin \alpha - 4\sin^3 \alpha\end{aligned}$$

2) Обозначим: $\frac{3\pi}{14} = \alpha$, тогда заданное уравнение равно:

$$5 - 4\sin 3\alpha \vee 3\sin \alpha - 4\cos 2\alpha$$

$$5 - 4(3\sin \alpha - 4\sin^3 \alpha) \vee 3\sin \alpha - 4(1 - 2\sin^2 \alpha)$$

$$5 - 12\sin \alpha + 16\sin^3 \alpha \vee 3\sin \alpha - 4 + 8\sin^2 \alpha$$

$$9 \vee -16\sin^3 \alpha + 8\sin^2 \alpha + 15\sin \alpha \leftarrow f(\sin \alpha)$$

$$\sin \alpha = t, \text{ тогда: } f(t) = -16t^3 + 8t^2 + 15t$$

$$f'(t) = -48t^2 + 16t + 15; \quad t_0 = \frac{-16}{-48 \cdot 2} = \frac{1}{6} \text{ (координата вершины)}$$

$$\text{но } t = \sin \frac{3\pi}{14}, \text{ т.к. } \frac{9\pi}{42} > \frac{7\pi}{42}, \text{ то } \sin \frac{3\pi}{14} > \sin \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$$

$\Rightarrow$ На промежутке на котором лежит

При малых $\sin \alpha$ функция слева возрастает значит если $\alpha_1 > \alpha_2$, то $f(\sin \alpha_1) > f(\sin \alpha_2)$ ($\sin \alpha$ тоже возрастающая)

$$\alpha = \frac{4\pi}{14} = \frac{12\pi}{42} < \frac{7\pi}{42} < \frac{\pi}{3} = \frac{14\pi}{42} > \alpha$$

$$\Rightarrow f(\sin \alpha) < f(\sin \frac{\pi}{3}) = f(\frac{\sqrt{3}}{2}) = -16 \cdot \frac{1}{8} + 8 \cdot \frac{1}{4} + 15 \cdot \frac{1}{2} = 7,5$$

$$= -16 \cdot \frac{\sqrt{3} \cdot 3}{6} + 8 \cdot \frac{3}{4} + 15 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 6 - 6\sqrt{3} + 7,5\sqrt{3} = 6 + 1,5\sqrt{3} < 6 + 1,5\sqrt{4} = 9$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1
☐

2
☐

3
☐

4
☐

5
☒

6
☐

7
☐

СТРАНИЦА
2 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

3) Итого мы получили, что $f(\sin \alpha) < 9$

$\Rightarrow$ левая часть больше правой:

$$\Rightarrow 5 - 4 \sin \frac{3\pi}{4} > 3 \sin \frac{3\pi}{4} - 4 \cos \frac{3\pi}{4}$$

Ответ: левая больше правой



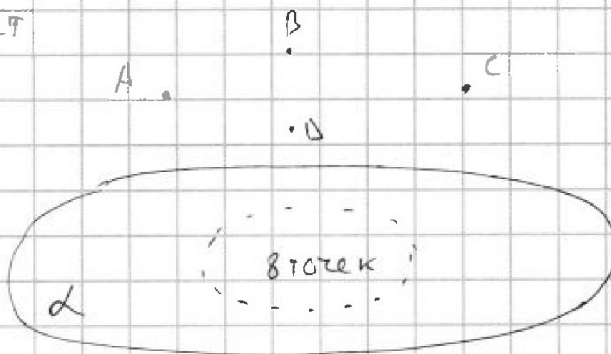
На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☒ 7 ☐

СТРАНИЦА
1 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

1) Т.к. 8 точек лежат в одной плоскости, то только они не могут образовывать пирамиду, значит каждая пирамида содержит хотя бы одну из точек не лежащих в α (точки A, B, C, D)



2) Если пирамида содержит только одну из точек A, B, C или D, тогда каждая пирамида будет иметь одну из 4-х точек A, B, C, D и 3, 4, 5, 6, 7 или 8 точек из α , при этом никакие 3 точки из α не лежат на одной прямой (они лежат на октети), поэтому любой набор образует пирамиду.

$$\Rightarrow \text{Кол-во способов: } S_1 = 4 \cdot (C_8^3 + C_8^4 + C_8^5 + C_8^6 + C_8^7 + 1) =$$

$$= 4 \cdot \left(\frac{8!}{3! \cdot 5!} + \frac{8!}{4! \cdot 4!} + \frac{8!}{5! \cdot 3!} + \frac{8!}{6! \cdot 2!} + \frac{8!}{7! \cdot 1!} + 1 \right) = 4 \cdot (56 + 70 + 56 + 28 + 8 + 1) =$$

$$= 4 \cdot 219 = 876$$

3) 2 точки из A, B, C, D и 2, 3, 4, 5, 6, 7 или 8 из α :

$$S_2 = C_4^2 (C_8^2 + C_8^3 + C_8^4 + C_8^5 + C_8^6 + C_8^7 + C_8^8) = 6 \cdot 219 = 1314$$

4) 3 точки из A, B, C, D и 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7,

5) Если брать 2 точки из A, B, C, D, то если брать больше 2 точек из α , то какие-то (≥ 3) точек из α definitely будут находиться в одной плоскости



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



СТРАНИЦА
2 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

е одной из точек из A, B, C, D , что невозможно по условию, значит, можно выбрать не более 2 точек из α , то есть равно 2:

$$\Rightarrow S_2 = C_4^2 \cdot C_8^2 = \frac{4!}{2! \cdot 2!} \cdot \frac{8!}{6! \cdot 2!} = \frac{12}{2} \cdot \frac{8 \cdot 7}{2} = 28 \cdot 12 = 336$$

4) Если взять 3 точки из A, B, C, D , то можно будет выбрать равно одну вершину из α (аналогичное рассуждение)

$$\Rightarrow S_3 = C_4^3 \cdot C_8^1 = 8 \cdot \frac{4!}{3! \cdot 1!} = 8 \cdot 4 = 32$$

5) 4 точки A, B, C, D образуют тетраэдр и никакой другой набор с этими 4-мя точками тетраэдра не образует

$$\Rightarrow S_4 = 1$$

$$6) S_{\text{общ}} = S_1 + S_2 + S_3 + S_4 = 1 + 32 + 336 + 876 = 1243$$

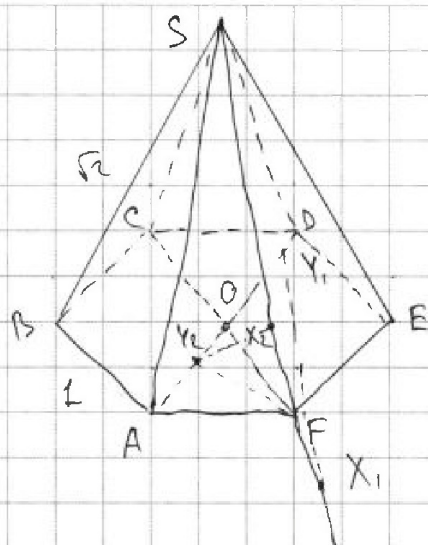
Ответ: 1243 способов.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1
☐2
☐3
☐4
☐5
☐6
☐7
☒СТРАНИЦА
4 ИЗ 4

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



1) Отметим центр шестигранника O

2) Если точка X находится ниже F , то Y будет за точкой O (выраво) $XY \parallel ABS$, но тогда $\angle XFY > 90^\circ \Rightarrow FY < XY$, но $FY > OF$ ведь $\angle FOY = 120^\circ$ (X_1 и Y_1)

значит если X ниже F , то $XY > OF$

3) Если X выше F , то $OF < Y_2 X_2$

$\Rightarrow$ при $X = F$ и $Y = O$ достигается наименьшее XY ($OF \parallel ABS$) $\neq$, но $\triangle AOF$ - равностор. $\Rightarrow$

$\Rightarrow OF = AF = 1$

Ответ: 1.



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☒ 2 ☒ 3 ☒ 4 ☒ 5 ☒ 6 ☒ 7 ☒

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\alpha > \frac{\pi}{6} \Rightarrow \sin \alpha > \sin \frac{\pi}{6} > \frac{1}{2}$$

$$\begin{array}{r} 876 \\ 336 \\ \hline 1212 \end{array} + \begin{array}{r} 1212 \\ 32 \\ \hline 1243 \end{array}$$

$$-16 \cdot \frac{1}{8} + 8 \cdot \frac{1}{4} + 15 \cdot \frac{1}{2} = -2 + 2 + 7,5$$

$$\frac{-16}{-96} = \frac{1}{6}$$

$$\begin{array}{r} 28 \\ 12 \\ \hline 56 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 98 \cdot 6 \cdot 4 \cdot 5 \\ \hline 1.254 \end{array}$$

$$-48 \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \right)^3 + 8 \frac{2}{4} + 15 \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\begin{array}{r} 28 \\ 336 \end{array}$$

$$6 - 6\sqrt{3} + 7,5\sqrt{3} < 9$$

$$\begin{array}{r} 24 \\ 244 \\ 6 \\ \hline 1482 \end{array}$$

$$4 \cdot \binom{3}{8} \binom{4}{8} \binom{5}{8} \binom{6}{8} \binom{7}{8} \binom{8}{8}$$

$$\begin{array}{r} 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 2 \\ \hline 1.254 \end{array} = 70$$

$$\frac{6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 7 \cdot}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} = 49,2$$

$$219 + 28 = 247$$

$$112 + 28 = 140 + 9 + 98 =$$

$$157 + 98 = 255$$

$$112 + 98 = 210 + 28 + 9 = 247$$

$$112 + 70 + 28 + 9$$

$$\frac{8!}{6! \cdot 2!} = \frac{7 \cdot 8}{2} = 28$$

$$182 + 28 = 210$$

$$\frac{4 \cdot 3}{2} = 18$$



1 ☒ 2 ☒ 3 ☒ 4 ☒ 5 ☒ 6 ☒ 7 ☒

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\sin(3\alpha) = \sin(2\alpha + \alpha) = \sin 2\alpha \cos \alpha + \cos 2\alpha \sin \alpha =$$

$$= 2 \sin \alpha \cos^2 \alpha + (2 \cos^2 \alpha - 1) \sin \alpha = 2 \sin \alpha \cos^2 \alpha + 2 \sin \alpha \cos^2 \alpha -$$

$$- \sin \alpha$$

$$4 \sin \alpha \cos^2 \alpha - \sin \alpha \quad -4(1 - 2 \sin^2 \alpha)$$

$$\quad \quad \quad -4 + 8 \sin^2 \alpha$$

$$5 - 4 \sin(3\alpha) \vee 3 \sin \alpha - 4 \cos 2\alpha \quad -4 + 8 \sin^2 \alpha$$

$$5 - 4(4 \sin \alpha \cos^2 \alpha - \sin \alpha) \vee 3 \sin \alpha - 8 \cos^2 \alpha + 4$$

$$1 \vee 16 \sin \alpha \cos^2 \alpha + 4 \sin \alpha + 3 \sin \alpha - 8 \cos^2 \alpha + 4$$

$$1 \vee 7 \sin \alpha - 8 \cos^2 \alpha (1 + 2 \sin \alpha)$$

$$0 < \alpha < \frac{\pi}{6} \quad \sin \alpha < \frac{1}{2} \quad \cos^2 \alpha > \frac{3}{4}$$

$$7 \cdot \frac{1}{2} - 8 \cdot \frac{3}{4} ($$

$$35 - 60$$

$$\begin{array}{r} 48 \\ \times 23 \\ \hline 144 \\ + 96 \\ \hline 1004 \end{array}$$

$$7 \sin \alpha - 1 \quad 1 + 8 \cos^2 \alpha \vee \sin \alpha (7 + 16 \cos^2 \alpha)$$

$$5 + 4 \vee 16 \sin \alpha \cos^2 \alpha + 7 \sin \alpha + 8 \sin^2 \alpha$$

$$9 \vee \sin \alpha (16 \cos^2 \alpha - 1) + 6 \sin \alpha (1 + \sin \alpha)$$

$$\sin \alpha (16 \cos^2 \alpha + 8 \sin \alpha + 4)$$

$$\frac{\pi}{6} = \frac{77}{42} \quad 16 - 16 \sin^2 \alpha + 8 \sin^2 \alpha + 4$$

$$\sin \alpha < \frac{1}{2}$$

$$\cos^2 \alpha = \frac{\cos 2\alpha + 1}{2} < \frac{3}{4}$$

$$\frac{6\pi}{14} > \frac{\pi}{3}$$

$$\vee - \sin \alpha (16 \sin^2 \alpha - 8 \sin \alpha - 23)$$

$$\cos 2\alpha < \cos \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$$

$$t (16t^2 - 8t - 23)$$

$$16t^2 - 8t - 23t$$

$$48t^2 - 16t - 23$$

$$64 + 48 \cdot 23 = 1004$$

$$\frac{8 \pm \sqrt{1004}}{48}$$

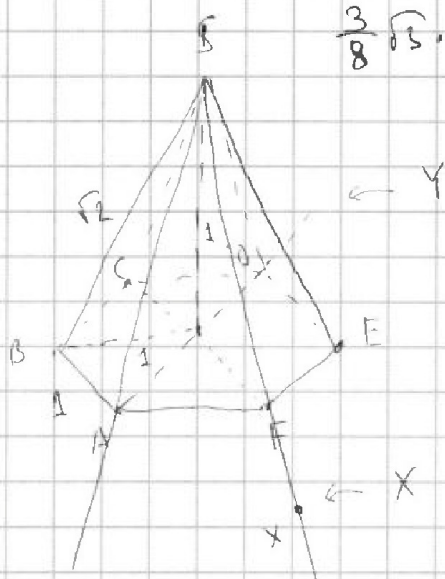


На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☒ 2 ☒ 3 ☒ 4 ☒ 5 ☒ 6 ☒ 7 ☒

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



$$\frac{3}{8} \sqrt{5} \cdot 16 = 6\sqrt{5} + 6 + \frac{\sqrt{5}}{2}$$

$$1,5\sqrt{5} + 6 =$$

$$2 \ln 75 - 3 \ln 5$$

$$\ln 75^2 - \ln 125$$

$$\ln \frac{75^2}{125} = \ln 3^2 \cdot 5$$

$$7 \cdot 180 = 1260$$

$$24 - 22 = 5$$

$$\frac{132 + 148}{2} \cdot 9 =$$

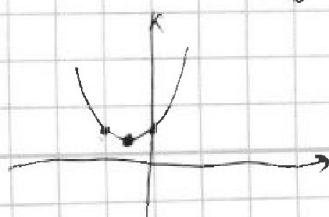
$$140 \cdot 9 = 1260$$

$$\ln_5 (2x + 3z + 2y - 1) + \ln_3 (y - 2) = 0$$

$$\begin{cases} 2x + 3z + 2y - 1 = 0 \\ y - 2 = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} \ln_5 (2x + 3z + 2y - 1) = -\ln_3 (y - 2) \\ (2x + 3z + 2y - 1) = 2 \cdot -\frac{\ln 3}{\ln 5} \end{cases}$$

$$\frac{-22}{26}$$

$$\left(\sqrt{15}k + \frac{11}{\sqrt{15}} \right)^2 = 15k^2 + 22k + \frac{121}{15}$$





На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☒ 2 ☒ 3 ☒ 4 ☒ 5 ☒ 6 ☒ 7 ☒

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$5 - 4 \sin \frac{3\pi}{14} \quad 5 - 4 \sin 2\alpha \quad 3 \sin \alpha - 4 \cos 2\alpha$$

$$\cos 2\alpha = 2\cos^2 \alpha - 1 \Rightarrow \cos \alpha = \sqrt{\frac{\cos 2\alpha + 1}{2}}$$

$$\frac{8}{5} = \frac{3}{5} \sin \frac{3\pi}{14} - \frac{4}{5} \cos \frac{5\pi}{4} =$$

$$\cos \frac{3\pi}{4} = 2\cos^2 \frac{3\pi}{14} - 1 \quad 8\cos^2 \frac{3\pi}{14} - 4$$

$$\sin(2\alpha + \alpha) = \sin 2\alpha \cos \alpha + \cos 2\alpha \sin \alpha = 2\sin \alpha \cos^2 \alpha + (2\cos^2 \alpha - 1)\sin \alpha = 2\sin \alpha \cos^2 \alpha - \sin \alpha = 4\sin \alpha \cos^2 \alpha - \sin \alpha$$

$$5 - 4\sin \alpha \cos^2 \alpha + \sin \alpha \quad \sqrt{3\sin \alpha - 8\cos^2 \alpha + 4}$$

$$1 \quad \sqrt{2\sin \alpha - 8\cos^2 \alpha + 4\sin \alpha \cos^2 \alpha}$$

$$1 \quad \sqrt{2\sin \alpha - 4\cos^2 \alpha(2 - \sin \alpha)}$$

$$\frac{3\pi}{14} \quad \frac{\pi}{6}$$

$$\frac{9\pi}{42} \quad \frac{3\pi}{42} \quad \checkmark$$

4 точки : 1

3 точки : 4.8

2 точки : $6 \cdot 8 \cdot \binom{2}{8} = 6.28$

1 точка : $4 \cdot 9 \cdot \binom{5}{8} =$

$$= 4 \cdot \frac{8!}{5! \cdot 3!} = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6}{6} =$$

$$= 11.56$$

$$\binom{2}{4} = \frac{4!}{1! \cdot 3!} = 4$$

$$4 \cdot 3 \cdot 2 \quad \frac{4 \cdot 3}{2} = 6$$

$$\binom{2}{8} = \frac{8!}{6! \cdot 2!} = \frac{8 \cdot 7}{2} = 28$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☒ 2 ☒ 3 ☒ 4 ☒ 5 ☒ 6 ☒ 7 ☒

СТРАНИЦА

1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$1) p^2 - q^2 = 4080 \Rightarrow (p - q)(p + q) = 1080 = 2^3 \cdot 3^3 \cdot 5$$

p и q - простые числа $\Rightarrow p + q \neq 2$ и $p + q \neq 2$
(простые числа нечетные.)

при этом



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1
☒

2
☒

3
☒

4
☒

5
☒

6
☒

7
☒

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

