



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

11 КЛАСС. Вариант 11



1. [3 балла] Углы выпуклого многоугольника образуют арифметическую прогрессию, имеющую разность 2° и начинающуюся с угла 143° . Какое наибольшее число вершин может быть у такого многоугольника?
2. [4 балла] Целые числа x, y, z удовлетворяют равенству $x \ln 16 + y \ln 8 + z \ln 24 = \ln 6$. Найдите наименьшее возможное значение выражения $x^2 + y^2 + z^2$.
3. [4 балла] Из множества M , состоящего из семи подряд идущих натуральных чисел, выбираются шестёрки попарно различных чисел такие, что сумма чисел в каждой из шестёрок – простое число. Пусть p и q – две из таких сумм. Найдите множество M , если $p^2 - q^2 = 792$.
4. [5 баллов] Диагонали BD и AC трапеции $ABCD$ пересекаются в точке M , а отношение оснований $AD : BC = 1 : 2$. Точки I_1 и I_2 – центры окружностей ω_1 и ω_2 , вписанных в треугольники BMC и AMD соответственно. Прямая, проходящая через точку M , пересекает ω_1 в точках X и Y , а ω_2 – в точках Z и W (X и Z находятся ближе к M). Найдите радиус окружности ω_1 , если $I_1 I_2 = 13/2$, а $MZ \cdot MY = 5$.
5. [5 баллов] Что больше: $5 - 4 \sin \frac{3\pi}{14}$ или $4 \cos \frac{\pi}{7} - 5 \sin \frac{\pi}{14}$?
6. [4 балла] Даны 12 точек: 7 из них лежат на одной окружности в плоскости α , а остальные 5 расположены вне плоскости α . Известно, что если четыре точки из всех 12 лежат в одной плоскости, то эта плоскость – α . Сколько существует выпуклых пирамид с вершинами в данных точках?
7. [6 баллов] Дана правильная шестиугольная пирамида $SABCDEF$ (S – вершина) со стороной основания 2 и боковым ребром 4. Точка X лежит на прямой SF , точка Y – на прямой AD , причём отрезок XY параллелен плоскости SAB (или лежит в ней). Найдите наименьшую возможную длину отрезка XY .



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1
☒

2
☐

3
☐

4
☐

5
☐

6
☐

7
☐

СТРАНИЦА
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

№ 1.

Сумма углов выпуклого многоугольника можно найти по формуле $180^\circ(n-2)$, где n - кол-во вершин. С другой стороны т.к. углы многоугольника составляют арифметическую прогрессию, то можно посчитать их по формуле $\frac{2a_1 + d(n-1)}{2} \cdot n$, где $a_1 = 143^\circ$, $d = 2^\circ$, n - кол-во вершин. Значит

$$180 \cdot (n-2) = \frac{2a_1 + d(n-1)}{2} \cdot n$$

$$180n - 360 = (143 + n - 1) \cdot n$$

$$n^2 - 38n + 360 = 0$$

$$\frac{D}{4} = 19^2 - 360 = 1$$

$$n_1 = 19 - 1 = 18$$

$$n_2 = 19 + 1 = 20$$

Значит наибольшее число вершин данного многоугольника равно 20.

Ответ: 20.



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1
☐

2
☒

3
☐

4
☐

5
☐

6
☐

7
☐

СТРАНИЦА
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

№ 2.

$$x \ln 16 + y \ln 8 + z \ln 24 = \ln 6$$

$$4x \ln 2 + 3y \ln 2 + z \ln 8 + z \ln 3 - \ln 2 - \ln 3 = 0$$

$$\ln 2 (4x + 3y + 3z - 1) + \ln 3 (z - 1) = 0$$

$$\text{Т.к. } 3 = 2^{\log_2 3}, \text{ то } \ln 3 = \ln 2^{\log_2 3} = \log_2 3 \cdot \ln 2, \text{ тогда}$$

$$\ln 2 (4x + 3y + 3z - 1 + \log_2 3 \cdot z - \log_2 3) = 0$$

$$\text{Т.к. } \ln 2 > 0, \text{ то}$$

$$4x + 3y + 3z - 1 + \log_2 3 \cdot z - \log_2 3 = 0$$

$$\text{Т.к. } x, y, z \in \mathbb{Z}, \log_2 3 \notin \mathbb{Z}, \text{ то } z = 1, \text{ тогда}$$

$$4x + 3y + 3 - 1 + \log_2 3 - \log_2 3 = 0$$

$$4x + 3y = -2, \text{ при } |x| = 1, |y| = 1 \text{ уравнение не}$$

имеет решений. При $x = 1, y = -2$: $4 - 6 = -2$ - верно,

значит наименьшее возможное значение

$$x^2 + y^2 + z^2 \text{ равно } 1^2 + 1^2 + (-2)^2 = 1 + 1 + 4 = 6.$$

ответ: 6.



1 2 3 4 5 6 7
☐ ☐ ☒ ☐ ☐ ☐ ☐

СТРАНИЦА
 1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

№ 3.

$$792 = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 11, \text{ тогда } p^2 - q^2 = (p-q)(p+q) = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 11$$

Т.к. $|p-q| \leq 12$, то

$$\begin{cases} p-q=2 \rightarrow p+q=386 & (1) \\ p-q=3 \rightarrow p+q=264 & (2) \\ p-q=4 \rightarrow p+q=198 & (3) \\ p-q=6 \rightarrow p+q=132 & (4) \\ p-q=8 \rightarrow p+q=99 & (5) \\ p-q=9 \rightarrow p+q=88 & (6) \\ p-q=12 \rightarrow p+q=66 & (7) \end{cases}$$

(1): $\begin{cases} p+q=386 \\ p-q=2 \end{cases} \rightarrow p=199, q=197$

(2): $\begin{cases} p+q=264 \\ p-q=3 \end{cases} \rightarrow p \notin \mathbb{N}, q \notin \mathbb{N} \rightarrow \text{не подходит}$

(3): $\begin{cases} p+q=198 \\ p-q=4 \end{cases} \rightarrow p=101, q=97$

(4): $\begin{cases} p+q=132 \\ p-q=6 \end{cases} \rightarrow p=69, q=63, \text{ не подходит т.к. } p \neq q$
~~не являются простыми по усл.~~

(5): $\begin{cases} p+q=99 \\ p-q=8 \end{cases} \rightarrow p \notin \mathbb{N}, q \notin \mathbb{N} \rightarrow \text{не подходит}$

(6): $\begin{cases} p+q=88 \\ p-q=9 \end{cases} \rightarrow p \notin \mathbb{N}, q \notin \mathbb{N} \rightarrow \text{не подходит}$

(7): $\begin{cases} p+q=66 \\ p-q=12 \end{cases} \rightarrow p=39, q=27, \text{ не подходит, т.к. по усл. } p \neq q - \text{простые.}$

Для случая (1) подходит число $M = \{30, 31, 32, \dots, 36\}$,

Тогда $p = 36+35+34+33+31+30, q = 36+35+33+32+31+30$
 не подходит ни одно M .

Для случая (3) ~~подходит число~~ $M = \{13, 14, 15, \dots, 18\}$

~~тогда $p = 18+17+16+15+14+13$~~

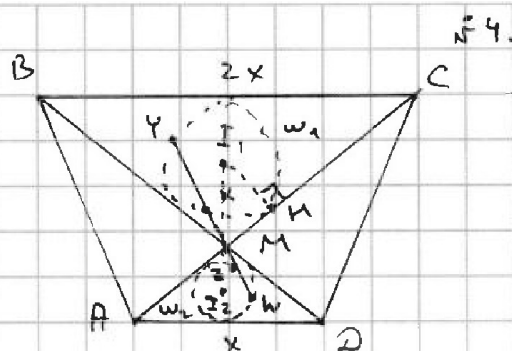
Ответ: $M = \{30, 31, 32, 33, 34, 35, 36\}$.



1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☒ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



$$I_1, I_2 = \frac{13}{2}, \quad MH \cdot MY = 5$$

Найти: R_{ω_1}

Решение:

Т.к. $\angle BCA = \angle CAD$, $\angle CBD = \angle BDA$ (пч $AD \parallel BC$), то

$$\triangle BMC \sim \triangle AMD, \quad \frac{BC}{AD} = 2 \rightarrow$$

$$k=2, \text{ значит } \frac{MX}{MY} = 2,$$

$$\frac{I_1 M}{I_2 M} = 2 \text{ (как соотв. элементы$$

$$\triangle BMC \text{ и } \triangle AMD). \text{ Тогда } 2I_2 M + I_1 M = \frac{13}{2} \rightarrow I_2 M = \frac{13}{6} \rightarrow$$

$$I_1 M = \frac{13}{3}, \quad MX \cdot MY = 2 \cdot 5 = 10$$

Пусть $Т.Н$ - точка касания MC и ω_1 , тогда

$$I_1 H \perp MC, \quad MH^2 = MX \cdot MY = 10$$

$$\text{Из } \triangle MI_1 H \text{ по т. Пифагора: } I_1 H^2 = R_{\omega_1}^2 = I_1 M^2 - MH^2 =$$

$$= \frac{169}{9} - 10 = \frac{169 - 90}{9} = \frac{79}{9} \rightarrow R_{\omega_1} = \frac{\sqrt{79}}{3}.$$

$$\text{Ответ: } R_{\omega_1} = \frac{\sqrt{79}}{3}.$$



1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☒ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

№5.

$$5 - 4 \sin \frac{3\pi}{14} \quad \vee \quad 4 \cos \frac{\pi}{7} - 5 \sin \frac{\pi}{14}$$

$$0 \quad \vee \quad 4 \cos \frac{\pi}{7} + 4 \sin \left(\frac{\pi}{7} + \frac{\pi}{14} \right) - 5 \left(1 + \sin \frac{\pi}{14} \right)$$

$$0 \quad \vee \quad 4 \cos \frac{\pi}{7} + 4 \sin \frac{\pi}{7} \cos \frac{\pi}{14} + 4 \cos \frac{\pi}{7} \sin \frac{\pi}{14} - 5 \left(1 + \sin \frac{\pi}{14} \right)$$

$$0 \quad \vee \quad 4 \cos \frac{\pi}{7} \left(1 + \sin \frac{\pi}{14} \right) - 5 \left(1 + \sin \frac{\pi}{14} \right) + 4 \cos \frac{\pi}{14} \sin \frac{\pi}{7}$$

$$0 \quad \vee \quad (4 \cos \frac{\pi}{7} - 5) \left(1 + \sin \frac{\pi}{14} \right) + 4 \cos \frac{\pi}{14} \sin \frac{\pi}{7}$$

$$5 + 5 \sin \frac{\pi}{14} \quad \vee \quad 4 \cos \frac{\pi}{7} + 4 \sin \frac{3\pi}{14}$$

$$5 \left(1 + \sin \frac{\pi}{14} \right) \quad \vee \quad 4 \left(\cos \frac{\pi}{7} + \sin \left(\frac{\pi}{2} - \frac{3\pi}{14} \right) \right)$$

$$5 \left(1 + \sin \frac{\pi}{14} \right) \quad \vee \quad 4 \left(\cos \frac{\pi}{7} + \cos \frac{2\pi}{7} \right)$$

$$5 \left(1 + \sin \frac{\pi}{14} \right) \quad \vee \quad 4 \left(2 \cos^2 \frac{\pi}{7} + \cos \frac{\pi}{7} - 1 \right)$$

$$5 \left(1 + \sin \frac{\pi}{14} \right) \quad \vee \quad 8 \left(\cos \frac{\pi}{7} + 1 \right) \left(\cos \frac{\pi}{7} - \frac{1}{2} \right)$$

$\sqrt{5}$

$$\cos \frac{\pi}{7} < \cos \frac{\pi}{3}, \text{ значит}$$

$$\cos \frac{\pi}{7} < \frac{1}{2}, \text{ значит}$$

$$8 \left(\cos \frac{\pi}{7} + 1 \right) \left(\cos \frac{\pi}{7} - \frac{1}{2} \right) < 0, \text{ значит}$$

$$5 \left(1 + \sin \frac{\pi}{14} \right) > 8 \left(\cos \frac{\pi}{7} + 1 \right) \left(\cos \frac{\pi}{7} - \frac{1}{2} \right), \text{ значит}$$

$$\text{Ответ: } 5 - 4 \sin \frac{3\pi}{14} > 4 \cos \frac{\pi}{7} - 5 \sin \frac{\pi}{14}.$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1
☐

2
☐

3
☐

4
☐

5
☐

6
☒

7
☐

СТРАНИЦА
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

№ 6.

1) Когда 0 точек принадлежит α , то можно просто выбрать любые 4 точки из 5 $\notin \alpha$ и построить по ним пирамиду, получится построить только треугольную пирамиду. Всего C_5^4 способов.

2) Когда 1 точка $\in \alpha$, то можно взять её и ещё любые три точки $\notin \alpha$, только 3 уг. пирамиды. Всего $C_7^1 \cdot C_5^3$

3) Когда 2 точки $\in \alpha$, то можно взять ещё любые две $\notin \alpha$, только 3 уг. пирамиды. Всего $C_7^2 \cdot C_5^2$

4) Когда 3 точки $\in \alpha$, то любая $\notin \alpha$, только 3 уг. пирамиды. Всего $C_7^3 \cdot C_5^1$

5) Далее можно прибавлять по одной точке $\in \alpha$, тогда в основании пирамиды будут 4, 5, 6 или 7 вершин. Всего $C_7^4 \cdot C_5^1$, $C_7^5 \cdot C_5^1$, $C_7^6 \cdot C_5^1$, $C_7^7 \cdot C_5^1$

Всего получается

ответ: $C_5^4 + C_7^1 \cdot C_5^3 + C_7^2 \cdot C_5^2 + C_7^3 \cdot C_5^1 + C_7^4 \cdot C_5^1 + C_7^5 \cdot C_5^1 + C_7^6 \cdot C_5^1 + C_7^7 \cdot C_5^1$

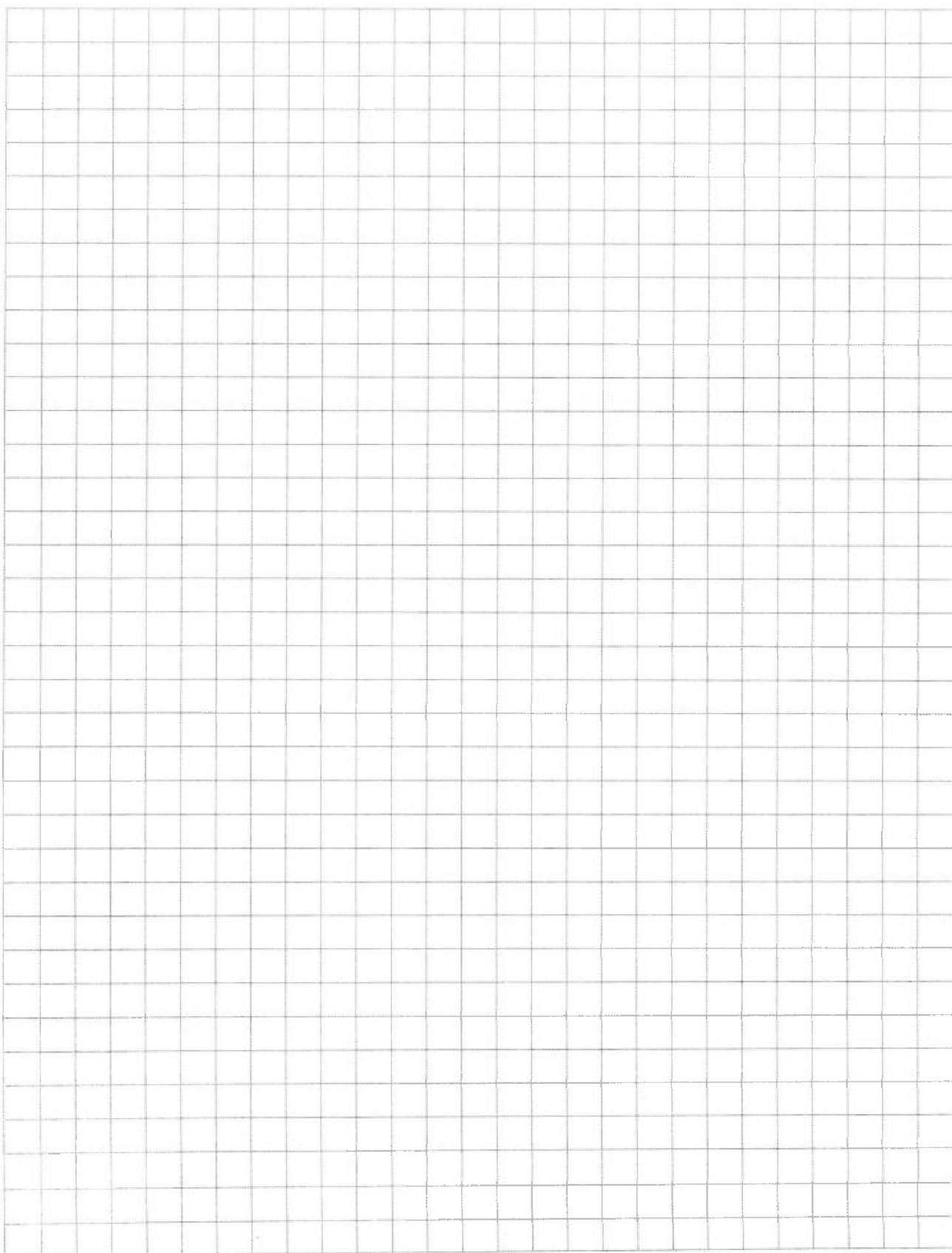


На одной странице можно оформлять **только одну задачу**. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!





На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1
☐

2
☐

3
☐

4
☐

5
☐

6
☐

7
☐

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$5 - 4 \sin \frac{3\pi}{14}$$

$$4 \cos \frac{\pi}{7} - 5 \sin \frac{\pi}{14}$$

$$5 (1 + \sin \frac{\pi}{14})$$

$$4 (\cos \frac{\pi}{7} + \sin \frac{\pi}{14})$$

$$8 (\cos \frac{\pi}{7} - 1) (\cos \frac{\pi}{7} + \frac{1}{2})$$

$$2 \cos^2 \frac{\pi}{7} + \cos \frac{\pi}{7} - 1 = 0$$

$$2 (\cos - 1) (\cos + 1)$$

$$D = 1 + 8 = 9$$

$$x_1 = \frac{-1-3}{2} = -2$$

$$x_2 = \frac{-1+3}{2} = 1$$

$$2 (\cos + 2) (\cos - \frac{1}{2})$$

$$5 + 7 + 10$$

$$75$$

$$\sin (90 - \alpha) = \cos \alpha$$

$$\frac{\pi}{5}$$

$$\frac{\pi}{7}$$

$$\frac{7\pi}{21}$$

$$\frac{3\pi}{21}$$

$$5.$$

6

$$C_5^2 = \frac{5 \cdot 4}{2}$$

$$210$$

$$285$$



На одной странице можно оформлять **только одну задачу**. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1
☐

2
☐

3
☐

4
☐

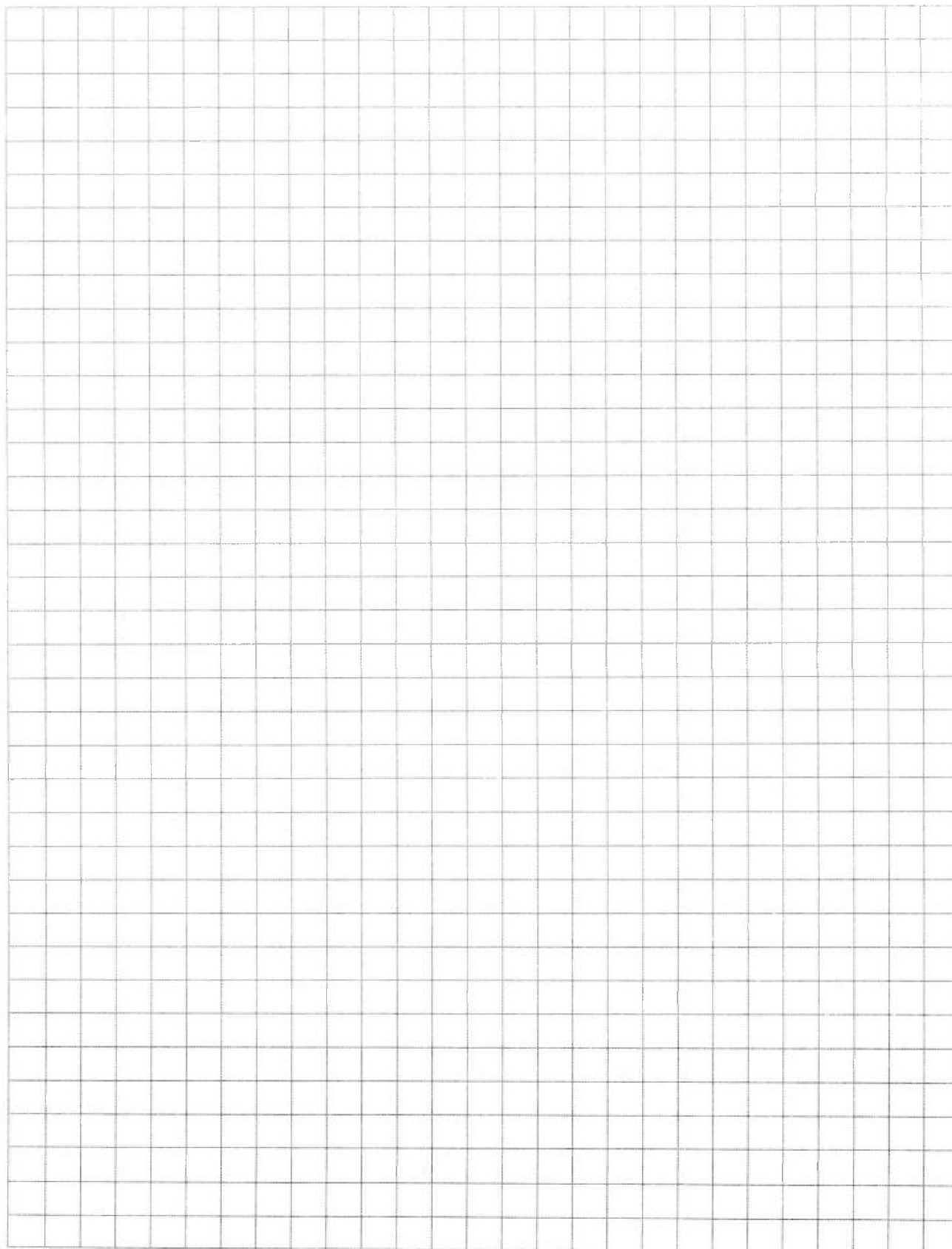
5
☐

6
☐

7
☐

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
из

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



$$S = \frac{(n-2) \cdot 180}{2} = \frac{2 \cdot 143 + 2(n-1)}{2}$$

$$(n-2) \cdot 180 = 143 + 2(n-1)$$

$$180n - 360 = 143 + 2n + 2$$

$$178n = 505 \quad 182n = 505$$

$$n = \frac{505}{178} = 2$$

$$180 \cdot 2 - 360 = 0$$

$$(n-2) \cdot 180 = \frac{2 \cdot 143 - 2(n-1)}{2} \cdot n$$

$$180n - 360 = (143 - n) \cdot n$$

$$180n - 360 = 143n - n^2 \rightarrow n^2 + (180 - 143)n - 360 = 0$$

$$143 + 141 + 139 = 423$$

$$n^2 + 36n - 360 = 0$$

$$D = 18^2 + 360 = 684$$

$$3 \cdot 35 = 105$$

$$2) x, y, z \in \mathbb{Z}, x \ln 16 + y \ln 8 + z \ln 24 = \ln 6, x^2 + y^2 + z^2 \text{ мин}$$

$$3 \cdot 35 = 105 \quad 4x \ln 2 + 3y \ln 2 + z \ln 6 + 2z \ln 2 \cdot \ln 6 = 0$$

$$\ln 2(4x + 3y + z) + \ln 6(z-1) = 0$$

$$13 \ 14 \ 15 \ 16 \ 17 \ 18 \ 19 \ 20$$

$$x \ln 4 + x \ln 4 + y \ln 4 + y \ln 2 + z \ln 4 + z \ln 6 = \ln 6$$

$$\ln 4(x+y+z) +$$

$$p+q=132$$

$$2q=126, q=63$$

$$p-q=6$$

$$p=63, q=63$$

$$3) 782 = 2 \cdot 391 = 2^2 \cdot 198 = 2^3 \cdot 99 = 2^3 \cdot 3 \cdot 33 = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 11$$

$$66, 12 \quad 2, 3, 4, 6, 9, 18, 8$$

$$(p-q)(p+q) = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 11 \quad M \{30, 31, 32, 33, 34, 35, 36\}$$

$$\begin{cases} p+q=198 \\ p-q=4 \end{cases}$$

$$2q=194 \rightarrow q=97 \rightarrow p=101$$

$$2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37$$

$$86 \cdot 11 = 946$$

$$\begin{cases} p+q=386 \\ p-q=2 \end{cases}$$

$$2q=384 \rightarrow q=192 \rightarrow p=386$$

$$126 \cdot 12$$

$$66 + 15 = 81$$

$$66 + 15 = 81$$

$$66 + 15 = 81$$

$$66 + 15 = 81$$

$$66 + 15 = 81$$

$$66 + 15 = 81$$