



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

11 КЛАСС. Вариант 12



1. [3 балла] Углы выпуклого многоугольника образуют арифметическую прогрессию, имеющую разность 2° и начинающуюся с угла 132° . Какое наибольшее число вершин может быть у такого многоугольника?
2. [4 балла] Целые числа x, y, z удовлетворяют равенству $x \ln 25 + y \ln 75 + z \ln 125 = \ln 45$. Найдите наименьшее возможное значение выражения $x^2 + y^2 + z^2$.
3. [4 балла] Из множества M , состоящего из семи подряд идущих натуральных чисел, выбираются шестёрки попарно различных чисел такие, что сумма чисел в каждой из шестёрок – простое число. Пусть p и q – две из таких сумм. Найдите множество M , если $p^2 - q^2 = 1080$.
4. [5 баллов] Диагонали BD и AC трапеции $ABCD$ пересекаются в точке M , а отношение оснований $AD : BC = 1 : 2$. Точки I_1 и I_2 – центры окружностей ω_1 и ω_2 , вписанных в треугольники BMC и AMD соответственно. Прямая, проходящая через точку M , пересекает ω_1 в точках X и Y , а ω_2 – в точках Z и W (X и Z находятся ближе к M). Найдите радиус окружности ω_1 , если $I_1 I_2 = 8$, а $MZ \cdot MY = 9$.
5. [5 баллов] Что больше: $5 - 4 \sin \frac{9\pi}{14}$ или $3 \sin \frac{3\pi}{14} - 4 \cos \frac{3\pi}{7}$?
6. [4 балла] Даны 12 точек: 8 из них лежат на одной окружности в плоскости α , а остальные 4 расположены вне плоскости α . Известно, что если четыре точки из всех 12 лежат в одной плоскости, то эта плоскость – α . Сколько существует выпуклых пирамид с вершинами в данных точках?
7. [6 баллов] Дана правильная шестиугольная пирамида $SABCDEF$ (S – вершина) со стороной основания 1 и боковым ребром $\sqrt{2}$. Точка X лежит на прямой SF , точка Y – на прямой AD , причём отрезок XY параллелен плоскости SAB (или лежит в ней). Найдите наименьшую возможную длину отрезка XY .



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



СТРАНИЦА

1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

1. Пусть разность прогрессии $d = 2^\circ$, а её члены $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ — n углов.

Тогда $\alpha_1 = 132^\circ$; $\alpha_2 = 132^\circ + d$; ...; $\alpha_n = 132^\circ + (n-1)d$.

Посчитаем сумму углов многоугольника этим способом:

1) По формуле для суммы членов арифм. прогр:

$$\frac{\alpha_1 + \alpha_n}{2} \cdot n = \frac{132^\circ + 132^\circ + (n-1)d}{2} \cdot n = \frac{132 \cdot 2 + (n-1) \cdot 2}{2} \cdot n$$

2) Сумма углов выпуклого ^{много}угольника есть: $(n-2) \cdot 180^\circ$ по известной формуле, где n — кол-во углов.

Тогда получаем:

$$\frac{132 \cdot 2 + (n-1) \cdot 2}{2} \cdot n = (n-2) \cdot 180$$

$$(132 + n - 1) \cdot n = 180n - 360$$

$$131n + n^2 = 180n - 360$$

$$n^2 - 49n + 360 = 0$$

$$D = 49^2 - 4 \cdot 360 = 961 = 31^2$$

$$n = \frac{49 \pm 31}{2} \Leftrightarrow \begin{cases} n = 40 \\ n = 9 \end{cases}$$

Если $n = 40$, то $\alpha_n = 132 + (40-1) \cdot 2 = 132 + 39 \cdot 2 = 132 + 60 + 18 = 210 > 180$, однако многоугольник выпуклый $\Rightarrow$ все его углы не могут больше его угла не может быть $> 180^\circ \Rightarrow n = 40$ не реализуется.

Если $n = 9$, то $\alpha_1 = 132^\circ$, $\alpha_2 = 134^\circ$; ...; $\alpha_9 = 132^\circ + 2 \cdot 8^\circ = 132^\circ + 16^\circ = 148^\circ$. Очевидно, такой многоугольник существует.

Ответ: наибольшее число вершин: 9.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7
☐ ☒ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐

СТРАНИЦА
 1 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$2. \quad x \cdot \ln 25 + y \cdot \ln 75 + z \cdot \ln 125 = \ln 45$$

$$\ln 25^x + \ln 75^y + \ln 125^z = \ln 45$$

$$\ln(25^x \cdot 75^y \cdot 125^z) = \ln 45$$

Т.к. $\ln f(x) = \ln x$ — ~~возрастает~~ ^{монотонная} функция, то:

$$25^x \cdot 75^y \cdot 125^z = 45 \quad \text{— равносильное условие}$$

$$(5^2)^x \cdot (5^2 \cdot 3)^y \cdot (5^3)^z = 3^2 \cdot 5$$

$$5^{2x} \cdot 5^{2y} \cdot 3^y \cdot 5^{3z} = 3^2 \cdot 5$$

$$5^{2x+2y+3z} \cdot 3^y = 5^1 \cdot 3^2$$

По основной теореме арифметики каждое натуральное число единственным образом раскладывается на простые множители; а значит последнее условие равносильно:

$$\begin{cases} 2x+2y+3z=1 \\ y=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x+3z+4=1 \\ y=2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x+3z=-3 & (1) \\ y=2 & (2) \end{cases}$$

∴ — решается

Рассмотрим (1): $2x+3z=-3$. $3z:3$, $-3:3 \Rightarrow$

$\Rightarrow 2x:3 \Rightarrow x:3$. Пусть $x=3x_1$. Подставим:

$$2 \cdot 3x_1 + 3z = -3$$

$$2x_1 + z = -1. \quad 2x_1 \text{ — чётное число; } -1 \text{ — не-}$$

чётное $\Rightarrow z$ — также нечётное число как разность нечётного и чётного. Пусть $z=2z_1+1$. Под-



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☒ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА

2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

ставим: $2x_1 + (2z_1 + 1) = -1$

$$2x_1 + 2z_1 = -2$$

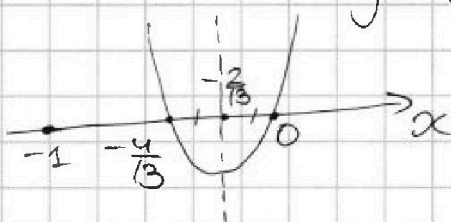
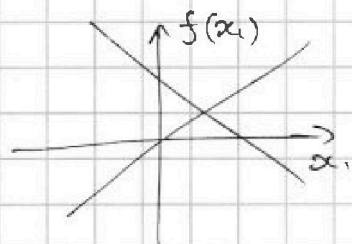
$$x_1 + z_1 = -1 \Leftrightarrow z_1 = -1 - x_1.$$

Выражение $x^2 + y^2 + z^2$ минимально $\Leftrightarrow x^2 + z^2$ минимально, ведь $y = 2$, как было показано ранее.

$$\begin{aligned} x^2 + z^2 &= (3x_1)^2 + (2z_1 + 1)^2 = (3x_1)^2 + (2 \cdot (-1 - x_1) + 1)^2 = \\ &= 9x_1^2 + (-2x_1 - 1)^2 = 9x_1^2 + (2x_1 + 1)^2 = 9x_1^2 + 4x_1^2 + 1 + 4x_1 = \\ &= 13x_1^2 + 4x_1 + 1. \end{aligned}$$

$13x_1^2 + 4x_1 + 1$ — минимально $\Leftrightarrow 13x_1^2 + 4x_1$ — минимально. Исследуем $f(x_1) = 13x_1^2 + 4x_1 = x_1(13x_1 + 4)$

$$f(x) = 13x^2 + 4x = x(13x + 4), \text{ где } x \in \mathbb{R}$$



Графиком $f(x)$ является парабола с ветвями вверх.

минимум $f(x)$ достигается при

меньше

$$x_0 = -\frac{\frac{4}{13} + 0}{2} = -\frac{2}{13}, \text{ и тем}$$

аб больше разности

между абсциссой произвольной точки графика и x_0 , тем больше значение $f(x)$ в этой

точке $\Rightarrow$ т.к. $x_1 \in \mathbb{Z}$, то минимальное зна-

чение $13x_1^2 + 4x_1 = 13 \cdot 0^2 + 4 \cdot 0 = 0$ при $x_1 = 0$, т.к.

$x_1 = 0$ — ближайшая целая абсцисса к $-\frac{2}{13}$

$\Rightarrow$ миним. значение $x^2 + y^2 + z^2 = (3x_1)^2 + 2^2 + (-2x_1 - 1)^2 =$

$$= 4 + 1 = 5 \text{ и достигается}$$

при $x = 3x_1 = 0$; $y = 2$; $z = (-2x_1 - 1) = -1$.

Ответ: миним. значение равно 5; достиг. при $x = 0$; $y = 2$; $z = -1$.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☒ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА

1 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

3. Пусть n -натур. элемент множества
 $M = \{n, n+1, n+2, n+3, n+4, n+5, n+6\}$. n -натур

Минимальная сумма в мешочке есть сумма
6 самых маленьких элементов M :

$$n + (n+1) + \dots + (n+5) = \frac{2n+5}{2} \cdot 6 = (2n+5) \cdot 3 = 6n+15$$

Максимальная сумма в мешочке есть сумма
6 самых больших элементов M :

$$(n+1) + (n+2) + \dots + (n+6) = \frac{2n+7}{2} \cdot 6 = (2n+7) \cdot 3 = 6n+21$$

Т.е. любая сумма, проходящая под условие
(обозначим её Σ) удовлетворяет нер-ву:

$$6n+15 \leq \Sigma \leq 6n+21.$$

Заметим, что $6n+21 > 21$, а также $6n+21 : 3 \Rightarrow$
 $\Rightarrow$ это не простое число $\Rightarrow \Sigma \neq 6n+21$. Также
 $6n+20 > 20$ и $6n+20 : 2 \Rightarrow 6n+20$ - составное и
 $\Sigma \neq 6n+20$.

Аналогично, $6n+15 > 15$ и $6n+15 : 3 \Rightarrow \Sigma \neq 6n+15$

А ещё $6n+16 > 16$ и $6n+16 : 2 \Rightarrow \Sigma \neq 6n+16$

Получаем узкую оценку на Σ :

$$6n+17 \leq \Sigma \leq 6n+19, \text{ но } \Sigma \neq 6n+18, \text{ т.к.}$$

это число $: 2$

Таких $\leftarrow$ и > 18
существует только

две: $6n+17$ и $6n+19$

По условию: $p^2 - q^2 = 1080 \Rightarrow p^2 > q^2 \Rightarrow p > q$, т.к.

Значим: $p = 6n+19$

$q = 6n+17$. Подставим в

равенство (*):

$p, q \in \mathbb{N}$.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☒	☐	☐	☐	☐

СТРАНИЦА

2 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Получим: $(6n+19)^2 - (6n+17)^2 = 1080$

$$((6n+19) - (6n+17))((6n+19) + (6n+17)) = 1080$$

$$2 \cdot (12n + 36) = 1080$$

$$12n + 36 = 540$$

$$2n + 6 = 90$$

$$2n = 84 \Leftrightarrow n = 42.$$

по условию
существует

Значит исходное множество $M = \{42, 43, 46, 45, 46, 47, 48\}$. Тогда $p = 6 \cdot 42 + 19 = 271$ и $q = 6 \cdot 42 + 17 = 269$
действ. простое
числа.

Ответ: $M = \{42, 43, 44, 45, 46, 47, 48\}$

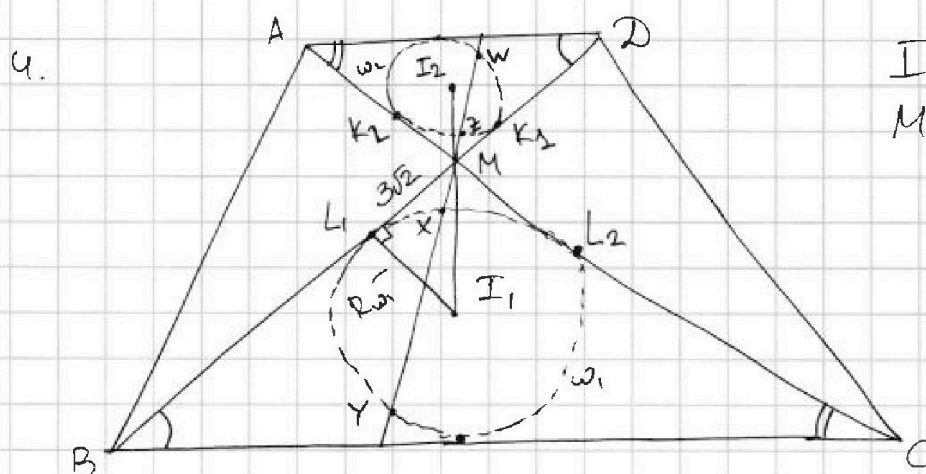


На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☒ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
1 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



$$I_1 I_2 = 8$$

$$MZ \cdot MY = 9$$

$$\frac{AD}{BC} = \frac{1}{2}$$

K_1, K_2, L_1, L_2 — точки касания окр. со сторонами

Решение: Т.к. $AD \parallel BC$ (это трапеция) в трапеции, то $\angle CBM = \angle ADM$; $\angle BCM = \angle DAM$ как накрест лежащие при параллельных прямых AD и BC , а значит $\triangle MBC \sim \triangle MDA$ по 2м углам.

Из подобия следует, что все соответственные элементы данных треугольников относятся друг к другу как коэффициенты подобия, т.е. $k = \frac{BC}{AD} = 2$. Тогда помемно, что $\frac{MX}{MZ} = 2$,

ведь при MX и MY являющиеся соответственными в $\triangle MDA$ и $\triangle MBC$, т.к. отношения пар равных углов от соответственных сторон MB и MD ($\angle BMX = \angle DMK = \angle DMK$, как верт.), ну и сами вписанные окружности треугольников также подобны. Тогда: $MZ \cdot MY = 9$

из т. М и $\frac{MX}{2} \cdot MY = 9$

$$MX \cdot MY = 18$$

По Th. о касательной и секущей к окружности: $MX \cdot MY = ML^2 = 18$



1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☒ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
2 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Тогда $ML_1 = \sqrt{18} = 3\sqrt{2}$.

Из подобия $\triangle MBC$ и $\triangle MDA$ можно сделать вывод о том, что точки I_1, M, I_2 лежат на одной прямой, т.к. точки I_1 и I_2 — соответственные в этих треугольниках, а значит соответственные отрезки MI_1 и MI_2 исходят из равных углов к соответственным сторонам, т.е. $\angle BMI_1 = \angle DMI_2$, а значит MI_2 и MI_1 стремятся в I_1, I_2 , проходящий через M . Но также из соображений подобия $\frac{MI_1}{MI_2} = 2 = k$, т.е. $MI_1 = 2MI_2$.

$$I_1 I_2 = I_1 M + I_2 M = MI_1 + \frac{MI_1}{2} = \frac{3}{2} MI_1 = 8$$

$$\Rightarrow MI_1 = \frac{8 \cdot 2}{3} = \frac{16}{3}. \text{ Проведём радиус } I_1 L_1$$

в точку касания L_1 , который перпендикулярен касательной по свойству. Тогда по Теореме Пифагора:

$$MI_1^2 = ML_1^2 + I_1 L_1^2$$

$$\left(\frac{16}{3}\right)^2 = (3\sqrt{2})^2 + R_{\omega_1}^2 \Rightarrow R_{\omega_1}^2 = \frac{16^2}{9} - 18 = \frac{256 - 18 \cdot 9}{9} = \frac{256 - 162}{9} = \frac{94}{9} \Rightarrow R_{\omega_1} = \frac{\sqrt{94}}{3} - \text{искомый радиус окружности } \omega_1.$$

Ответ: $R_{\omega_1} = \frac{\sqrt{94}}{3}$.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☒ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
1 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$5. \quad 5 - 4 \sin \frac{3\pi}{14} \vee 3 \sin \frac{3\pi}{14} - 4 \cos \frac{3\pi}{7}$$

$\sin \frac{3\pi}{14} = \sin \frac{9\pi}{14} = \sin(3 \cdot \frac{3\pi}{14}) = 3 \sin(\frac{3\pi}{14}) - 4 \sin^3(\frac{3\pi}{14})$ по формуле синуса тройного угла.

$\cos \frac{3\pi}{7} = \cos(2 \cdot \frac{3\pi}{14}) = 2 \cos^2(\frac{3\pi}{14}) - 1 = 1 - 2 \sin^2(\frac{3\pi}{14})$ по формуле косинуса двойного угла.

$$5 - 4(3 \sin(\frac{3\pi}{14}) - 4 \sin^3(\frac{3\pi}{14})) \vee 3 \sin \frac{3\pi}{14} - 4(1 - 2 \sin^2(\frac{3\pi}{14}))$$

Пусть $\sin(\frac{3\pi}{14}) = x$

$$5 - 4(3x - 4x^3) \vee 3x - 4(1 - 2x^2)$$

$$5 - 12x + 16x^3 \vee 3x - 4 + 8x^2$$

$$16x^3 - 8x^2 - 15x + 9 \vee 0$$

Рассмотрим $f(x) = 16x^3 - 8x^2 - 15x + 9$

Найдем корни: $f'(x) = 16 \cdot 3x^2 - 16x - 15 =$
 $= \frac{1}{16} \cdot 3(x^2 - \frac{1}{3}x - \frac{5}{16}) = \frac{1}{16} \cdot 3(x - \frac{9}{12})(x + \frac{5}{12})$



Видим, что на промежутке $[0; \frac{3}{4}]$ функция $f(x)$ убывает. Заметим, что $\sin(\frac{3\pi}{14}) < \frac{3}{4}$, т.к.

$$\sin(\frac{3\pi}{14}) < \sin(\frac{3\pi}{12}) = \sin(\frac{\pi}{4}) = \frac{\sqrt{2}}{2} < \frac{3}{4} \quad (\frac{\sqrt{2}}{2} < \frac{3}{4})$$

при этом при этом $\sin(\frac{3\pi}{14}) > 0$, т.к. $\frac{3\pi}{14} \in (0; \frac{\pi}{2})$.
 $\frac{3\pi}{14} \in (0; \frac{\pi}{2})$.
 $\left. \begin{array}{l} 4\sqrt{2} < 6 \\ 2\sqrt{2} < 3 \\ 8 < 9 \end{array} \right\}$

Заметим, что $\sin(\frac{3\pi}{18}) < \sin(\frac{3\pi}{14})$, т.к. оба

углы в I четверти и $\frac{3\pi}{18} < \frac{3\pi}{14} \Rightarrow$

$\Rightarrow$ Если $f(\sin(\frac{3\pi}{18})) < 0$, то и $f(\sin(\frac{3\pi}{14})) < 0$,



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☒ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
2 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Т.к. $f(x)$ на $[0; \frac{3}{4}]$ убывает, как было доказано ранее.

$$\text{Найдём } f(\sin(\frac{3\pi}{14})) = f(\sin(\frac{\pi}{6})) = f(\frac{1}{2})$$

$$f(\frac{1}{2}) = 16 \cdot (\frac{1}{2})^3 - 8 \cdot (\frac{1}{2})^2 - 15 \cdot \frac{1}{2} + 9 = 2 - 2 - 7,5 + 9$$

Также $\sin(\frac{3\pi}{14}) > 0$, т.к. $\frac{3\pi}{14} \in (\frac{\pi}{2}; \pi)$.

Заметим, что $\sin(\frac{3\pi}{14}) < \sin(\frac{3\pi}{12}) = \sin(\frac{\pi}{4}) = \frac{1}{\sqrt{2}}$,

т.к. $\frac{3\pi}{12} > \frac{3\pi}{14}$ и оба угла в I четверти.

Найдём $f(\sin(\frac{\pi}{4})) = f(\frac{1}{\sqrt{2}})$:

$$\begin{aligned} f(\frac{1}{\sqrt{2}}) &= 16 \cdot (\frac{1}{\sqrt{2}})^3 - 8 \cdot (\frac{1}{\sqrt{2}})^2 - 15 \cdot (\frac{1}{\sqrt{2}}) + 9 = \\ &= 16 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} - 8 \cdot \frac{1}{2} - 15 \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} + 9 = \frac{8}{\sqrt{2}} - 4 - \frac{15}{\sqrt{2}} + 9 = \\ &= -\frac{7}{\sqrt{2}} + 5 > 0, \text{ т.к. } 5 > \frac{7}{\sqrt{2}} \end{aligned}$$

$$25 > \frac{49}{2}$$

$$50 > 49$$

$\Rightarrow f(\sin \frac{3\pi}{14})$ также больше нуля, поскольку $f(x)$ убывает на $[0; \frac{3}{4}]$, как было доказано ранее. $\Rightarrow f(x) > 0$ знак в исходном неравенстве ($>$), т.е.

$$5 - 4 \sin \frac{3\pi}{14} > 3 \sin \frac{3\pi}{14} - 4 \cos \frac{3\pi}{14}.$$

$$\text{Ответ: } 5 - 4 \sin \frac{3\pi}{14} > 3 \sin \frac{3\pi}{14} - 4 \cos \frac{3\pi}{14}.$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

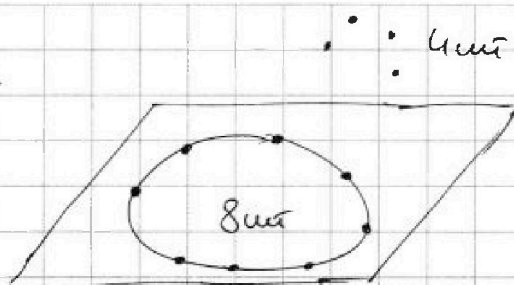
1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☒ 7 ☐

СТРАНИЦА

1 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

6.



Кол-во трёхугольных пирамид равно кол-во способов выбрать тройку точек, не лежащие на одной плоскости, т.е.

это кол-во равно:

$$1) \text{ Три точки на окр. одна во вне } d: C_8^3 \cdot 4 = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6}{3!} \cdot 4 = 56 \cdot 4 = 224.$$

$$2) \text{ две точки на окр, две во вне } d: C_8^2 \cdot C_4^2 = \frac{8 \cdot 7}{2} \cdot \frac{4 \cdot 3}{2} = \frac{56}{2} \cdot \frac{12}{2} = 28 \cdot 6 = 120 + 48 = 168$$

$$3) \text{ три точки во вне, одна на окр: } C_4^3 \cdot 8 = \frac{4 \cdot 3 \cdot 2}{3!} \cdot 8 = 32$$

Всего:

$$u) \text{ все тройки точек скрутим: } 1 \text{ способ (берём все 4 точки)}$$

$$\text{Всего: } 224 + 168 + 32 + 1 = 225 + 200 = 425 \text{ сп.}$$

Посчитаем кол-во n угловых пирамид, где $8 \geq n \geq 4$: Это есть $C_8^{n-1} \cdot 4$ (выбираем $n-1$ точку на окр и одну во из тройках во вне)

$$(C_8^3 + C_8^4 + C_8^5 + C_8^6 + C_8^7 + C_8^8) \cdot 4 = (2^8 - C_8^2 - C_8^1 - C_8^0) \cdot 4 = (256 - 28 - 8 - 1) \cdot 4 = (255 - 36) \cdot 4 = 219 \cdot 4 = 876$$

по известному тождеству $C_n^0 + C_n^1 + \dots + C_n^n = 2^n$.



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☒	☐

СТРАНИЦА
2 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Итого общее кол-во см:

$$425 + 876 = 1200 + 101 = 1301$$

Ответ: 1301



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7
☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐

СТРАНИЦА
из

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$5 - 4 \sin \frac{9\pi}{14} \vee 3 \sin \frac{3\pi}{14} - 4 \cos \frac{3\pi}{7}$$

$$16x^2 - 8x^2 - 15x + 8 \vee 0$$

$$16x^2 - 16x - 15 \vee 0$$

$$3x^2 - x - \frac{15}{16} \vee 0$$

$$3x^2 - 2 \cdot \frac{1}{3}x \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{15}{16} \vee 0$$

$$x^2 - \frac{1}{3}x - \frac{5}{16} \vee 0$$

$$x^2 - 2 \cdot x \cdot \frac{1}{6} + \frac{1}{36} - \frac{5}{16} - \frac{1}{36} \vee 0$$

$$(x - \frac{1}{6})^2 - \frac{5}{16} - \frac{1}{36} \vee 0$$

$$(x - \frac{1}{6} - \frac{7}{12})(x - \frac{1}{6} + \frac{7}{12}) \vee 0$$

$$(x - \frac{9}{12})(x + \frac{5}{12}) \vee 0$$

$$16 \cdot \frac{1}{8} - 8 \cdot \frac{1}{4} - 15 \cdot \frac{1}{2} + 9$$

$$-2 - 2 - 7.5 + 9$$

$$\frac{9}{12} \cdot \frac{5}{12} =$$

$$= \frac{35}{16}$$

$$\frac{\sqrt{2}}{2} \quad \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$16 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} - 8 \cdot \frac{1}{2} - 15 \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} + 2$$

$$\frac{8}{\sqrt{2}} - 4 - 7.5 \frac{15}{\sqrt{2}} + 9$$

$$-\frac{7}{\sqrt{2}} + 5 > 0$$

$$5 > \frac{7}{\sqrt{2}}$$

$$5\sqrt{2} > 7$$

$$25 \cdot 2 > 49$$

$$\frac{5}{16} + \frac{1}{36} =$$

$$x = \sin \frac{3\pi}{14}$$

$$= \frac{45+4}{36 \cdot 4} = \frac{49}{36 \cdot 4} = \frac{7}{2 \cdot 6} \left(\frac{7}{12}\right)^2$$

$$\frac{\pi}{6} < \frac{3\pi}{14} < \frac{3\pi}{14}$$

$$\frac{3\pi}{14} < \frac{12}{14}$$

$$\frac{9}{12}$$

$$\frac{3\pi}{14} \vee \frac{2}{12}$$

$$12\pi \vee 3 \cdot 14$$

$$48\pi \vee 14$$

$$24 \cdot 12 \cdot 3\pi \vee 9 \cdot 14$$

$$\sin \frac{3\pi}{14} \vee \frac{3}{12} = \frac{3}{4}$$

$$\sin \frac{\pi}{8} = \frac{1}{2}$$

$$\frac{3\pi}{12}$$

$$\frac{3\pi}{12} = \frac{\pi}{4} \quad \frac{3\pi}{14}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

СТРАНИЦА
из

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$x \ln 25 + y \ln 75 + z \ln 125 = \ln 45$$

$$\ln 25^x + \ln 75^y + \ln 125^z = \ln 45$$

$$\ln 25^x \cdot 75^y \cdot 125^z = \ln 45$$

$$25^x \cdot 75^y \cdot 125^z = 45$$

$$25^x \cdot 25 \cdot 5^{2x} \cdot 5^{2y} \cdot 3^y \cdot 5^{3z} = 3^2 \cdot 5$$

$$z = 2z_1 + 1$$

$$2x_1 + z = -1$$

$$2x_1 + 2z_1 + 1 = -1$$

$$x_1 + z_1 = -1$$

$$z_1 = -1 - x_1$$

$$\ln 25^x + \ln 75^y + \ln 125^z = \ln 45$$

$$x_1 = 0$$

(u)

$$\ln 25^x \cdot 75^y \cdot 125^z = \ln 45$$

$$25^x \cdot 75^y \cdot 125^z = 45$$

$$5^{2x} \cdot 5^{2y} \cdot 3^y \cdot 5^{3z} = 3^2 \cdot 5$$

$$5^{2x+2y+3z} \cdot 3^y = 3^2 \cdot 5$$

$$2x + 4 + 3z = 1$$

$$2x + 3z = -3$$

$$(3x_1)^2 + 4 + \frac{(-1-x_1)^2}{2x_1+1} \rightarrow \min$$

$$8x_1^2 + 4 + 4x_1^2 + 1 + 4x_1 \rightarrow \min$$

$$13x_1^2 + 4x_1 \rightarrow \min$$

$$x^2 + y^2 + z^2$$

$$\log_a^p b + \log_a^p c = r$$

$$\frac{a^p + b^p}{a^p} = \log_a^p bc$$

$$75 = 25 \cdot 3 \quad a^d = b$$

$$125 = 25 \cdot 5 = 5^3 \quad a^p = c$$

$$x = 0 \quad z = -1$$

$$y = 2$$

$$2x + 2y + 3z = 1 \quad (y=2)$$

$$x : 3$$

$$x = 3x_1$$

$$9x_1^2 + y^2 \rightarrow \min$$

$$9x_1^2 + (2z_1 + 1)^2$$

$$9x_1^2 + (-2 - 2x_1 + 1)^2$$

$$9x_1^2 + (-2x_1 - 1)^2$$

$$8x_1^2 + 4x_1^2 + 1 +$$

$$+ 4x_1 - 1$$

$$x = 3x_1 \quad z = 2z_1 + 1$$

$$2x_1 + z = -1$$

$$2x_1 + 2z_1 + 1 = -1$$

$$2x_1 + 2z_1 = -2$$

$$x_1 + z_1 = -1$$

$$z_1 = -1 - x_1$$

$$z = 2z_1 + 1 = z_1 - 1$$

$$= -2 - 2x_1 + 1 =$$

$$= -2x_1 - 1$$

$$\frac{\sqrt{2}}{2} < \frac{3}{4}$$

$$4\sqrt{2} < 6$$

$$2\sqrt{2} < 3$$

$$2\sqrt{2}$$

$$8 < 9$$

$$\frac{\sqrt{2}}{2}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

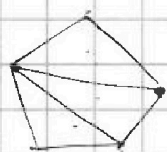
1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
из

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

1. $d = 2^\circ$
 $\alpha = 132^\circ$

$(n-2) \cdot 180^\circ$



$n(n-2)$



$d = a_{n+1} - a_n$

$\frac{132^\circ + 132^\circ + (n-1) \cdot 2^\circ}{2} \cdot n = (n-2) \cdot 180^\circ$

$61(66^\circ + 66^\circ + n-1) \cdot n = (n-2) \cdot 180^\circ$

$132^\circ (131-n) \cdot n = 180n - 360$

n верш

1) 132

2) $132+2$

$n) 132 + 2 \cdot (n-1)$

$n^2 - 49n + 360 = 0$

$49^2 - 360 \cdot 4$

$\frac{2401}{1440} = 961$

$\begin{array}{r} 8 \\ \times 49 \\ 1441 \\ 196 \\ \hline 2401 \end{array}$

$\frac{132 + 132 + 2(n-1) \cdot n}{2} = (n-2) \cdot 180^\circ$

$(132 + (n-1)) \cdot n = 180n - 360^\circ$

$131n + n^2 = 180n - 360$

$\begin{array}{r} 2 \\ \times 360 \\ 1440 \end{array}$

$961 = 31^2$

$\frac{49 \pm 31}{2} =$

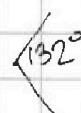
$\begin{array}{r} 9 \\ 40 \end{array}$

Ответ:

$\begin{array}{r} \times 31 \\ 31 \\ 93 \\ \hline 961 \end{array}$

$132 + 2 \cdot 38 =$

$= 132 + 60 + 18 = 132 + 18 + 60$



прош.

$150 + 60 > 180^\circ$

а он
возник



1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
из

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$M = u; u+1; u+2; \dots; u+6 \text{ или}$$

$$p^2 - q^2 = 1080$$

$$(p-q)(p+q) = 1080$$

$$p, q \geq u + (u+1) + \dots + (u+5)$$

$$= \frac{2u+5}{2} \cdot 6 =$$

$$= (2u+5) \cdot 3 =$$

$$= 6u+15$$

$$\leq (u+1) + \dots + (u+6) = \quad u \geq 1$$

$$= \frac{2u+7}{2} \cdot 6 =$$

$$= (2u+7) \cdot 3 =$$

$$= 6u+21$$

$$p-q \geq 6u+15 - (6u+21)$$

$$6u+15 \leq \Sigma \leq 6u+21$$

$$6u+16 \leq \Sigma \leq 6u+20$$

$$6u+17 \leq \Sigma \leq 6u+19$$

$6u+18$ - нечетное

$$6u+17 > 86 \text{ случаев}$$

$$(6u+17)$$

$$(6u+18 - 6u - 17)(6u+18 + 6u + 17) = 1080$$

$$u_2; u_3; u_4; u_5; u_6; u_7; u_8$$

$$2 \cdot (6u+18 + 6u + 17) = 1080$$

$$6u+12u+36 = 540$$

$$2u+6 = 90$$

$$2u = 84$$

$$u = 42$$

$$5 - 4 \sin \frac{9\pi}{14} \vee 3 \sin \frac{3\pi}{14} -$$

$$-4 \cos \frac{3\pi}{7}$$

$$\cos \frac{3\pi}{7} = 2 \cos^2 \frac{3\pi}{14} - 1$$

$$6u+19$$

$$240 + 12 + 19 =$$

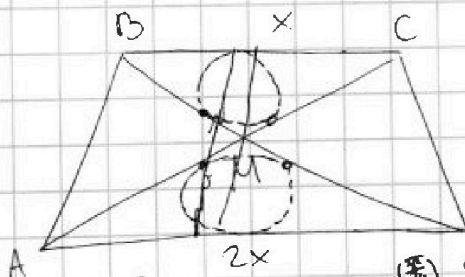
$$= 252 + 19 =$$

$$= 271$$

$$q = 271 - 2 =$$

$$= 269$$

$$= 269$$



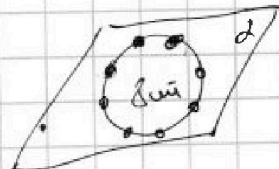
$$\sin\left(\frac{3\pi}{14} + \frac{3\pi}{14}\right) =$$

$$= \sin\left(\frac{3\pi}{7}\right) \cos\left(\frac{3\pi}{14}\right) + \sin\left(\frac{3\pi}{14}\right) \cos\left(\frac{3\pi}{7}\right)$$



$$5 - u$$

$$C_8^4 \cdot 4 + C_8^3 \cdot 4 + C_8^5 \cdot 4 + C_8^6 \cdot 4 + C_8^7 \cdot 4 + 4$$



$$d$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

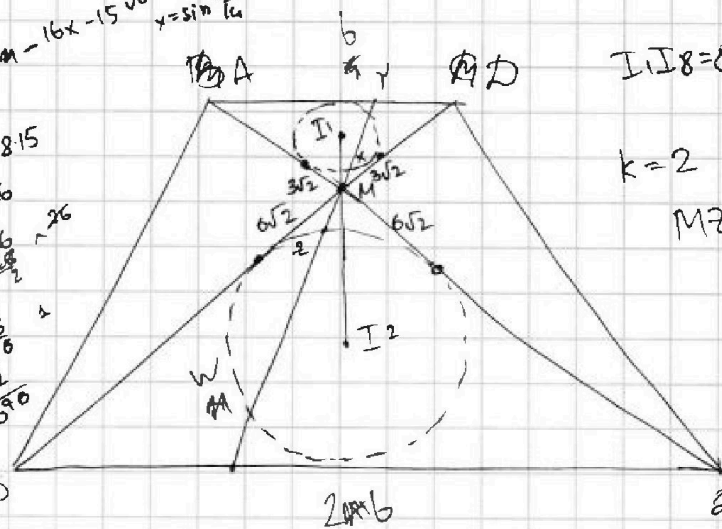
1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
из

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$48x^2 - 16x - 15 = 0 \quad x = \sin \frac{3\pi}{14}$$

$$\begin{array}{r} 16 \div 48 = 15 \\ 936 \\ \times 26 \\ \hline 156 \\ 52 \\ \hline 696 \end{array}$$



$$II \cdot I = 8$$

$$k=2 \quad R_{\omega_1}?$$

$$MZ \cdot MY = 9$$

$$\frac{MX}{2} \cdot MY = 9$$

$$MX \cdot MY = 18 = k \cdot ac$$

$$k \cdot ac = \sqrt{18} = 3\sqrt{2}$$

$$\begin{aligned} \sin 3\alpha &= \sin(2\alpha + \alpha) = \\ &= \sin 2\alpha \cos \alpha + \sin \alpha \cos 2\alpha = \\ &= 2\sin \alpha \cos^2 \alpha + \sin \alpha (1 - 2\sin^2 \alpha) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2\sin \alpha (1 - \sin^2 \alpha) + \\ + \sin \alpha - 2\sin^3 \alpha = \\ -4\sin^3 \alpha + 3\sin \alpha \\ -4 \cdot \frac{3}{4} + 3 \cdot \frac{1}{4} \end{aligned}$$

$$\begin{array}{r} 256 \\ - 162 \\ \hline 94 \end{array}$$

$$\frac{42 \cdot 2}{9}$$

$$\begin{array}{r} 16 \div 16 = 1 \\ 16 \div 16 = 1 \\ 16 \div 16 = 1 \\ 16 \div 16 = 1 \\ 16 \div 16 = 1 \\ 16 \div 16 = 1 \\ 16 \div 16 = 1 \\ 16 \div 16 = 1 \\ 16 \div 16 = 1 \\ 16 \div 16 = 1 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 18 \\ \times 9 \\ \hline 162 \end{array}$$

$$5 - 4\sin \frac{9\pi}{14} \vee 3\sin \frac{3\pi}{14} - 4\cos \frac{3\pi}{7}$$

$$\begin{aligned} 3\sin \frac{3\pi}{14} - 4(1 - 2\sin^2 \frac{3\pi}{14}) = \\ = 3\sin \frac{3\pi}{14} - 4 + 8\sin^2 \frac{3\pi}{14} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sin(3\alpha) &= \sin(2\alpha + \alpha) = \\ &= \sin 2\alpha \cos \alpha + \sin \alpha \cos 2\alpha = \\ &= 2\sin \alpha \cos^2 \alpha + \sin \alpha (1 - 2\sin^2 \alpha) = \\ &= 2\sin \alpha \cos^2 \alpha + \sin \alpha - 2\sin^3 \alpha \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 5 - 12x + 16x^3 \vee 3x - 4 + 8x^2 \\ 16x^3 - 8x^2 - 15x + 9 \vee 16x^3 - 8x^2 - 15x + 9 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2\sin \alpha (1 - \sin^2 \alpha) + \sin \alpha - 2\sin^3 \alpha = \\ = 3\sin \alpha - 4\sin^3 \alpha \\ 3 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} - 4 \cdot \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^3 = \\ = \frac{3\sqrt{3}}{2} - \frac{3\sqrt{3}}{2} = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 5 - 4(3\sin x - 4) = \\ 5 - 4(3x - 4x^3) \vee \\ \vee 3x - 4(1 - 2x^2) \\ 16 - 8 - 15 + 9 \end{aligned}$$