



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

11 КЛАСС. Вариант 1



1. [4 балла] Натуральные числа a , b , c таковы, что ab делится на $2^9 3^{10} 5^{10}$, bc делится на $2^{14} 3^{13} 5^{13}$, ac делится на $2^{19} 3^{18} 5^{30}$. Найдите наименьшее возможное значение произведения abc .

2. [5 баллов] Дан прямоугольный треугольник ABC . Окружность, касающаяся прямой BC в точке B , пересекает высоту CD , проведённую к гипотенузе, в точке F , а катет AC – в точке E . Известно, что $AB \parallel EF$, $AD : DB = 3 : 1$. Найдите отношение площади треугольника ABC к площади треугольника CEF .

3. [4 балла] Решите уравнение $5 \arcsin(\cos x) = x + \frac{\pi}{2}$.

4. [5 баллов] Найдите все значения параметра a , для каждого из которых найдётся значение параметра b , при котором система уравнений

$$\begin{cases} ax + 2y - 3b = 0, \\ (x^2 + y^2 - 9)(x^2 + y^2 - 12x + 32) = 0 \end{cases}$$

имеет ровно 4 решения.

5. [5 баллов] Некоторые числа x и y удовлетворяют равенствам

$$\log_3^4 x + 6 \log_x 3 = \log_{x^2} 243 - 8 \quad \text{и} \quad \log_3^4(5y) + 2 \log_{5y} 3 = \log_{25y^2} (3^{11}) - 8.$$

Найдите все возможные значения произведения xy .

6. [5 баллов] На координатной плоскости дан параллелограмм с вершинами в точках $O(0; 0)$, $P(-14; 42)$, $Q(6; 42)$ и $R(20; 0)$. Найдите количество пар точек $A(x_1; y_1)$ и $B(x_2; y_2)$ с целыми координатами, лежащих в этом параллелограмме (возможно, на границе) и таких, что $3x_2 - 3x_1 + y_2 - y_1 = 33$.

7. [6 баллов] Дана треугольная пирамида $SABC$, медианы AA_1 , BB_1 и CC_1 треугольника ABC пересекаются в точке M . Сфера Ω касается ребра AS в точке L и касается плоскости основания пирамиды в точке K , лежащей на отрезке AM . Сфера Ω пересекает отрезок SM в точках P и Q . Известно, что $SP = MQ$, площадь треугольника ABC равна 90, $SA = BC = 12$.

а) Найдите произведение длин медиан AA_1 , BB_1 и CC_1 .

б) Найдите двугранный угол при ребре BC пирамиды, если дополнительно известно, что Ω касается грани BCS в точке N , $SN = 4$, а радиус сферы Ω равен 5.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☒	☐	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

№1.

$$ab: 2^9 3^{10} 5^{10} \quad bc: 2^{14} 3^{13} 5^{13} \quad ac: 2^{19} 3^{18} 5^{30}. \text{ абе камм. - ?}$$

$\{a, b, c\} \in \mathbb{N}$.

abc камм., когда a, b и c ~~не~~ не содержат в себе др-х множителей, кроме 2, 3 и 5. Тогда предста-
вим эти числа в таком виде.

$$a = 2^{a_2} \cdot 3^{a_3} \cdot 5^{a_5}; \quad b = 2^{b_2} \cdot 3^{b_3} \cdot 5^{b_5}; \quad c = 2^{c_2} \cdot 3^{c_3} \cdot 5^{c_5},$$

где степенки $a_2, a_3, \dots, c_5$ — целые неотрицательные числа.

I. Пусть кол-во двоек в ^{степенях} делителях ab, bc и ac равно 9, 14 и 19 соотв.:

$$\begin{cases} a_2 + b_2 = 9 \\ a_2 + c_2 = 19 \\ b_2 + c_2 = 14 \end{cases}; \quad a_2 + b_2 + c_2 = \frac{42}{2} = 21. \quad \begin{cases} a_2 = 7 \\ b_2 = 2 \\ c_2 = 12 \end{cases} \begin{matrix} \text{(это камм.} \\ \text{возм.} \\ \text{степенки)} \end{matrix}$$

II. Пусть кол-во троек в простых делителях ab, bc и ac равно 10, 13 и 18 соотв.:

$$\begin{cases} a_3 + b_3 = 10 \\ a_3 + c_3 = 18 \\ b_3 + c_3 = 13 \end{cases}; \quad a_3 + b_3 + c_3 = \frac{41}{2} \quad \text{Степени целые, и их} \\ \text{сумма тоже должна быть} \\ \text{целой. Противоречие множеству.}$$

Тогда пусть кол-во троек в делителях bc больше на 1 (для минимальности), т.е. $b_3 + c_3 = (13+1) = 14$.

$$\begin{cases} a_3 + b_3 = 10 \\ a_3 + c_3 = 18 \\ b_3 + c_3 = 14 \end{cases}; \quad a_3 + b_3 + c_3 = \frac{42}{2} = 21; \quad \begin{cases} a_3 = 7 \\ b_3 = 3 \\ c_3 = 11 \end{cases}$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☒	☐	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Пр Пусть кон-ва метров в пр. дел. ab , bc и ac равно соотв. 10, 13 и 30:

$$\begin{cases} a_5 + b_5 = 10 \\ a_5 + c_5 = 30 \\ b_5 + c_5 = 13 \end{cases} \quad a_5 + b_5 + c_5 = \frac{53}{2} = 26,5.$$

Итак, нецелое, и, более того, оно меньше, чем $a_5 + c_5 = 30$, то есть b_5 является отрицательным.

Чтобы b_5 было наименьшим неотрицательным, суммируя $a_5 + b_5 + c_5$ делим, чтобы получилось 30 (тогда $b_5 = 0$).

Итак, пусть $a_5 + b_5 + c_5 = 30$: тогда $b_5 + c_5 = 20$:

$$\begin{cases} a_5 + b_5 = 10 \\ a_5 + c_5 = 30 \\ b_5 + c_5 = 20 \end{cases} \quad \begin{cases} a_5 = 10 \\ b_5 = 0 \\ c_5 = 20 \end{cases}$$

Итого:

$$a \cdot b \cdot c = \begin{pmatrix} 7 & 7 & 10 \\ 2 & 3 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 2 & 3 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 12 & 11 & 20 \\ 2 & 3 & 5 \end{pmatrix} =$$

$$= 2^{21} \cdot 3^{21} \cdot 5^{30}. \quad \text{Ответ: } 2^{21} \cdot 3^{21} \cdot 5^{30}.$$

№3

$$5 \arcsin(\cos x) = x + \frac{\pi}{2}.$$

$$\arcsin(\cos x) \neq \arccos(\cos x) = \frac{\pi}{2}; \quad \arcsin(\cos x) = \frac{\pi}{2} - x.$$

$$\frac{5\pi}{2} - 5x = x + \frac{\pi}{2}; \quad 6x = 2\pi; \quad x = \frac{\pi}{3}. \quad \text{Ответ: } \frac{\pi}{3}.$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☒	☐	☐	☐	☐	☐

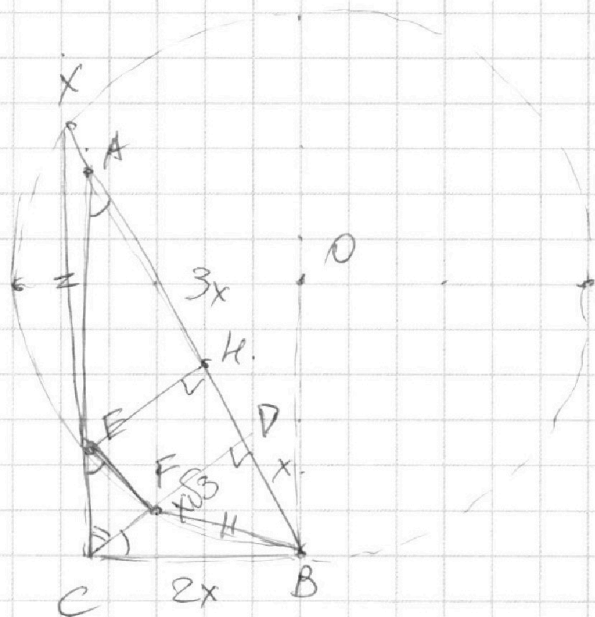
Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

№2.

$EF \parallel AB$

$$\frac{AD}{BD} = \frac{3}{1}$$



Пусть AB хорд. AB зя $A \cap O_{\text{кр}} = X$.

$EF \parallel AB \Rightarrow \angle EX = \angle BF$ и $EX = BF$.

$BFEH$ — р/б трап.

Пусть $AD = 3x \rightarrow BD = x$. $CD^2 = 3x^2$; $CD = x\sqrt{3}$.

$BC^2 = BD^2 + CD^2$ (Пюр), $BC^2 = 3x^2 + x^2 = 4x^2$,
 $BC = 2x$.

Тогда $\angle CAB = 30^\circ$, $\angle CEF = 30^\circ$, $\angle DCB = 30^\circ$.

Проведем $EH \perp AB$. $KX = BD = x$, т.к. р/б трап.

$EK = DF$ как высоты, $FE \parallel AB$. $EKDF$ — кр/к, $EF = DK$.



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1

☐

2

☐

3

☒

4

☐

5

☐

6

☐

7

☐

 **МФТИ**

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

N3

$$5 \operatorname{arcsin}(\cos x) = x + \frac{\pi}{2}.$$

$$\operatorname{arcsin}(\cos x) + \arccos(\cos x) = \frac{\pi}{2};$$

$$\operatorname{arcsin}(\cos x) = \frac{\pi}{2} - x.$$

$$\frac{5\pi}{2} - 5x = x + \frac{\pi}{2}; \quad 6x = 2\pi; \quad x = \frac{\pi}{3}. \quad \text{Ответ: } \frac{\pi}{3}.$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☒	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

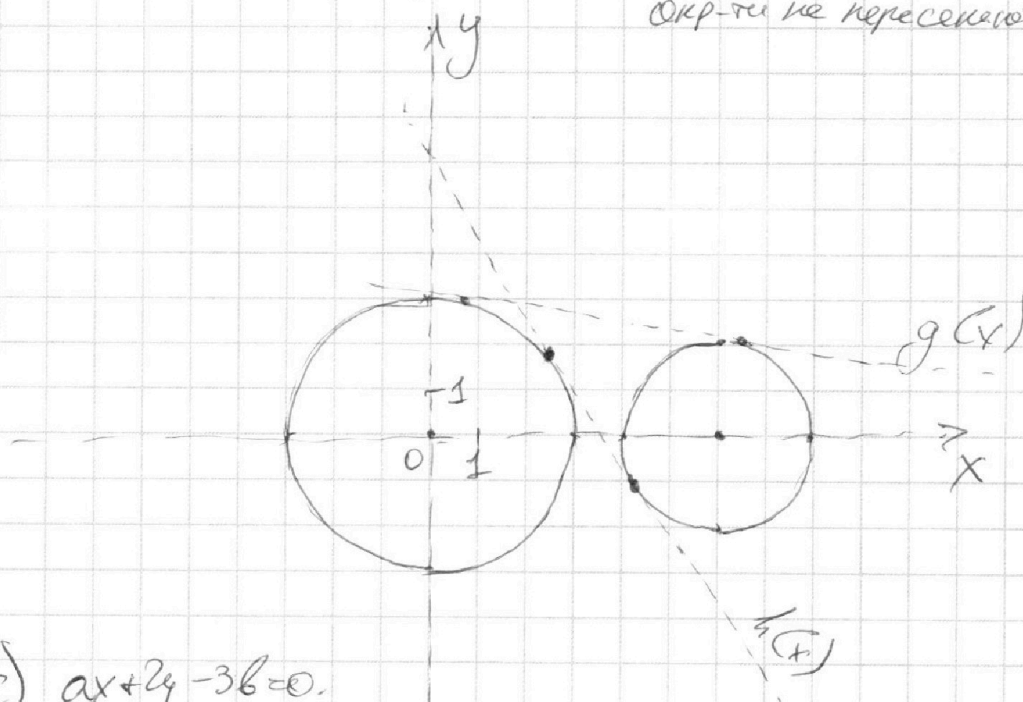


№4.

$$\begin{cases} ax+2y-3b=0 & (I) \\ (x^2+y^2-9)(x^2+y^2-12x+32)=0 & (II) \end{cases} \quad 4 \text{ реш.}$$

$$II). \begin{cases} x^2+y^2=9 \\ x^2+y^2-12x+32=0 \end{cases} ; \begin{cases} x^2+y^2=9 & (1) \\ (x-6)^2+y^2=4 & (2) \end{cases}$$

Графики окр-тей этих уравнений см. на рисунке ниже; окр-ти не пересекаются



$$I). ax+2y-3b=0.$$

Ур-е прямой; имеет с двумя не пересек. окр. максимум 4 решения.

"Найдётся значение b " значит, что b может быть любым, т.е. св. т.е. ур-е прямой — любое.

Рассмотрим, когда прямая касается двух окр. внутр. образом (на рис. $h(x)$). Какими параллельными прямыми вверх/вниз (изменяем b) нельзя добиться 4-х решений.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☒	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



Найдем ур-е этой прямой.

Рассм. произвольную прямую $a_1x + b_1y + c_1 = 0$, где
 $a_1 = a$, $c_1 = -3b$.

Условие касаний: (т.к. расст. от т.к. ^{= центра окр.} до прямой, равное R).

$$1) \quad \frac{|a_1 \cdot 0 + 2 \cdot 0 + c_1|}{\sqrt{a_1^2 + 4}} = 3;$$

$$\frac{|c_1|}{3} = \sqrt{a_1^2 + 4}. \quad \text{В случае } h(x): \begin{cases} c_1 > 0 \\ a_1 < 0 \end{cases}$$

$$c_1^2 = 9a_1^2 + 36.$$

$$2) \quad \frac{|a_1 \cdot 6 + 2 \cdot 0 + c_1|}{\sqrt{a_1^2 + 4}} = 2; \quad \frac{|6a_1 + c_1|}{2} = \sqrt{a_1^2 + 4}.$$

$$\text{Имеем: } \frac{|c_1|}{3} = \frac{|6a_1 + c_1|}{2}; \quad 2|c_1| = 3|6a_1 + c_1|.$$

$c_1 > 0$. Пусть $6a_1 + c_1 > 0$:

$$2c_1 = 3(6a_1 + c_1); \quad a_1 = -\frac{c_1}{18}.$$

При $6a_1 + c_1 < 0$:

$$2c_1 = -3(6a_1 + c_1); \quad a_1 = -\frac{5c_1}{18}.$$

$$\text{Получим } \begin{cases} a_1 = -\frac{c_1}{18} \\ a_1 = -\frac{5c_1}{18} \end{cases}$$

Это коэф. a_1 , для соотв. прям. кас. к окр. ^{внеш.} и кас. к окр. ^{внутр.} соответственно.

т.к. кас. с (1) выше от Ox . Др. словами, для a_1 соотв. кас. к окр. $h(x)$ и $g(x)$ (см. график)

Из графика видно, что $a_{h(x)} < a_{g(x)}$. (коэф. $\neq 0$ у нас)

$$\text{Т.к. } c_1 > 0, \text{ то } -\frac{5c_1}{18} < -\frac{c_1}{18}, \text{ т.е. } a_{h(x)} = -\frac{5c_1}{18}.$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☒	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Представляем в упр. кас. с (P):

$$\left| -\frac{5c_1}{18} \cdot 0 + 2 \cdot 0 + c_1 \right| = 3, \quad |c_1| = 3\sqrt{\left(-\frac{5c_1}{18}\right)^2 + 4};$$
$$\sqrt{\left(-\frac{5c_1}{18}\right)^2 + 4}$$

$$c_1^2 = \frac{25c_1^2}{36} + 36, \quad \frac{11c_1^2}{36} = 36, \quad c_1 = \frac{36}{\sqrt{11}}.$$

$$\text{Тогда } a_1 = -\frac{5}{18} \cdot \frac{36}{\sqrt{11}} = -\frac{10}{\sqrt{11}}.$$

Итого ~~коэф.~~ коэф. а прямой $k(x): -\frac{10}{\sqrt{11}}$.

Если увеличивать коэф. этой прямой до $-\infty$, то 4-х пересечений тоже никак не получится (при $k \neq 0$).

Если тут же увеличивать коэф. этой прямой (рассм. ~~а~~ коэф. < 0), то возможно будет пересечение с обоими оар, т.е. 4 решения, и так вплоть до коэф., равного 0.

Если $a = 0$, 4 решения.

График оар-тей симметричен отн. Ох, тогда ~~в~~ поведение пр-х симметрично отн. а $= 0$ (при $a = 0$ прямая $\parallel$ Ох). ~~3~~

Тогда при $a \in \left[-\frac{10}{\sqrt{11}}, \frac{10}{\sqrt{11}}\right]$ 4-х решений нет, тогда и при $a \in \left[\frac{10}{\sqrt{11}}, +\infty\right)$ 4-х решений нет.

Итого при $a \in \left(-\infty; -\frac{10}{\sqrt{11}}\right] \cup \left[\frac{10}{\sqrt{11}}, +\infty\right)$ решений нет, тем 4 при любом b .

Тогда при $a \in \left(-\frac{10}{\sqrt{11}}, \frac{10}{\sqrt{11}}\right)$ $\exists b$, что есть 4 решения.

Ответ: $a \in \left(-\frac{10}{\sqrt{11}}, \frac{10}{\sqrt{11}}\right)$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☒	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$\begin{cases} \log_3^4 x + 6 \log_x 3 = \log_{x^2} 243 - 8 & (\text{I}) \\ \log_3^4 (5y) + 2 \log_{5y} 3 = \log_{25y^2} (3^{11}) - 8 & (\text{II}) \end{cases}$$

* Определим: $\begin{cases} x > 0 \\ x \neq 1 \\ y > 0 \\ y \neq 1 \end{cases}$

$$\text{I)} \log_3^4 x + \frac{6}{\log_3 x} = \frac{5}{2 \log_3 x} - 8; \quad | \cdot \log_3 x (\log_3 x \neq 0, \text{ т.к. } x \neq 1)$$

$$\log_3^5 x + 8 \log_3 x + \frac{7}{2} = 0. \quad (\text{III})$$

$$\text{II)} \text{ Пусть } 5y = z. \quad \begin{cases} z > 0 \\ z \neq 1 \end{cases}$$

$$\log_3^4 z + \frac{2}{\log_3 z} = \frac{11}{2 \log_3 z} - 8; \quad | \cdot \log_3 z (\neq 0, \text{ т.к. } z \neq 1)$$

$$\log_3^5 z + 8 \log_3 z - \frac{7}{2} = 0. \quad (\text{IV})$$

$$(\text{III}) + (\text{IV})$$

$$\log_3^5 x + \log_3^5 z + 8(\log_3 x + \log_3 z) = 0. \quad \text{Пусть } \log_3 x = a, \log_3 z = b.$$

$$a^5 + b^5 + 8(a+b) = 0;$$

$$(a+b)(a^4 - a^3b + a^2b^2 - ab^3 + b^4) + 8(a+b) = 0;$$

или тогда $a^4 - a^3b + a^2b^2 - ab^3 + b^4 > 0$.

$$(a+b)(a^4 - a^3b + \dots + b^4 + 8) = 0;$$

$$a+b=0; \quad \log_3 x + \log_3 z = 0; \quad \log_3 xz = 0; \quad xz = 1;$$

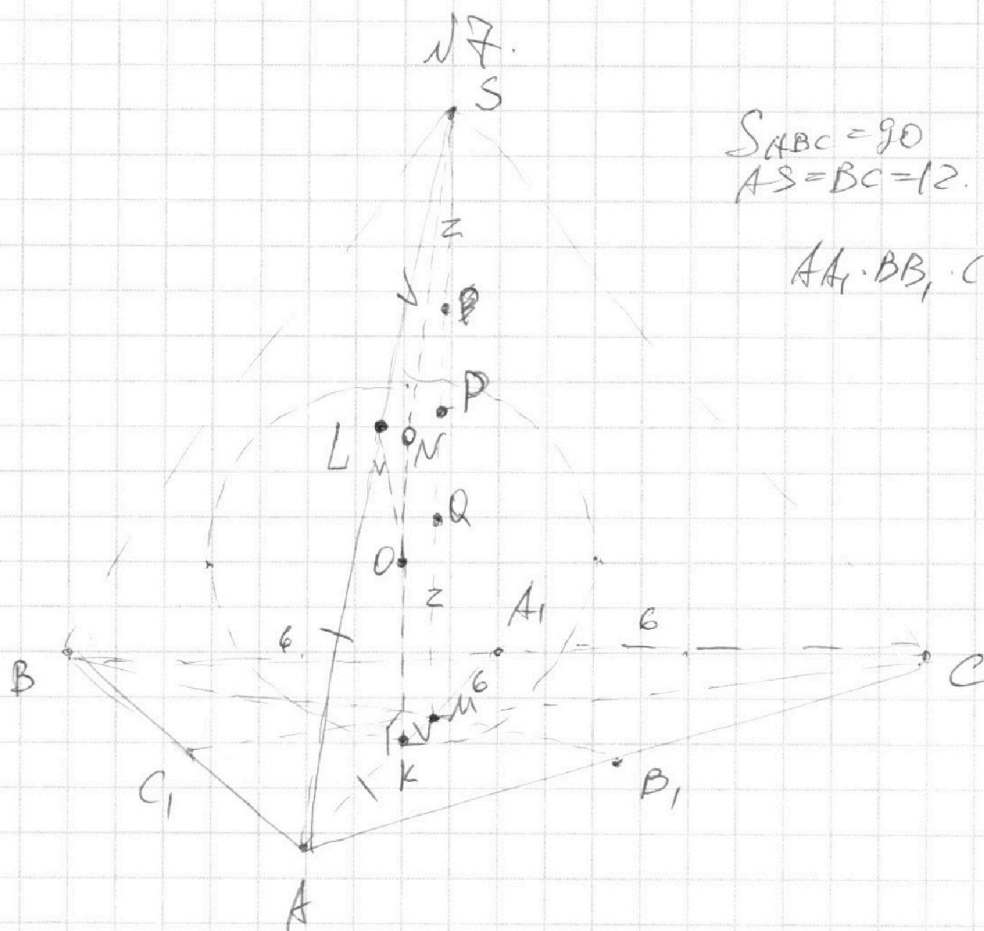
$$5xy \leq 1; \quad xy = \frac{1}{5}. \quad \text{достигается тогда, когда } x = \frac{1}{5}, y = 1. \quad \text{Ответ: } \frac{1}{5}.$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

[illegible]

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$S_{ABC} = 90$$
$$AS = BC = 12.$$

AA, BB, CC - ?

O — центр сферы. $AK = AL$ как отрезки кас.

$$\begin{cases} SL^2 = SP \cdot SQ \text{ (сбока кас. и хорды)} \\ MK^2 = MQ \cdot MP \end{cases}$$

$$SG^2 = SP \cdot SQ = MQ(SP + PQ) = MQ(PQ + MQ) = MQ \cdot MP = MK^2$$

$$SG = MK$$

$$AS = AL + SL = Ak + mL = AM = lZ$$

$$\frac{AM}{A_1M} = \frac{2}{1} \text{ (also neg.)} \Rightarrow AM = \frac{2}{3} AA_1 = 12, AA_1 = 18, A_1M = 6.$$

$$A_1 u = 6; \quad BA_1 = A_1 C = \frac{12}{2} = 6.$$

$$\Delta B_{MC} - \text{н/г (по кривизн.)} : \angle B_{MC} = 200^\circ$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☒

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Пусть $BB_1 = 3a$, $CC_1 = 3b$. Тогда $BM = 2a$, $CM = 2b$
(из св-ва мж.).

$$\text{Тогда } S_{\text{мж.}} = \frac{2a \cdot 2b}{2} = ab.$$

Медианы т.м. пересечения делят с на 3 равные,
значит, $S_{\text{мж.}} = \frac{S_{\triangle ABC}}{3} = \frac{90}{3} = 30 = ab$.

$$AA_1 \cdot BB_1 \cdot CC_1 = 18 \cdot 3b \cdot 3a = \underline{4860}.$$

$$\text{б) } ON \perp (BSC) \Rightarrow ON \perp SN;$$

$$\text{по т. Пиф. } OS^2 = ON^2 + SN^2; OS^2 = 4^2 + 5^2 = 41;$$

$$OS = \sqrt{41}. \quad SL = SN = 4 \text{ (как кас.)},$$

$$\text{тогда } AL = 12 - 4 = 8 = AK; KM = 12 - 8 = 4.$$

$$S_{\triangle ABC} = 90, BC = 12, S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} BC \cdot h \rightarrow h = 15$$

(h — высота $\triangle ABC$ из т.м. A).

Ответ: а) 4860



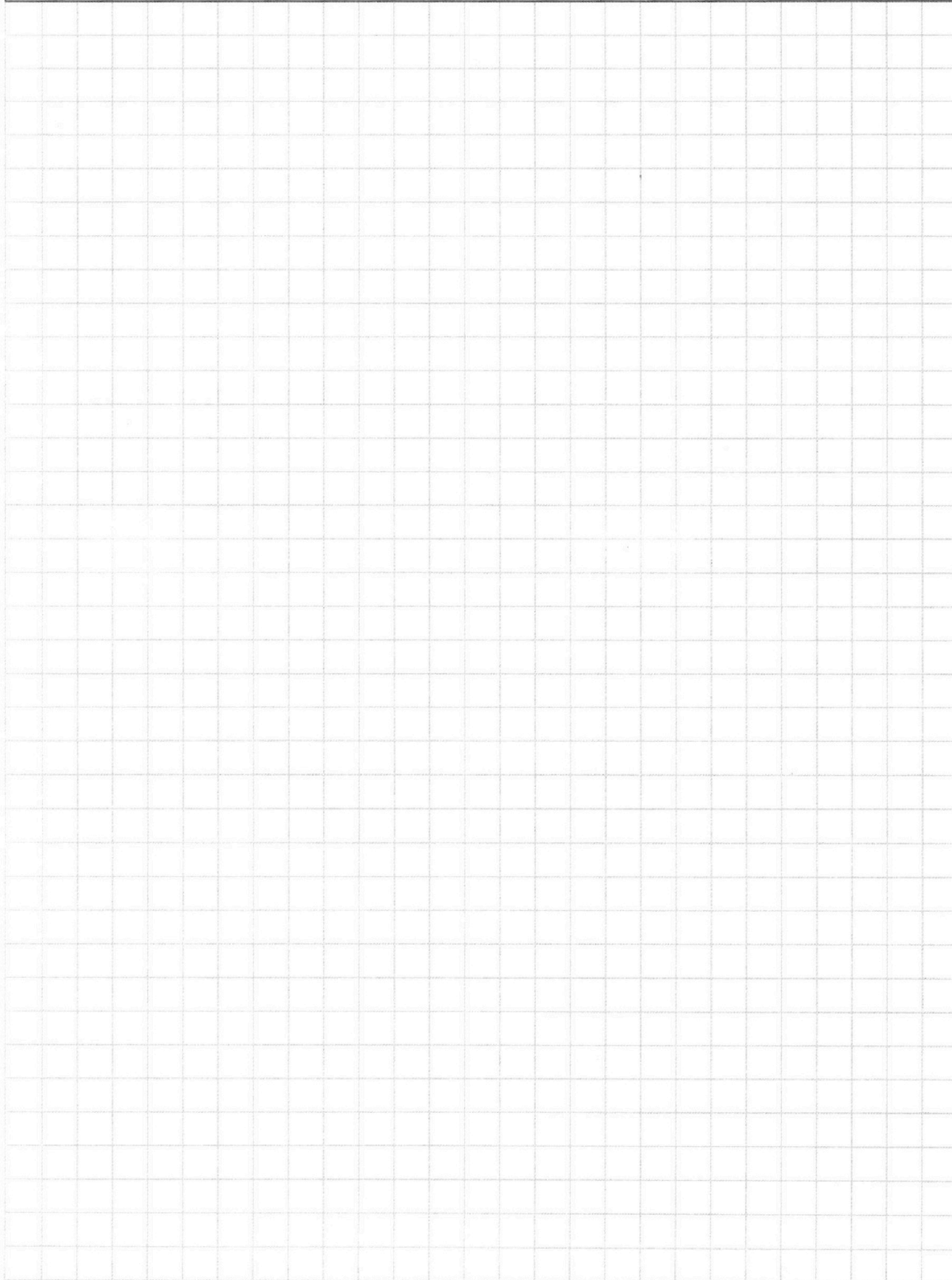
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

 **МФТИ**

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!





На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1
☐

2
☐

3
☐

4
☐

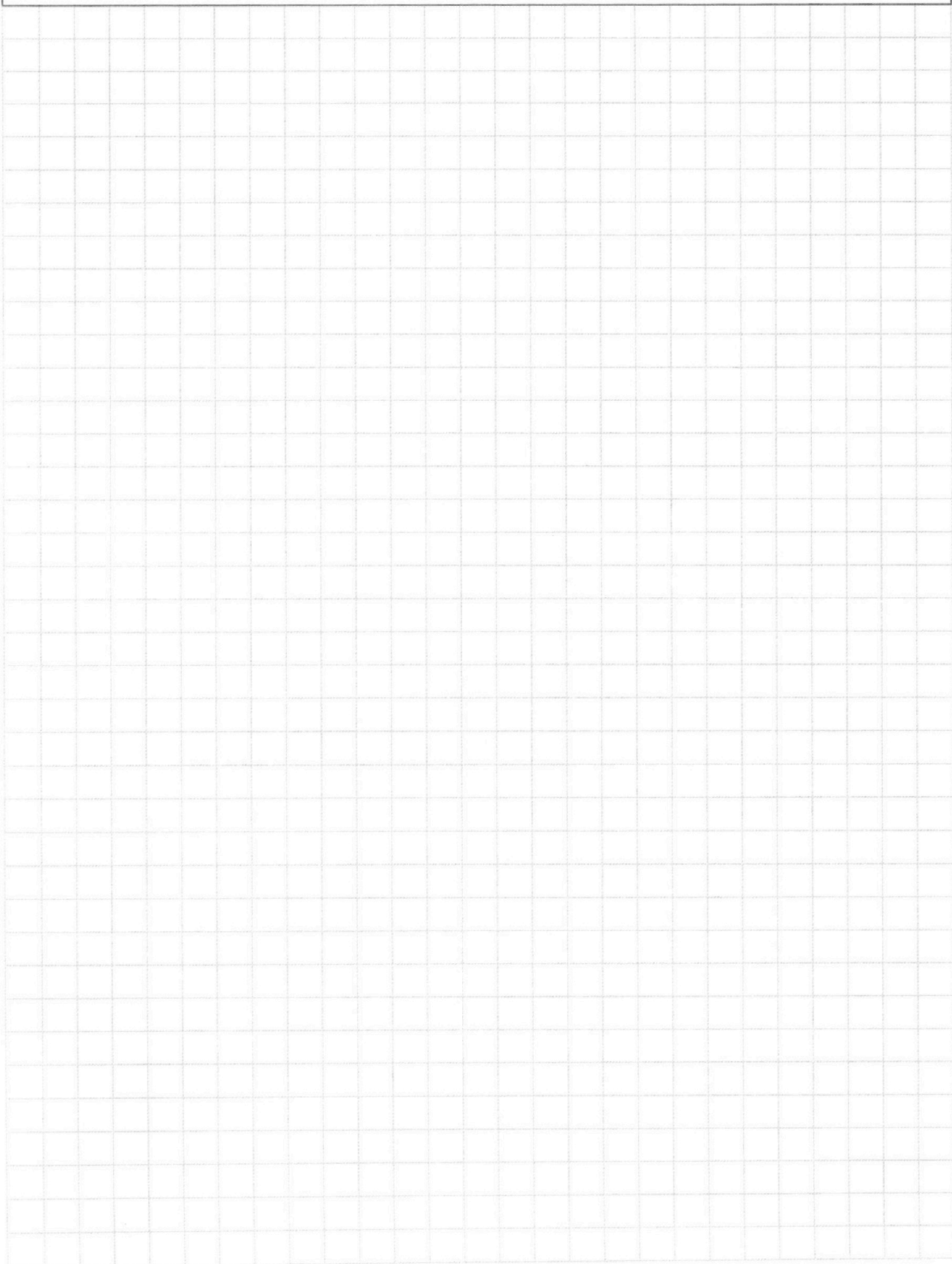
5
☐

6
☐

7
☐



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



* Условие касаний:

$$ax + 2y - 3b = 0$$

1) $x_0, y_0 = (0, 0) \quad R = 3.$

$$\rho = \frac{|a \cdot 0 + 2 \cdot 0 - 3b|}{\sqrt{a^2 + 4}} = 3;$$

$$|3b| = 3\sqrt{a^2 + 4};$$

$$9b^2 = 9a^2 + 36.$$

2) $x_0, y_0 = (6, 0)$

$$\rho = \frac{|6a - 3b|}{\sqrt{a^2 + 4}} = 2;$$

$$36a^2 + 9b^2 - 36ab = 4a^2 + 16.$$

$$9b^2 = -32a^2 + 36ab + 16.$$

$$\Downarrow$$

$$9a^2 + 3b = -32a^2 + 36ab + 16;$$

$$a_1x + b_1y + c_1 = 0.$$

1) $(0, 0) \quad R = 3 \quad \rho = \frac{|a_1 \cdot 0 + b_1 \cdot 0 + c_1|}{\sqrt{a_1^2 + b_1^2}} = 3; \quad C^2 = 9a_1^2 + 9b_1^2.$

2) $(6, 0) \quad R = 2$

$$\rho = \frac{|a_1 \cdot 6 + b_1 \cdot 0 + c_1|}{\sqrt{a_1^2 + b_1^2}} = 2;$$

$$2|c_1| = 3|6a_1 + c_1|.$$

$$\begin{cases} c_1 \geq 0 \\ a_1 \geq 0 \end{cases} \text{ При } 6a_1 + c_1 \geq 0.$$

$$2c_1 = 18a_1 + 3c_1;$$

$$c_1 = -18a_1.$$

$$\text{При } 6a_1 + c_1 < 0:$$

$$2c_1 = -18a_1 - 3c_1;$$

$$5c_1 = -18a_1;$$

$$4c_1^2 = 9(36a_1^2 + 12a_1c_1 + c_1^2);$$

$$4c_1^2 = 324a_1^2 + 108a_1c_1 + 9c_1^2;$$

$$324a_1^2 + 108a_1c_1 + 5c_1^2 = 0. \quad \text{Зеро?}$$



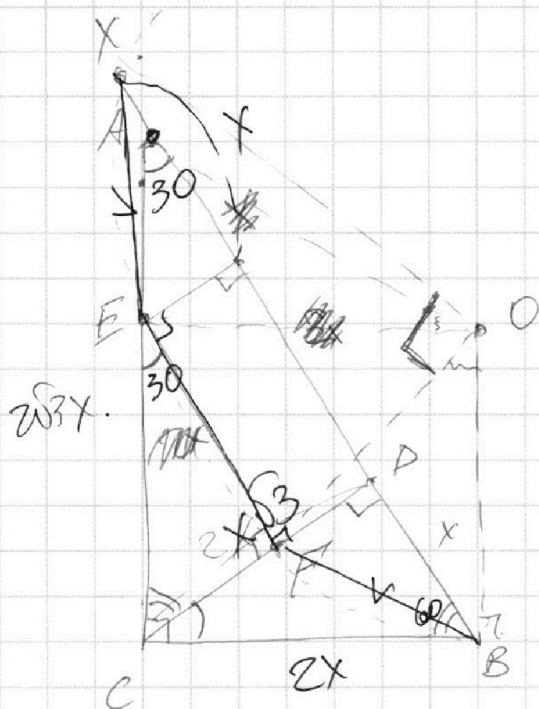
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$EF \parallel AB \Rightarrow \angle AEF = \angle BFE$
 $AE \neq BF$

$$CD^2 = 4x^2; \quad CD = 2x.$$

$\triangle ADC \sim \triangle CDB$:

$$\frac{AD}{CD} = \frac{CD}{DB}.$$

$\triangle ABC \sim \triangle CDB$:

$$\frac{AB}{CD} = \frac{BC}{CB}.$$

$$AC^2 = 9x^2 + 4 = 13x^2. \quad AC = x\sqrt{13}.$$

$$CB^2 = x^2 + 4x^2 = 5x^2, \quad BC = x\sqrt{5}.$$

$$AB = 4x. \quad CD = 2x. \quad AC^2 = 9x^2 + 4x^2 = 13x^2. \quad AC = x\sqrt{13}.$$

$$BC^2 = x^2 + 4x^2 = 5x^2. \quad BC = x\sqrt{5}.$$

$$AC^2 + BC^2 = 13x^2 + 5x^2 = 18x^2.$$

$$AC^2 = 16x^2 - 5x^2 = 11x^2. \quad BC^2 = 5x^2. \quad BC = x\sqrt{5}.$$

$$\text{Then } \frac{BC}{AC} = \frac{x\sqrt{5}}{4x} = \frac{\sqrt{5}}{4}.$$

$$AC = \frac{8x\sqrt{5}}{5}.$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

☐☐☐☐☐☐☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{cases} \log_3^5 z + 8 \log_3 z - 7 = 0 \\ \log_3^5 x + 8 \log_3 x + 7 = 0 \end{cases}$$

(4) =

$$a^5 + 8a + 7 = 0; \quad -0.8 \cdot 8 \cdot 8$$

$$(a+b)(a^4 + a^3b + a^2b^2 + ab^3 + b^4 + 8) = 0$$

$$a = -b?$$

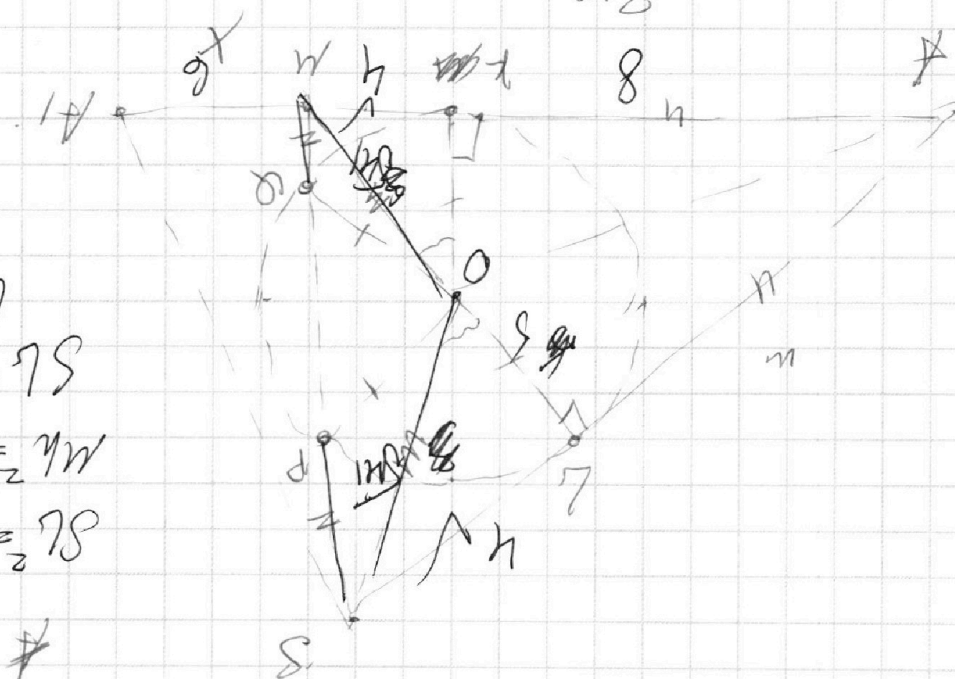
$$\log_3 x = -\log_3 5y;$$

$$\log_3 5xy = 0; \quad 5xy = 1; \quad (x, y) \neq \left(\frac{1}{5}, 1\right)$$

$$AS = \frac{3}{2} AA_1 \Rightarrow AA_1 = 1.8$$

$$AA_1 = m + \sqrt{m^2 + n^2} = \frac{3}{2} AA_1$$

$$\begin{aligned} SL &= AK \\ MK &= MQ \cdot MP \\ SL^2 &= SP \cdot SQ \end{aligned}$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



~~N 4~~ 4 реш.

$$\begin{cases} ax+by \\ ax+by-36=0 \end{cases} \quad (I)$$

$$(x^2+y^2-9)(x^2+y^2-12x+36)=0 \quad (II)$$

Все a : $\exists b$: 4 решения

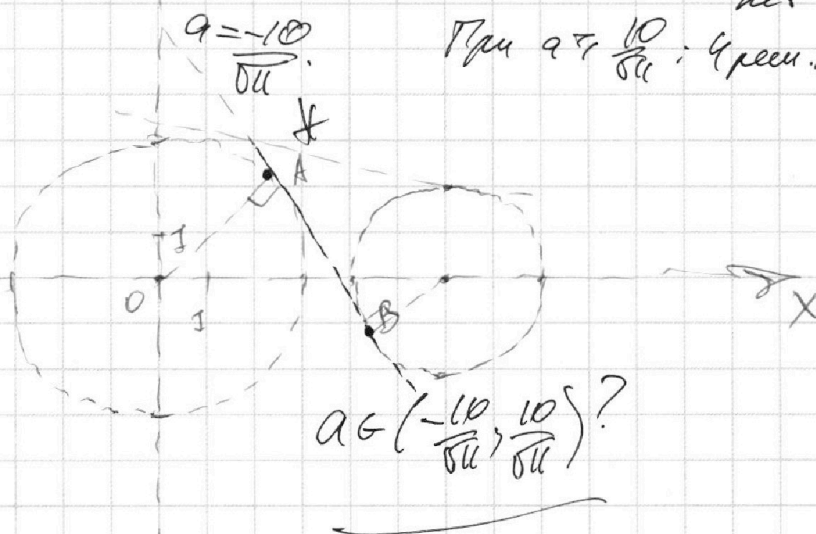
II) 1) $x^2+y^2=9$

2) $x^2-12x+36+y^2=4$; $(x-6)^2+y^2=4$.

y

При $a \leq \frac{-10}{\sqrt{11}}$; 4 реш.
нет.

При $a \geq \frac{10}{\sqrt{11}}$; 4 реш. нет



I) $by = 36 - ax + 36$
 $y = -\frac{a}{2}x + 36$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{cases} \log_3^4 x + 6 \log_x 3 = \log_{x^2} 243 - 8 & (1) \\ \log_3^4 (5y) + 2 \log_{5y} 3 = \log_{25y^2} (3^{11}) - 8 & (2) \end{cases}$$

OD3: $x > 0$
 $x \neq 1$
 $y > 0$
 $y \neq 1$

$$\frac{12}{2 \log_3 x} - \frac{5}{2 \log_3 x} = \frac{7}{2 \log_3 x}$$

$$\log_3^4 x + 6 \log_x 3 = \log_{x^2} 243 - 8$$

$$\log_3^4 x + \frac{6}{\log_3 x} = \frac{1}{\log_3 x^2} - 8$$

$$\log_3^4 x + \frac{6}{\log_3 x} = \frac{1}{\frac{2}{3} \log_3 x} - 8 = \frac{3}{2 \log_3 x} - 8$$

$$4 + \frac{6}{t} = \frac{3}{2t} - 8; \quad | \cdot 2t$$

$$2t^5 + 12 - 5 + 16t = 0; \quad 2t^5 + 16t + 7 = 0$$

$$t = -\frac{1}{2} \rightarrow -\frac{2}{32} - 8 + 7 \neq 0. \quad \text{не}$$

$$2) \quad 5y = 2. \quad \log_3^4 2 + \frac{2}{2 \log_3 2} = \frac{11}{2 \log_3 2} - 8$$

$$\log_3^4 2 - \frac{7}{2 \log_3 2} = -8$$

$$\log_3^4 x + \frac{7}{2 \log_3 x} = -8$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



№3.

$$5 \arcsin(\cos x) = x + \frac{\pi}{2}$$

$$5 \left(\frac{\pi}{2} - \arccos(\cos x) \right) = x + \frac{\pi}{2}$$

$$\frac{5\pi}{2} - 5 \cos x = x + \frac{\pi}{2}$$

$$2\pi = x + 5 \cos x. \quad 2\pi = 6x; \quad x = \frac{\pi}{3}$$

№1.

$a, b, c \in \mathbb{N}$.

$$ab: 2^9 3^{10} 5^{10}, \quad bc: 2^{14} 3^{13} 5^{13}, \quad ac: 2^{19} 3^{18} 5^{30}$$

Какие?

$$a^2 b^2 c^2: 2^{42} 3^{41} 5^{53}$$

$$a^2 b^2 c^2: 2^{42} 3^{41} 5^{53} \quad \checkmark$$

$$(abc)^2: 2^{21} 3^{20} 5^{33}$$

$$c^2: 2^{24} 3^{21} 5^{33}$$

$$a^2 b^2 c^2: 2^{42} 3^{41} 5^{53}$$

$$b^2: 2^4 3^5 5^7$$

$$a^2 b^2 c^2: 2^{42} 3^{41} 5^{53}$$

$$a^2: 2^{14} 3^{15} 5^{30}$$

По 5:

$b^2 \rightarrow c \rightarrow ac \rightarrow a^2$

$ab \rightarrow 5^{10}$

$b - ac \rightarrow c \rightarrow a \rightarrow c$

$bc \rightarrow 5^{13}$

$ac \rightarrow 5^{30}$



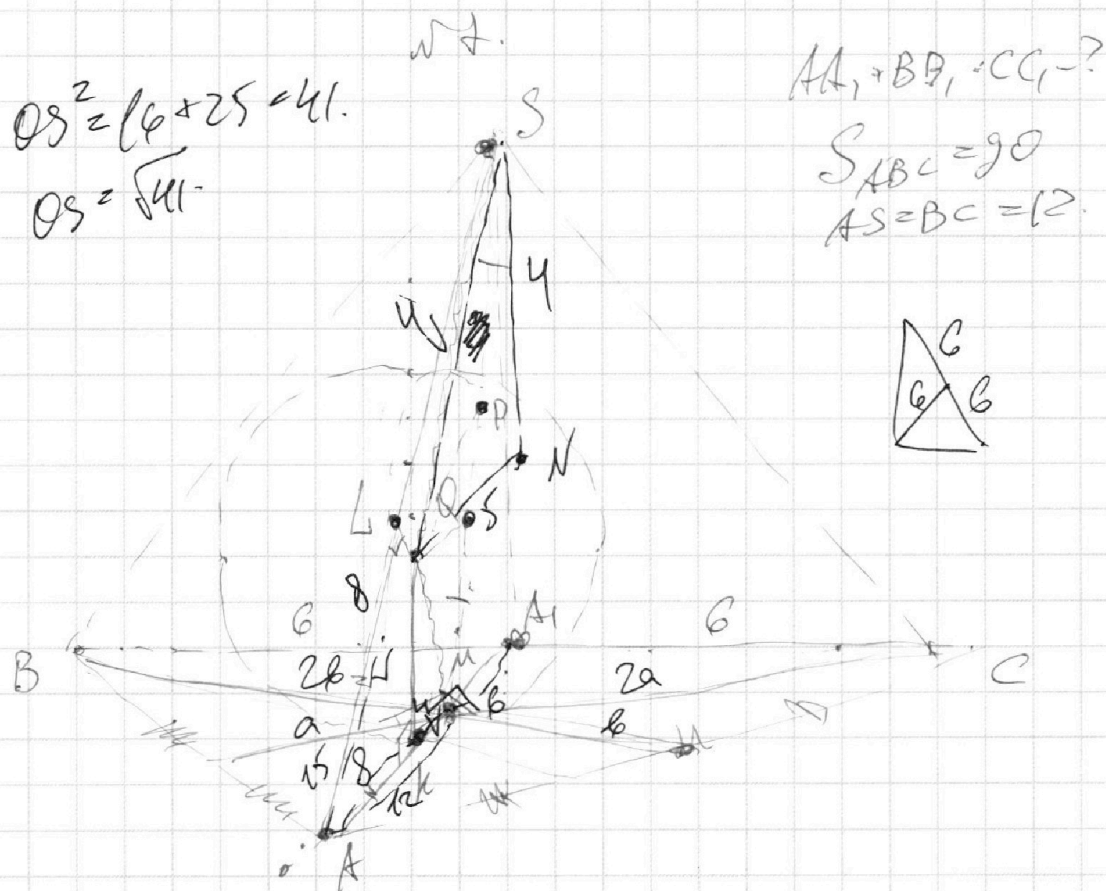
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$Ak = Al$$

$$S_{ABC} = S_{BMC} + S_{AMC} + S_{ABM} =$$
$$= ab +$$



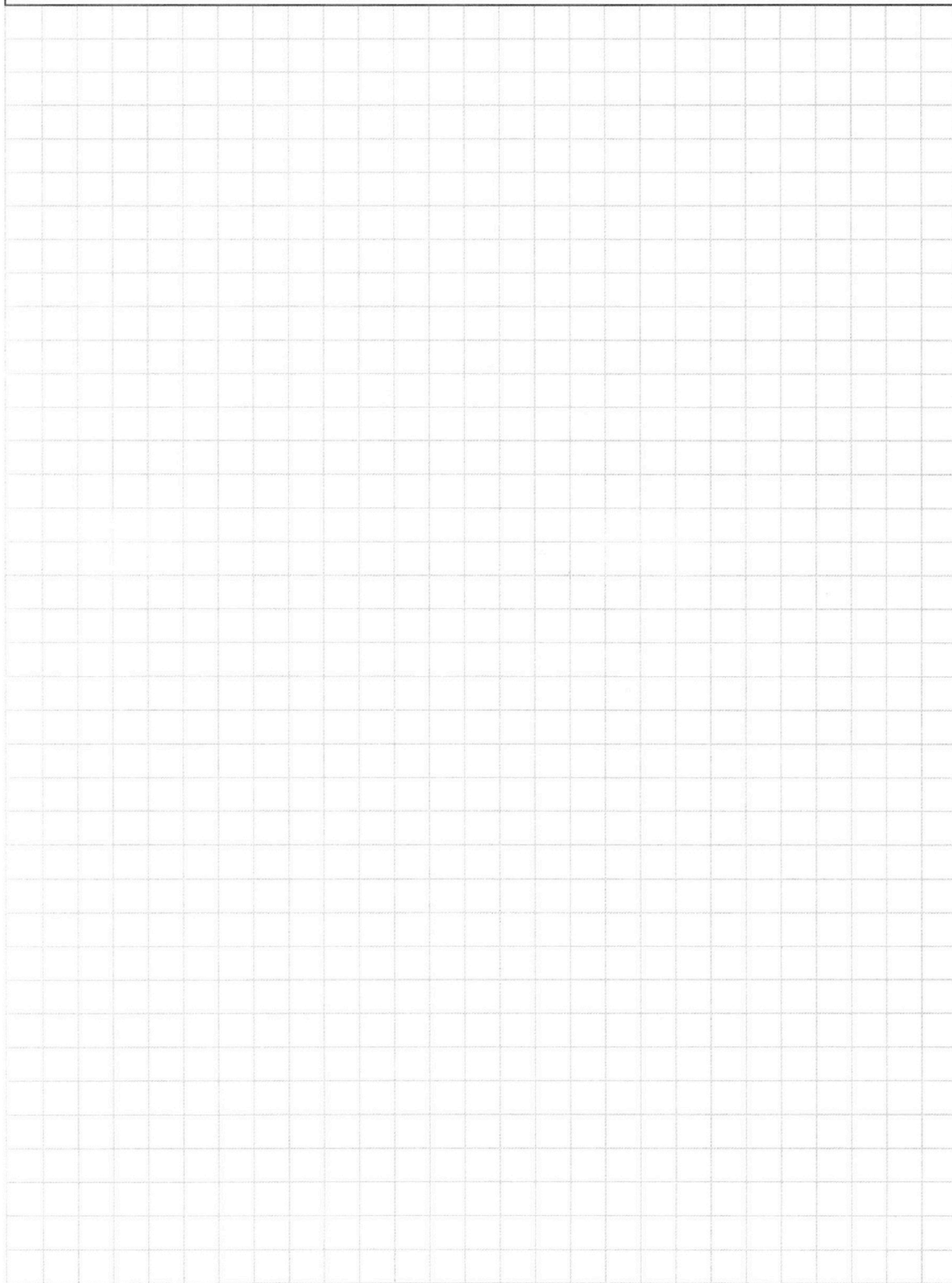
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!





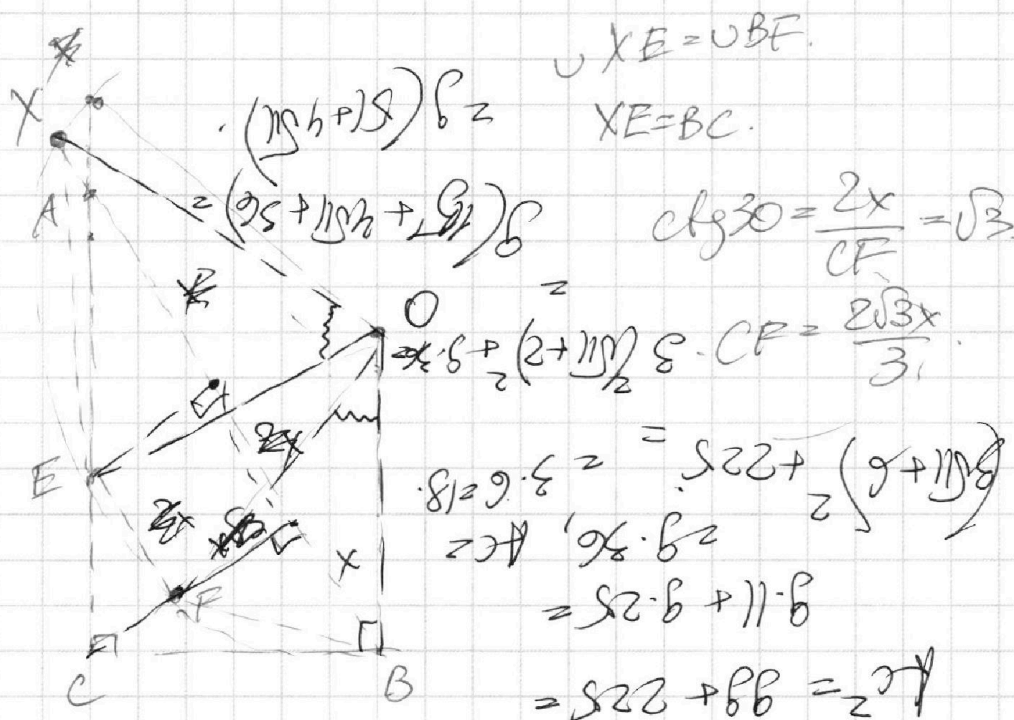
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$18 \cdot 30 = 540 = 30 \cdot 18$$

$$AB = 30, \quad AC = 30, \quad BC = 30$$

$$S_{ABC} = 90 = \frac{1}{2} \cdot 12 \cdot h, \quad h = 15$$

$$18^2 - 15^2 = 3 \cdot 33 = 99$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

кас. сверху и снизу.

Имеем:

$$\begin{cases} a_1x + b_1y - 18a_1 = 0 \\ a_1x + b_1y - \frac{18a_1}{5} = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_1 = -\frac{c}{18} \\ a_2 = -\frac{5c}{18} \end{cases}$$

$a_1 \neq a_{\text{вск}} < a_{\text{д}}$

$$a_1 = -\frac{5c}{18}$$

$$-\frac{c}{18}x - \frac{5c}{18}y; \text{ с } 0$$

$c \leq 5c$ $\Rightarrow$ $a_1 > a_2$. a_2 - вск.

$$-\frac{5c}{18}x + b_1y + c_1 = 0$$

кас. $ax + by - 36 = 0$
 $b_1 = 2$

$$\rho = \frac{\left| -\frac{5c}{18} \cdot 0 + b_1 \cdot 0 + c_1 \right|}{\sqrt{\frac{25}{18}}}$$

$$\frac{\left| -\frac{5c}{18} \cdot 0 + 2 \cdot 0 + c_1 \right|}{\sqrt{\left(\frac{5c}{18}\right)^2 + 4}} = 3$$

$$c_1^2 = 9 \cdot \left(\frac{5c}{18}\right)^2 + 36$$

$$c_1^2 = \frac{25}{36} c^2 + 36$$

$$\frac{11}{36} c^2 = 36 \quad c_1 = \frac{36}{\sqrt{11}}$$

Тогда $a = -\frac{5}{18} \cdot \frac{36}{\sqrt{11}} = -\frac{10}{\sqrt{11}}$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

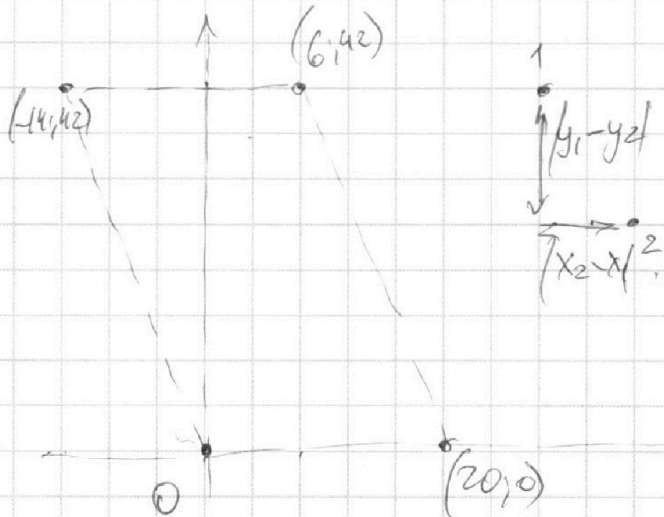
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

№6



$$3x_2 - 3x_1 + y_2 - y_1 = 33.$$

$$3(x_2 - x_1) + (y_2 - y_1) = 33.$$

$$y = kx + b.$$

$$y_1 = kx_1 + b$$

$$3x_2 - 3x_1 = 33$$

$$x_2 - x_1 = 11$$

$$x_2 - x_1 = 11$$

$$3x_2 - 3x_1 = 33$$

$$x_2 - x_1 = 11$$

$$x_2 - x_1 = 11$$

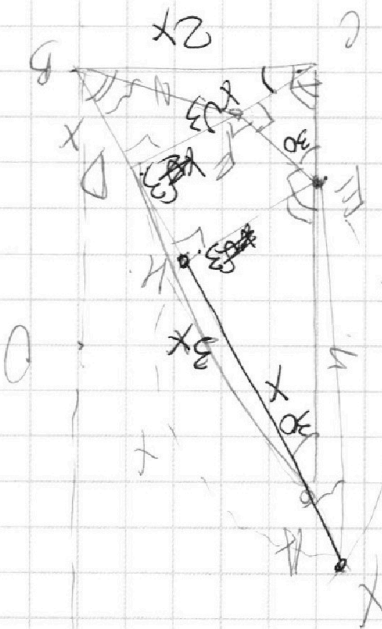
$$x_2 - x_1 = 11$$

$$x_2 - x_1 = 11$$

$$x_2 - x_1 = 11$$

$$x_2 - x_1 = 11$$

$$x_2 - x_1 = 11$$





На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1
☐

2
☐

3
☐

4
☐

5
☐

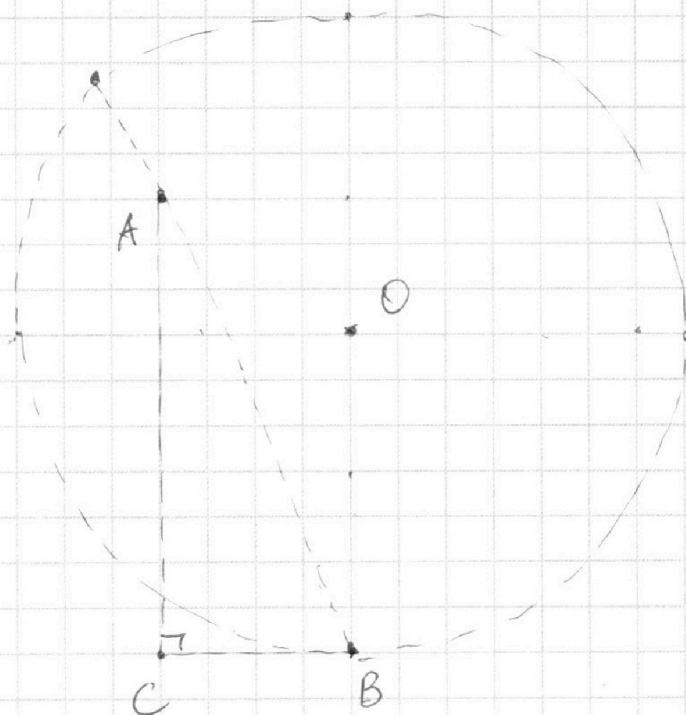
6
☐

7
☐

 МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

N





На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

~~N1~~ ~~N1~~ N1.

$$ab: 2^9 3^{10} 5^{10}$$

$$bc: 2^{14} 3^{13} 5^{13}$$

$$ac: 2^{19} 3^{18} 5^{30}$$

$$\nexists \text{ } \Rightarrow \deg(\pi \cup \nu).$$

поискать про капп.

$$(abc)^2: 2^{42} 3^{41} 5^{53}$$

$$:(ab)^2: c^2 = 2^{24} 3$$

$$a: 2^9, ab: 2^9 bc: 2^{14} ac: 2^{19}$$

Пусть все N.

$$a, b \in (-\frac{5\pi}{2}, \frac{5\pi}{2}) \begin{cases} a+b=9 \\ b+c=14 \\ a+c=19 \end{cases}$$

$$a+b+c=21.$$

$$c = 12.$$

$$b=2$$

$$a=7$$

Для 3:

$$\begin{cases} a+b=10 \\ a+c=18 \\ b+c=14 \end{cases}$$

$$a+b+c = \frac{41}{2} = 20.5 \rightarrow \frac{42}{2} = 21.$$

$$c=11, b=2, a=8$$

Пусть с км.ка + 3 км.г.

$$a+b+c = \frac{43}{2} = 21.$$

$$2a+2b+2c=41.$$

$$3 \text{ км.ка}, b+c=14.$$

$$a+b=10$$

$$a+c=19$$

$$b+c=14$$

Для 5:

$$\begin{cases} a+b=10 \\ b+c=14 \rightarrow 14 \\ a+c=30 \end{cases}$$

$$a+b+c=27.$$

$$c=17$$

$$\begin{cases} c=11 \\ b=3 \\ a=7 \end{cases}$$

$$2(a+b+c)=54.$$

$$a+b+c=27?$$

Каждое бр бр. кадо + 3.2.

$$\begin{cases} a+b=10 \\ b+c=20 \\ a+c=30 \end{cases}$$

$$\Rightarrow a+b+c=20 \Rightarrow \begin{cases} b=20 \\ c=20 \\ a=20 \end{cases}$$

$$b+c=20.$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$\frac{\left| -\frac{5c_1}{3} + c_1 \right|}{\sqrt{\left(\frac{5c_1}{18}\right)^2 + 4}} = 2.$$

$$\frac{2}{3}c_1 = 2\sqrt{\quad};$$

$$\frac{c_1}{3} = \sqrt{\quad};$$

$$\frac{c_1^2}{9} = \frac{25c_1^2}{18^2} + 16;$$

$$-16 = \frac{25c_1^2}{18^2} - \frac{36c_1^2}{18^2};$$

$$\frac{11c_1^2}{18^2} = 16;$$

$$c_1^2 = \frac{16 \cdot 18^2}{11}; \quad c_1 = \frac{4 \cdot 18}{\sqrt{11}};$$

$$c_1 = \frac{36}{\sqrt{11}}?$$

$$\text{Таким образом } c_1 = \frac{36}{\sqrt{11}} \rightarrow a_1 = \frac{-10}{\sqrt{11}}.$$

$$\frac{\left| -\frac{5c_1}{18} + c_1 \right|}{\sqrt{\left(\frac{5c_1}{18}\right)^2 + 4}} = 3.$$

$$c_1^2 = 9 \left(\left(\frac{5c_1}{18} \right)^2 + 4 \right);$$

$$c_1^2 = \frac{25c_1^2}{36} + 36$$

$$\frac{11c_1^2}{36} = 36 \quad c_1^2 = \frac{4 \cdot 36}{11} \quad c_1 = \frac{12}{\sqrt{11}}.$$

$$c_1 = \frac{36}{\sqrt{11}}.$$

$$\frac{\left| -\frac{5c_1}{18} + c_1 \right|}{\sqrt{\left(\frac{5c_1}{18}\right)^2 + 4}} = 2.$$

$$\frac{2}{3}c_1 = 2\sqrt{\quad};$$

$$\frac{c_1}{3} = \sqrt{\quad}; \quad \frac{c_1^2}{9} = 9(\quad).$$

$$\frac{c_1^2}{9} = \frac{25c_1^2}{18^2} + 4;$$

①



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

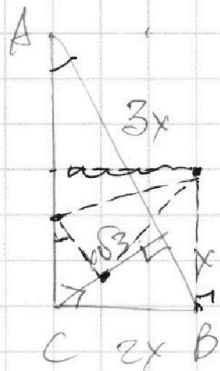
1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

№2.

$$CX^2 = 3x \cdot x = 3x^2$$



$AB \parallel EF$

$$\frac{S_{ABC}}{S_{ECF}} = ?$$

$$CX = x\sqrt{3}$$

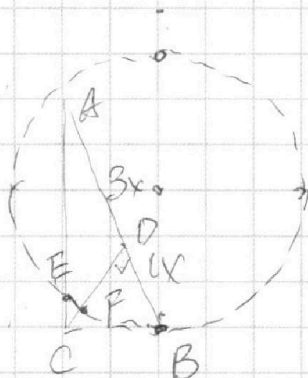
$$BC^2 = x \cdot 4x = 4x^2;$$

$$BC = 2x.$$

$$AC^2 = 3x \cdot 4x = 12x^2;$$

$$AC = 2\sqrt{3}x.$$

$$AC^2 + BC^2 = 16x^2 \quad (\checkmark)$$



$\triangle ABC \sim \triangle ECF$:

$$\frac{AB}{EC} = \frac{AC}{EF} = \frac{BC}{CF}.$$

