



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

11 КЛАСС. Вариант 2



1. [4 балла] Натуральные числа a , b , c таковы, что ab делится на $2^7 3^{11} 5^{14}$, bc делится на $2^{13} 3^{15} 5^{18}$, ac делится на $2^{14} 3^{17} 5^{43}$. Найдите наименьшее возможное значение произведения abc .

2. [5 баллов] Дан прямоугольный треугольник ABC . Окружность, касающаяся прямой AC в точке A , пересекает высоту CD , проведённую к гипотенузе, в точке E , а катет BC – в точке F . Известно, что $AB \parallel EF$, $AB : BD = 1,3$. Найдите отношение площади треугольника ACD к площади треугольника CEF .

3. [4 балла] Решите уравнение $5 \arccos(\sin x) = \frac{3\pi}{2} + x$.

4. [5 баллов] Найдите все значения параметра a , для каждого из которых найдётся значение параметра b , при котором система уравнений

$$\begin{cases} x + 3ay - 7b = 0, \\ (x^2 + 14x + y^2 + 45)(x^2 + y^2 - 9) = 0 \end{cases}$$

имеет ровно 4 решения.

5. [5 баллов] Некоторые числа x и y удовлетворяют равенствам

$$\log_7^4(6x) - 2 \log_{6x} 7 = \log_{36x^2} 343 - 4, \quad \text{и} \quad \log_7^4 y + 6 \log_y 7 = \log_{y^2} (7^5) - 4.$$

Найдите все возможные значения произведения xy .

6. [5 баллов] На координатной плоскости дан параллелограмм с вершинами в точках $O(0; 0)$, $P(-17; 68)$, $Q(2; 68)$ и $R(19; 0)$. Найдите количество пар точек $A(x_1; y_1)$ и $B(x_2; y_2)$ с целыми координатами, лежащих в этом параллелограмме (возможно на границе) и таких, что $4x_2 - 4x_1 + y_2 - y_1 = 40$.

7. [6 баллов] Дана треугольная пирамида $SABC$, медианы AA_1 , BB_1 и CC_1 треугольника ABC пересекаются в точке M . Сфера Ω касается ребра AS в точке L и касается плоскости основания пирамиды в точке K , лежащей на отрезке AM . Сфера Ω пересекает отрезок SM в точках P и Q . Известно, что $SP = MQ$, площадь треугольника ABC равна 60, $SA = BC = 10$.

а) Найдите произведение длин медиан AA_1 , BB_1 и CC_1 .

б) Найдите двугранный угол при ребре BC пирамиды, если дополнительно известно, что Ω касается грани BCS в точке N , $SN = 3$, а радиус сферы Ω равен 4.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☒ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



Задача 1.

Если бы в разложении ~~каждого~~ ^{любого} и чисел a, b, c присут. множителей, не равных 2, 3 или 5 (в какой-то степени), то из этого прост. множ. можно было бы число подбить, тогда произв. abc бы увеличилось, но все условия все еще бы выполнялись. $\Rightarrow$ в разлож. чисел a, b, c не мож. присут. только 2, 3, 5.

Пусть $a = 2^{a_1} \cdot 3^{a_2} \cdot 5^{a_3}$, $a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{N}_0$ (нат. и, 0")

$b = 2^{b_1} \cdot 3^{b_2} \cdot 5^{b_3}$, $b_1, b_2, b_3 \in \mathbb{N}_0$

$c = 2^{c_1} \cdot 3^{c_2} \cdot 5^{c_3}$

Тогда условия делимости записываются след. образом

$$ab : 2^7 \cdot 3^{11} \cdot 5^{14} \Rightarrow \begin{cases} 2^{a_1+b_1} \cdot 3^{a_2+b_2} \cdot 5^{a_3+b_3} : 2^7 \cdot 3^{11} \cdot 5^{14} \Rightarrow \begin{cases} a_1+b_1 \geq 7 & (1) \\ a_2+b_2 \geq 11 & (2) \\ a_3+b_3 \geq 14 & (3) \end{cases} \end{cases}$$

Аналогично запишем для bc и ac

$$\begin{cases} b_1+c_1 \geq 13 & (4) \\ b_2+c_2 \geq 15 & (5) \\ b_3+c_3 \geq 18 & (6) \end{cases} \quad \begin{cases} a_1+c_1 \geq 14 & (7) \\ a_2+c_2 \geq 17 & (8) \\ a_3+c_3 \geq 43 & (9) \end{cases}$$

Сложим состав. нер-во: $(1)+(4)+(7)$; $(2)+(5)+(8)$ и $(3)+(6)+(9)$. Получим.

$$\begin{cases} 2(a_1+b_1+c_1) \geq 7+13+14 \\ 2(a_2+b_2+c_2) \geq 11+15+17 \\ 2(a_3+b_3+c_3) \geq 14+18+43 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a_1+b_1+c_1 \geq 17 \\ a_2+b_2+c_2 \geq 21\frac{1}{2} \\ a_3+b_3+c_3 \geq 37\frac{1}{2} \end{cases}$$

Т.к. a, b, c все переписанные числа, имеем записано:

$$\begin{cases} a_1+b_1+c_1 \geq 17 \\ a_2+b_2+c_2 \geq 22 \\ a_3+b_3+c_3 \geq 38 \end{cases} \quad abc = 2^{a_1+b_1+c_1} \cdot 3^{a_2+b_2+c_2} \cdot 5^{a_3+b_3+c_3} \geq 2^{17} \cdot 3^{22} \cdot 5^{38}$$

Однако

Но при этом $abc \geq 2^{17} \cdot 3^{22} \cdot 5^{38}$ ~~но~~ $abc \geq 2^{17} \cdot 3^{22} \cdot 5^{43}$ ~~но~~ $abc \geq 2^{17} \cdot 3^{22} \cdot 5^{43}$

Пример, когда $abc = 2^{17} \cdot 3^{22} \cdot 5^{43}$

$$a = 2^4 \cdot 3^8 \cdot 5^{14}$$

$$b = 2^3 \cdot 3^4 \cdot 5^0$$

$$c = 2^{10} \cdot 3^{11} \cdot 5^{29}$$

$$\text{Ответ: } 2^{17} \cdot 3^{22} \cdot 5^{43}$$

$$ac \geq 43 = ac : 5^{43} \Rightarrow abc : 5^{43}$$

$$\text{тогда } a_3+b_3+c_3 \geq 43$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☒	☒	☒	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$x^2 + 14x + 49 + y^2 - 4 = 0$$

$$(x+7)^2 + y^2 = 4$$

$$x^2 + y^2 = 9$$

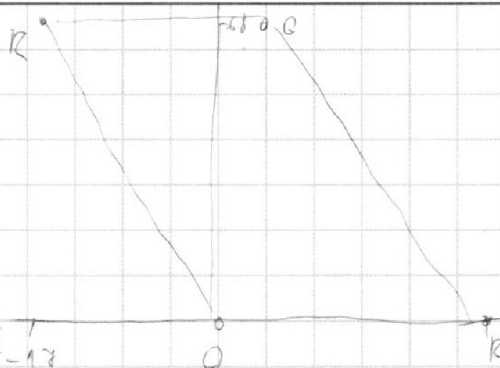
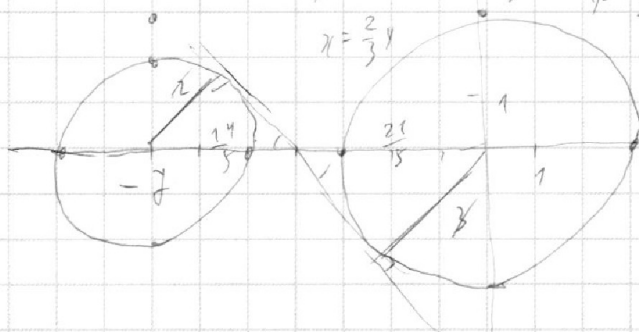
$$\frac{x}{y} = \frac{2}{3}$$

$$x = \frac{2}{3}y$$

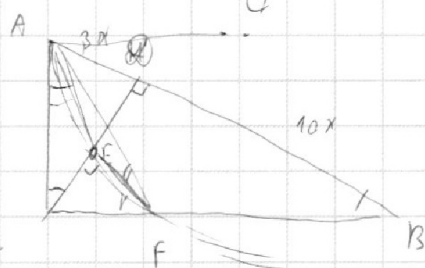
$$x+y=8$$

$$\frac{5}{3}y=8$$

$$y = \frac{24}{5} = 4.8$$



$$\angle EAD = 90^\circ$$



$$y = kx + b$$

$$y - kx - b = 0$$

$$\frac{|-b|}{\sqrt{1+k^2+b^2}} = 3$$

$$\frac{|2k-b|}{\sqrt{1+k^2+b^2}} = 2$$

$$2k-b = \frac{2}{3}b$$

$$2k = \frac{5}{3}b$$

$$k = \frac{5}{24}b$$

$$2k-b = \frac{2}{3}b$$

$$2k = \frac{5}{3}b$$

$$k = \frac{5}{24}b$$

$$2k-b = \frac{2}{3}b$$

$$2k = \frac{5}{3}b$$

$$k = \frac{5}{24}b$$

$$2k-b = \frac{2}{3}b$$

$$2k = \frac{5}{3}b$$

$$k = \frac{5}{24}b$$

$$2k-b = \frac{2}{3}b$$

$$2k = \frac{5}{3}b$$

$$k = \frac{5}{24}b$$

$$2k-b = \frac{2}{3}b$$

$$2k = \frac{5}{3}b$$

$$k = \frac{5}{24}b$$

$$2k-b = \frac{2}{3}b$$

$$2k = \frac{5}{3}b$$

$$k = \frac{5}{24}b$$

$$2k-b = \frac{2}{3}b$$

$$2k = \frac{5}{3}b$$

$$k = \frac{5}{24}b$$

$$2k-b = \frac{2}{3}b$$

$$2k = \frac{5}{3}b$$

$$k = \frac{5}{24}b$$

$$2k-b = \frac{2}{3}b$$

$$2k = \frac{5}{3}b$$

$$k = \frac{5}{24}b$$

$$2k-b = \frac{2}{3}b$$

$$2k = \frac{5}{3}b$$

$$k = \frac{5}{24}b$$

$$2k-b = \frac{2}{3}b$$

$$2k = \frac{5}{3}b$$

$$k = \frac{5}{24}b$$

$$2k-b = \frac{2}{3}b$$

$$2k = \frac{5}{3}b$$

$$k = \frac{5}{24}b$$

$$2k-b = \frac{2}{3}b$$

$$2k = \frac{5}{3}b$$

$$k = \frac{5}{24}b$$

$$2k-b = \frac{2}{3}b$$

$$2k = \frac{5}{3}b$$

$$k = \frac{5}{24}b$$

$$2k-b = \frac{2}{3}b$$

$$2k = \frac{5}{3}b$$

$$k = \frac{5}{24}b$$

$$2k-b = \frac{2}{3}b$$

$$2k = \frac{5}{3}b$$

$$k = \frac{5}{24}b$$

$$2k-b = \frac{2}{3}b$$

$$2k = \frac{5}{3}b$$

$$k = \frac{5}{24}b$$

$$2k-b = \frac{2}{3}b$$

$$2k = \frac{5}{3}b$$

$$k = \frac{5}{24}b$$

$$2k-b = \frac{2}{3}b$$

$$2k = \frac{5}{3}b$$

$$k = \frac{5}{24}b$$

$$2k-b = \frac{2}{3}b$$

$$2k = \frac{5}{3}b$$

$$k = \frac{5}{24}b$$

$$2k-b = \frac{2}{3}b$$

$$2k = \frac{5}{3}b$$

$$k = \frac{5}{24}b$$

$$2k-b = \frac{2}{3}b$$

$$2k = \frac{5}{3}b$$

$$k = \frac{5}{24}b$$

$$2k-b = \frac{2}{3}b$$

$$2k = \frac{5}{3}b$$

$$k = \frac{5}{24}b$$

$$2k-b = \frac{2}{3}b$$

$$2k = \frac{5}{3}b$$

$$k = \frac{5}{24}b$$

$$2k-b = \frac{2}{3}b$$

$$2k = \frac{5}{3}b$$

$$k = \frac{5}{24}b$$

$$2k-b = \frac{2}{3}b$$

$$2k = \frac{5}{3}b$$

$$k = \frac{5}{24}b$$

$$2k-b = \frac{2}{3}b$$

$$2k = \frac{5}{3}b$$

$$k = \frac{5}{24}b$$

$$2k-b = \frac{2}{3}b$$

$$2k = \frac{5}{3}b$$

$$k = \frac{5}{24}b$$

$$2k-b = \frac{2}{3}b$$

$$2k = \frac{5}{3}b$$

$$k = \frac{5}{24}b$$

$$2k-b = \frac{2}{3}b$$

$$2k = \frac{5}{3}b$$

$$k = \frac{5}{24}b$$

$$2k-b = \frac{2}{3}b$$

$$2k = \frac{5}{3}b$$

$$k = \frac{5}{24}b$$

$$2k-b = \frac{2}{3}b$$

$$2k = \frac{5}{3}b$$

$$k = \frac{5}{24}b$$

$$2k-b = \frac{2}{3}b$$

$$2k = \frac{5}{3}b$$

$$k = \frac{5}{24}b$$

$$2k-b = \frac{2}{3}b$$

$$2k = \frac{5}{3}b$$

$$k = \frac{5}{24}b$$

$$2k-b = \frac{2}{3}b$$

$$2k = \frac{5}{3}b$$

$$k = \frac{5}{24}b$$

$$2k-b = \frac{2}{3}b$$

$$2k = \frac{5}{3}b$$

$$k = \frac{5}{24}b$$

$$2k-b = \frac{2}{3}b$$

$$2k = \frac{5}{3}b$$

$$k = \frac{5}{24}b$$

$$2k-b = \frac{2}{3}b$$

$$2k = \frac{5}{3}b$$

$$k = \frac{5}{24}b$$

$$2k-b = \frac{2}{3}b$$

$$2k = \frac{5}{3}b$$

$$k = \frac{5}{24}b$$

$$2k-b = \frac{2}{3}b$$

$$2k = \frac{5}{3}b$$

$$k = \frac{5}{24}b$$

$$2k-b = \frac{2}{3}b$$

$$2k = \frac{5}{3}b$$

$$k = \frac{5}{24}b$$

$$2k-b = \frac{2}{3}b$$

$$2k = \frac{5}{3}b$$

$$k = \frac{5}{24}b$$

$$2k-b = \frac{2}{3}b$$

$$2k = \frac{5}{3}b$$

$$k = \frac{5}{24}b$$

$$2k-b = \frac{2}{3}b$$

$$2k = \frac{5}{3}b$$

$$k = \frac{5}{24}b$$

$$2k-b = \frac{2}{3}b$$

$$2k = \frac{5}{3}b$$

$$k = \frac{5}{24}b$$

$$2k-b = \frac{2}{3}b$$

$$2k = \frac{5}{3}b$$

$$k = \frac{5}{24}b$$

$$2k-b = \frac{2}{3}b$$

$$2k = \frac{5}{3}b$$

$$k = \frac{5}{24}b$$

$$2k-b = \frac{2}{3}b$$

$$2k = \frac{5}{3}b$$

$$k = \frac{5}{24}b$$

$$2k-b = \frac{2}{3}b$$

$$2k = \frac{5}{3}b$$

$$k = \frac{5}{24}b$$

$$2k-b = \frac{2}{3}b$$

$$2k = \frac{5}{3}b$$

$$k = \frac{5}{24}b$$

$$2k-b = \frac{2}{3}b$$

$$2k = \frac{5}{3}b$$

$$k = \frac{5}{24}b$$

$$2k-b = \frac{2}{3}b$$

$$2k = \frac{5}{3}b$$

$$k = \frac{5}{24}b$$

$$2k-b = \frac{2}{3}b$$

$$2k = \frac{5}{3}b$$

$$k = \frac{5}{24}b$$

$$2k-b = \frac{2}{3}b$$

$$2k = \frac{5}{3}b$$

$$k = \frac{5}{24}b$$

$$2k-b = \frac{2}{3}b$$

$$2k = \frac{5}{3}b$$

$$k = \frac{5}{24}b$$

$$2k-b = \frac{2}{3}b$$

$$2k = \frac{5}{3}b$$

$$k = \frac{5}{24}b$$

$$2k-b = \frac{2}{3}b$$

$$2k = \frac{5}{3}b$$

$$k = \frac{5}{24}b$$

$$2k-b = \frac{2}{3}b$$

$$2k = \frac{5}{3}b$$

$$k = \frac{5}{24}b$$

$$2k-b = \frac{2}{3}b$$

$$2k = \frac{5}{3}b$$

$$k = \frac{5}{24}b$$

$$2k-b = \frac{2}{3}b$$

$$2k = \frac{5}{3}b$$

$$k = \frac{5}{24}b$$

$$2k-b = \frac{2}{3}b$$

$$2k = \frac{5}{3}b$$

$$k = \frac{5}{24}b$$

$$2k-b = \frac{2}{3}b$$

$$2k = \frac{5}{3}b$$

$$k = \frac{5}{24}b$$

$$2k-b = \frac{2}{3}b$$

$$2k = \frac{5}{3}b$$

$$k = \frac{5}{24}b$$

$$2k-b = \frac{2}{3}b$$

$$2k = \frac{5}{3}b$$

$$k = \frac{5}{24}b$$

$$2k-b = \frac{2}{3}b$$

$$2k = \frac{5}{3}b$$

$$k = \frac{5}{24}b$$

$$2k-b = \frac{2}{3}b$$

$$2k = \frac{5}{3}b$$

$$k = \frac{5}{24}b$$

$$2k-b = \frac{2}{3}b$$

$$2k = \frac{5}{3}b$$

$$k = \frac{5}{24}b$$

$$2k-b = \frac{2}{3}b$$

$$2k = \frac{5}{3}b$$

$$k = \frac{5}{24}b$$

$$2k-b = \frac{2}{3}b$$

$$2k = \frac{5}{3}b$$

$$k = \frac{5}{24}b$$

$$2k-b = \frac{2}{3}b$$

$$2k = \frac{5}{3}b$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1
☐

2
☒

3
☐

4
☐

5
☐

6
☐

7
☐



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Задача 2 Лист 2

Пусть $ED = y$

$$1 - \frac{y}{x\sqrt{30}} = \frac{y}{\sqrt{30}x}$$

$$\frac{2y}{x\sqrt{30}} = 1$$

$$y = \frac{\sqrt{30}}{2}x$$

$$6. CE = CD - ED = x\sqrt{30} - \frac{\sqrt{30}}{2}x = x\frac{\sqrt{30}}{2}$$

~~К~~ $\triangle CEF \sim \triangle CDB$

~~С~~ $\triangle CEF \sim \triangle CDB$

$$\frac{S(\triangle CEF)}{S(\triangle CDB)} = \frac{CE^2}{CD^2} = \frac{x^2 \cdot 30}{4 \cdot x^2 \cdot 30} = \frac{1}{4}$$

$$S(\triangle CEF) = \frac{1}{4} S(\triangle CDB); S(\triangle DBC) = 4 S(\triangle CEF)$$

$$\triangle DAC \sim \triangle DBC \Rightarrow \frac{S(\triangle DAC)}{S(\triangle DBC)} = \frac{AC^2}{BC^2} = \frac{x^2 \cdot 30}{x^2 \cdot 130} = \frac{3}{13}$$

$$S(\triangle DAC) = \frac{3}{10} S(\triangle DBC) = \frac{12}{10} S(\triangle CEF)$$

$$\frac{S(\triangle DAC)}{S(\triangle DBC)} = \frac{6}{5} = 1,2$$

Ответ: 1, 2

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☒	☐	☐	☐	☐	☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

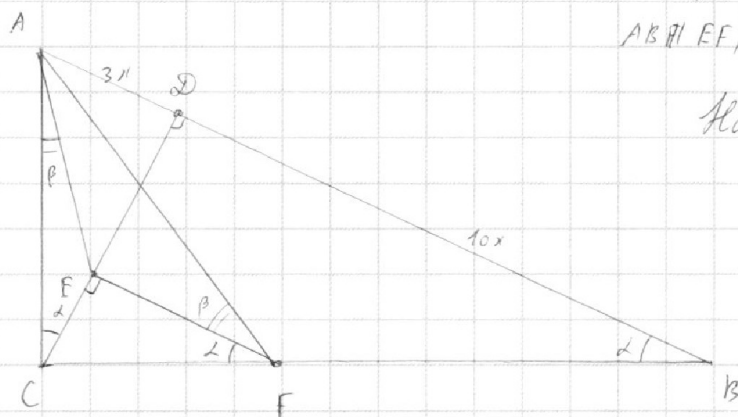
Задача 2 Лист 1

Дано: $\triangle ABC$ - прам; $\angle C = 30^\circ$; Окр. Ω кас.
 AC в A ; $\Omega \cap CD = E$; $\Omega \cap BC = F$;
 $AB \parallel EF$; $AB:BD = 1,3$

Найти: $\frac{S(\triangle ACD)}{S(\triangle CEF)}$ - ?

Решение.

1. Пусть $AB = 13x$,
тогда $BD = \frac{AB}{1,3} = 10x$



$$AD = AB - BD = 3x$$

2. $\triangle ADC \sim \triangle ABC$ ($\angle ABC = \angle$; $\angle EFC = \angle ABC = \angle$, как соотв. при $EF \parallel AB$ и сек BC ; $\angle ACD = 90^\circ - \angle CAD = \angle ABC = \angle$).

3. $\triangle ACD \sim \triangle CBD$ (по 2-ым углам) $\Rightarrow \frac{AC}{BC} = \frac{AD}{CD} = \frac{CD}{BD}$; $CD^2 = AD \cdot BD$

$\triangle ADC \sim \triangle ACB$ (по 2-ым углам)

$$\Rightarrow \frac{AD}{AC} = \frac{AC}{AB}; AC^2 = AD \cdot AB; AC = x\sqrt{39}$$

$$\text{Аналогично } BC = \sqrt{BD \cdot AB} = x\sqrt{130}$$

4. По св. угла между касательной и хордой;

$$\angle ACE = \frac{1}{2} \angle AFE = \angle EFA = \beta$$

x

$$\angle AED = \angle ECA + \angle CAE = \alpha + \beta - \text{как внешний}$$

$$\angle CFA = \angle CFE + \angle EFA = \alpha + \beta = \angle AED$$

$\triangle CFA \sim \triangle DEA$ (по 2-ым углам)

$$\frac{CF}{DE} = \frac{AC}{AD} = \frac{x\sqrt{39}}{3x} = \sqrt{\frac{39}{9}} \Rightarrow CF = \sqrt{\frac{13}{3}} ED$$

5. $\angle CEF = \angle CDB = 90^\circ$, как соотв. при $AB \parallel EF$ и сек CD ,

$\triangle EFC \sim \triangle DCB$ по двум углам

$$\frac{EF}{DB} = \frac{EC}{CD} = \frac{CD - ED}{CD}$$

$$\frac{CE}{CD} = \frac{CF}{BC}$$

$$\frac{CD - ED}{CD} = \frac{CF}{x\sqrt{130}}$$

$$\left(1 - \frac{ED}{CD}\right) = \frac{\sqrt{\frac{13}{3}} ED}{\sqrt{3} \cdot \sqrt{13} \cdot \sqrt{10} \cdot x}$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1
☐

2
☐

3
☒

4
☐

5
☐

6
☐

7
☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Задача 3 лист 2

$$5x - 10\pi = \pi - x$$

$$6x = 11\pi$$

$$x = \frac{11\pi}{6}$$

$$\checkmark x \in \left[\frac{5\pi}{2}; \frac{7\pi}{2} \right] : \arcsin(\sin x) = \arcsin(-\sin(x - 3\pi)) =$$

$$= -x + 3\pi$$

$$-5x + 15\pi = \pi - x$$

$$4x = 14\pi$$

$$x = \frac{7\pi}{2}$$

Прямой по всей x -оси

Ответ. $-\frac{3\pi}{2}; \frac{\pi}{6}; \pi; \frac{11\pi}{6}; \frac{7\pi}{2}$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☒	☐	☐	☐	☐



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Задача 3 пункт 1

$$5 \arccos(\sin x) = \frac{3\pi}{2} + x$$

$$5\left(\frac{\pi}{2} - \arcsin(\sin x)\right) = \frac{3\pi}{2} + x$$

$$5 \arcsin(\sin x) = \pi - x$$

Задумка, т.е. $\frac{\pi}{2} \geq \arcsin(\sin x) \geq -\frac{\pi}{2}$
 $\frac{5\pi}{2} \geq 5 \arcsin(\sin x) \geq -\frac{5\pi}{2}$

тогда
$$\begin{cases} \pi - x \geq -\frac{5\pi}{2} \\ \pi - x \leq \frac{5\pi}{2} \\ x \leq \frac{3\pi}{2} \\ x \geq -\frac{3\pi}{2} \end{cases}$$

I. $x \in \left[-\frac{3\pi}{2}, -\frac{\pi}{2}\right]: \arcsin(\sin x) = x + \pi$
 $= \arcsin(-\sin(x+\pi)) = -\arcsin(\sin(x+\pi))$
 $= -x - \pi$
 $5x + 5\pi = \pi - x$
 $6x = -4\pi; x = -\frac{2}{3}\pi$
 $-5x - 5\pi = \pi - x; 4x = -6\pi; x = -\frac{3}{2}\pi$

II. $x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right): \arcsin(\sin x) = x$

$$5x = \pi - x$$

$$x = \frac{\pi}{6}$$

III. $x \in \left(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right): \arcsin(\sin x) = \arcsin(-\sin(x-\pi)) =$
 $= -\arcsin(\sin(x-\pi)) = -x + \pi$

$$-5x + 5\pi = \pi - x; 4x = 4\pi; x = \pi$$

IV. $x \in \left[\frac{3\pi}{2}, \frac{5\pi}{2}\right): \arcsin(\sin x) = \arcsin(\sin(x-2\pi)) =$
 $= x - 2\pi$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☒	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Положим $y = kx - \frac{21}{5}$

$$x^2 + \left(k^2 x^2 - \frac{42}{5} kx + \frac{21^2}{5^2} \right) = 9$$

$$x^2 (k^2 + 1) + x \left(-\frac{42}{5} k \right) + \frac{21^2}{5^2} - 9 = 0$$

$$D_{1/4} = 0$$

$$\left(\frac{21}{5} \right)^2 k^2 - (k^2 + 1) \left(\frac{21^2}{5^2} - 9 \right) = 0$$

$$-9k^2 + \left(\frac{21}{5} \right)^2 + 9 = 0$$

$$k^2 = 1 + \left(\frac{5}{21} \right)^2 = \frac{49}{25} + 1 = \frac{74}{25}$$

$$k = \pm \frac{\sqrt{74}}{5}, \text{ но упр. коэф. должен быть } 0$$

$$a = k = -\frac{1}{3a}, \quad a = -\frac{1}{3k} = \pm \frac{5}{3\sqrt{74}}$$

Получим предельные значения при них не может быть
и решений.

$$\text{Значит предельно } a < -\frac{5}{3\sqrt{74}} \text{ и } a > \frac{5}{3\sqrt{74}}$$

(м.к. график при больших условиях коэф. прямой
не может пересекать обе окружности)

$$\text{Ответ: } (-\infty; -\frac{5}{3\sqrt{74}}) \cup (\frac{5}{3\sqrt{74}}; +\infty)$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☒	☐	☐	☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

Задача 4, лист 1

$$\begin{cases} x + 3ay - 3b = 0 & (1) \\ (x^2 + 14x + y^2 + 45)(x^2 + y^2 - 9) = 0 & (2) \end{cases}$$

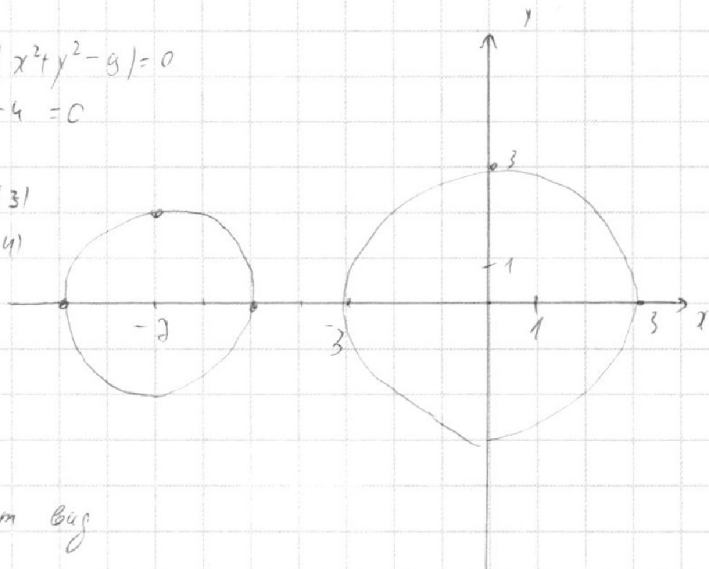
Решим (2): $(x^2 + 14x + y^2 + 45)(x^2 + y^2 - 9) = 0$

$$\begin{cases} x^2 + 14x + 49 + y^2 - 4 = 0 \\ x^2 + y^2 - 9 = 0 \end{cases}$$

Ур-я $\rightarrow$ $\begin{cases} (x+7)^2 + y^2 = 4 & (3) \\ x^2 + y^2 = 9 & (4) \end{cases}$

(3) - с центром $(-7, 0)$ и рад 2

(4) - с ц. $(0, 0)$ и рад 3



I Если $a=0$, то (1) имеет вид

$$x - 3b = 0$$

$x = 3b$, $b=0$ - ~~представляет собой~~ вертикальная прямая, не

II. Если $a \neq 0$, то (1) имеет вид

$$3ay = 3b - x$$

$$y = \frac{3b - x}{3a}; \quad y^2 = \frac{49b^2 - 14bx + x^2}{9a^2}$$

Подставим полн. y в (2)

$$x^2 + 14x + 49 + \frac{49b^2 - 14bx + x^2}{9a^2} + 45 = 0$$

$$x^2 + \frac{49b^2 - 14bx + x^2}{9a^2} - 9 = 0$$

$$\left[x^2 \left(1 + \frac{1}{9a^2} \right) + x \left(14 - \frac{14b}{3a^2} \right) + \frac{49b^2}{9a^2} + 45 = 0 \right]$$

$$\left[x^2 \left(1 + \frac{1}{9a^2} \right) + x \left(-\frac{14b}{3a^2} \right) - 9 = 0 \right]$$

Из графиков понятно, что решения этих двух уравн
не имеют пересек / т.к. они лежат на непересека.

окружностей $\Rightarrow$ существование 4-х решений уравнения

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☒	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



Задача 4 лист 2

II $a \neq 0$: Уравнение 1. урав. прямой

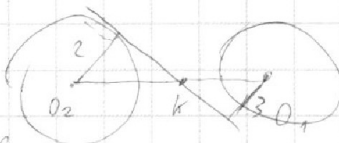
$$y = \frac{7b}{3a} - \frac{x}{3a} \quad \text{С помощью выбора } b \text{ можно}$$

выставить любое свободной коэф., т.е. двести
прямую вверх/вниз как угодно. При малом угл. коэф.,
тогда, прямая касается все окружности, пока
не дойдет до предельно пологой, своей касательной
этих окружностей вверху. Найдем ее угл. коэф.
касаясь равновесия радиус, что равен ст. углу ар. до прямой
ее радиус. Пусть прямая $y = kx + c$ - ее касат.
тогда $\frac{|0 - c|}{\sqrt{1 + k^2}} = 3$

$$\frac{|0 + 7k - c|}{\sqrt{1 + k^2}} = 2$$

$$\begin{cases} c^2 = 9 + 9k^2 + 9c^2 \\ 49k^2 - 14kc + c^2 = 4 + 4k^2 + 4c^2 \\ 9k^2 + 9c^2 + 9 = 0 \end{cases}$$

Рассмотрим



$$O_1, O_2 = 7$$

$$\begin{aligned} &\text{из подобия} \\ &\frac{O_2 k}{k O_1} = \frac{2}{3} \end{aligned}$$

$$O_2 k + k O_1 = 7$$

$$k O_1 = \frac{21}{5}$$

Тогда, т.е. тогда

$|7b; 0|$ всегда

исполн. на вершине прямой,
рассмотрим ее при $b = -\frac{8}{5}$ (тогда проходит через k)

$$y = -\frac{x}{30} - \frac{21}{5} \quad \text{Затем условие касания с}$$

той окружностью через центр. Пусть $k = -\frac{1}{30}$
прямой



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1
☐

2
☐

3
☐

4
☐

5
☒

6
☐

7
☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

как сумма возрастающих на $\mathbb{R}$ функций

Тогда пусть $f(a_1) = 7$ - ес. ~~хорош~~ решение уравнения

$f(x) = 7$. Тогда единственное решение уравнения

$f(x) = -7$; $f(-x) = 7$; $-x = a_1$, $x = -a_1$.

т.е. Тогда Отсюда

$$a + b = a_1 - a_1 = 0$$

$$\log_6 x + \log_6 y = 0$$

$$\log_6 6xy = 0$$

$$6xy = 1$$

$$xy = \frac{1}{6}$$

Ответ: $\frac{1}{6}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☒	☐	☐



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



Задача 5

I Рассмотрим первое равенство.

$$\log_2^4(6x) - 2\log_2 7 = \log_{36x} 343 - 4$$

$$\log_2^4(6x) - \frac{2}{\log_2 6x} = \frac{3}{2\log_2 6x} - 4 \quad \left(\begin{array}{l} \text{Условие на то, что } 6x > 0 \\ (2\log_2 6x) \text{ осталось, как и то, что } 6x \neq 1 \end{array} \right)$$

$$\begin{cases} 2\log_2^5 6x + 8\log_2 6x - 4 = 0 \\ \log_2 6x \neq 0 \end{cases}$$

Пусть $\log_2 6x = a$

$$\begin{cases} 2a^5 + 8a - 4 = 0 \\ a \neq 0 - \text{осв. не кор.} \end{cases} \quad \text{Пусть } f(a) = 2a^5 + 8a - 4 = 0$$

$$f'(a) = 2a^4 + 8$$

II. Рассмотрим второе равенство. $f(x) = 2x^5 + 8x$

$$\log_2^4 y + 6\log_2 7 = \log_2 (7^5) - 4$$

$$\log_2^4 y + \frac{6}{\log_2 y} = \frac{5}{2\log_2 y} - 4 \quad \left(\begin{array}{l} (2\log_2 y) \text{ Аналогично I можно} \\ \text{не ставить} \end{array} \right)$$

$$\begin{cases} 2\log_2^5 y + 8\log_2 y + 7 = 0 \\ \log_2 y \neq 0 \end{cases}$$

Пусть $b = \log_2 y$

$$2b^5 + 8b + 7 = 0$$

$b \neq 0$ - осв. не корни

III. Наши равенства свелись к виду

$$\begin{cases} f(a) - 7 = 0 \\ f(b) + 7 = 0 \end{cases}$$

Заметим, что $f(x)$ - нечетная

Функция: Действительно

$$f(-x) = 2(-x)^5 + 8(-x) = -1 \cdot (2x^5 + 8x) = -f(x)$$

Пусть $f(x)$ с крестом того $f(x)$ и при $x \in \mathbb{R}$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☒

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



Задача 7. Метр

Безграничные способности будем считать, что $\angle AA_1C$ - тупой (случай, когда он острый - симметричен относительно прямой AB и BC).
Тогда $\cos \angle AA_1C = -\sqrt{1 - \sin^2 \angle AA_1C} = -\frac{3}{5}$, $\cos \angle AA_1B = \cos(\frac{\pi}{2} - \angle AA_1C) = \frac{3}{5}$
По т. косинусов в треугольнике AA_1C : $AC^2 = AA_1^2 + A_1C^2 + 2 AA_1 \cdot A_1C \cdot \cos \angle AA_1C =$
 $= 225 + 25 - 2 \cdot 5 \cdot 15 \cdot (-\frac{3}{5}) = 250 + 90 = 340$
По т. косинусов в треугольнике AA_1B : $AB^2 = AA_1^2 + A_1B^2 - 2 AA_1 \cdot A_1B \cdot \cos \angle AA_1B =$
 $= 225 + 25 - 2 \cdot 5 \cdot 15 \cdot \frac{3}{5} = 250 - 90 = 160$

3. Искать длину медиан будем следующим образом:
удвоим BB_1 за точку B до K . Получим параллель $BK \parallel AC$
(по пр. AK $BK \parallel AC$ и $AB \parallel KC$). По св. диаг. паралл. AK

$$AC^2 + BK^2 = 2(AB^2 + BC^2), \quad BB_1^2 = \frac{2(AB^2 + BC^2) - AC^2}{4} = \frac{2(160 + 100) - 340}{4} =$$

$$= \frac{180}{4} = 45, \quad BB_1 = \sqrt{45}$$

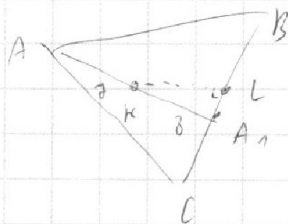
$$\text{Аналогично: } CC_1^2 = \frac{2(AC^2 + BC^2) - AB^2}{4} = \frac{2(340 + 100) - 160}{4} =$$

$$= \frac{720}{4} = \frac{360}{2} = 180 = 45 \cdot 4, \quad CC_1 = 2\sqrt{45}$$

$$AA_1 \cdot BB_1 \cdot CC_1 = 15 \cdot \sqrt{45} \cdot \sqrt{45} \cdot 2 = 30 \cdot 45 = 1350$$

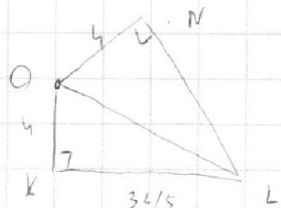
4. Т.к. L и N - точки касания. $OK \perp (ABC) \Rightarrow OK \perp BC$;
 $ON \perp (SAC) \Rightarrow ON \perp BC$. Тогда, по пр. перп. прямой и плоскости,
 $BC \perp (OKN)$. Тогда $(OKN) \perp (ABC) = KL$, где $KL \perp BC$, $m \in KL$ -
высоты треугольника, соот. высоты, опущенные из K на BC , т.е. $L \in BC$

В плоскости (SAC) : $SL = SN = 3$, как точки касания
Также тогда $KM = SL = 3$; $AK = AM - KM = 7$; $AK = 15 - 7 = 8 = AA_1 - AK$
 $= AA_1 - AK$



$$\text{из } \triangle AA_1K: KL = \sin \angle KA_1L \cdot KA_1 = \frac{4}{5} \cdot 8 = \frac{32}{5}$$

5. Выясним размеры: $(OK \perp N)$



$$\text{из } \triangle OKL: LN = KL = \frac{32}{5}, \quad \angle OKL = \angle ONL$$

по катету и гипотенузе $\angle NLO = \angle OKL$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1
☐

2
☐

3
☐

4
☐

5
☐

6
☐

7
☒

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Задача 7 лист 3

$$\tan \angle OLK: \tan \angle OLK = \frac{OK}{KL} = \frac{4 \cdot 5}{32} = \frac{5}{8}$$

$$\angle NLK = 2 \angle OLK = 2 \arctg \frac{5}{8}$$

Заметим, что $\angle NLK$ - двугран. угол при вершине.

угол $\angle S(BC)A$, т.к. $KL \perp BC$ и $NL \perp BC$.

Ответ: а) 1350 б) $2 \arctg \frac{5}{8}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☒	☒	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



Задача 5

Первое рав-во

$$\log_3^4(6x) - 2 \log_6 x^2 = \log_{36x^2} 343 - 4$$

$$\log_3^4(6x) - \frac{2}{\log_2 6x} - \frac{3}{2} \log_{16x^2} 7 + 4 = 0$$

$$2 \log_2^5(6x) - 3 \log_2^2(6x) + 8 \log_2 6x - 2 = 0$$

$$\log_2 6x \neq 0$$

$$6x \neq 0$$

$$\log_3^4(6x) = \log_{36x^2} (343) + 2 \log_6 x^2 - 4$$

Заметим, что при $x > 0$: $f_1(x) = 6x$ - возрастает;

$f_2(x) = 36x^2$ - возрастает, тогда $f_3(x) = \log_3^4(6x) \uparrow$, т.к.

$$\log_3^4 y + 6 \log_2 y = \log_2 (10^5) - 4$$

$$\log_3^4 y + \frac{6}{\log_2 y} - \frac{5}{2 \log_2 y} + 4 = 0$$

$$\log_3^4$$

$$\log_3^4 y + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\log_2 y} + 4 = 0$$

$$2 \log_2^5 y + 8 \log_2 y + 7 = 0$$

$$\log_2^4(6x) - \frac{2}{\log_2 6x} - \frac{3}{2} \frac{1}{\log_2 6x} + 4 = 0$$

$$2 \log_2^5 6x + 8 \log_2 6x - 2 = 0$$

$$2a^5 + 8a - 7 = 0$$

$$2b^5 + 8b + 7 = 0$$

$$2(a^5 + b^5) + 8(a + b) = 0$$

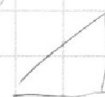
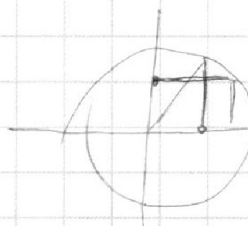
$$5 \arccos(\sin x) = \frac{3\pi}{2} + x$$

$$5 \arccos \sqrt{1 - \cos^2 x}$$

$$5 \left(\frac{\pi}{2} - \arcsin(\sin x) \right) = \frac{3\pi}{2} + x$$

$$5 \arcsin(\sin x) = \pi - x$$

$$\pi - x$$



$$(\sqrt{2}; \sqrt{2})$$

$$\sqrt{\frac{3}{2}}, -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$5 \frac{3\pi}{2} + \frac{\pi}{6} =$$

$$= \frac{10\pi}{6} = \frac{5\pi}{3}$$

$$(-7 + \sqrt{2}; \sqrt{2})$$

$$y = -x + 7 + 2\sqrt{2}$$

$$\text{ит.} : a_1 = -b_1$$



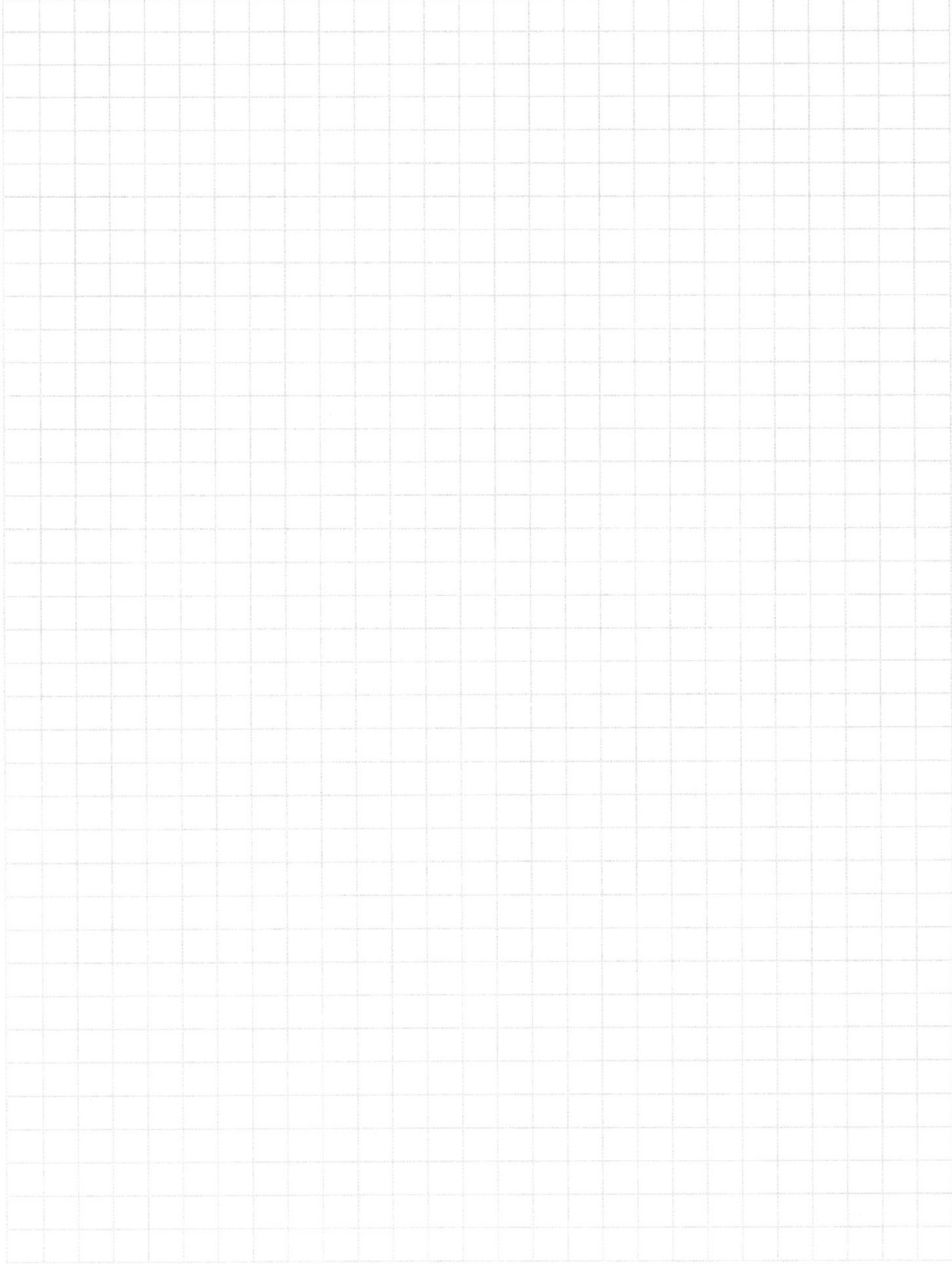
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☒	☒	☐	☒	☒	☒	☒

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Задача 4 МСЭ
т.е. найдемся в том, что $b > 0$,
т.е. найдемся в том, что $b > 0$,

Затем условие на дискриминант.

$$\begin{cases} R_{14} > 0 \\ b_{24} > 0 \end{cases} \Rightarrow \frac{x^2(1-bt)^2}{9a^2} - \text{Замена: } t = \frac{1}{9a^2} \text{ (т.к. } a > 0 \text{ - монотонно)}$$

Уравнения имеют вид

$$\begin{aligned} x^2(1+t) + 14x(1-bt) + 49b^2t + 45 &= 0 \\ x^2(1+t) - 14x \cdot bt - 9 &= 0 \end{aligned}$$

Затем условие на их дискриминант.

$$\begin{cases} 14^2(1-bt)^2 - 49 \cdot 4b^2 \cdot 4(1+t)/(49b^2t+45) > 0 \\ 14^2b^2t^2 + 36(1+t) > 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 49(1-2bt+b^2t^2) - (49b^2t^2+45t+49b^2t+45) > 0 \\ 14^2b^2t^2 + 9t + 9 > 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} t(-98b-49b^2-45)+4 > 0 \\ 49b^2t^2+9t+9 > 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} t(-49(b+1)^2+4)+4 > 0 \\ 49b^2t^2+9t+9 > 0 \end{cases}$$

