



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

11 КЛАСС. Вариант 4



1. [4 балла] Натуральные числа a, b, c таковы, что ab делится на $2^6 3^{13} 5^{11}$, bc делится на $2^{14} 3^{21} 5^{13}$, ac делится на $2^{16} 3^{25} 5^{28}$. Найдите наименьшее возможное значение произведения abc .
2. [5 баллов] Дан прямоугольный треугольник ABC . Окружность, касающаяся прямой AC в точке A , пересекает высоту CD , проведённую к гипотенузе, в точке E , а катет BC – в точке F . Известно, что $AB \parallel EF$, $AB : BD = 1,4$. Найдите отношение площади треугольника ACD к площади треугольника CEF .
3. [4 балла] Решите уравнение $10 \arccos(\sin x) = 9\pi - 2x$.
4. [5 баллов] Найдите все значения параметра a , для каждого из которых найдётся значение параметра b , при котором система уравнений

$$\begin{cases} 5x + 6ay - b = 0, \\ (x^2 + y^2 - 25)(x^2 + y^2 + 18y + 77) = 0 \end{cases}$$

имеет ровно 4 решения.

5. [5 баллов] Некоторые числа x и y удовлетворяют равенствам

$$\log_{11}^4 x - 6 \log_x 11 = \log_{x^3} \frac{1}{121} - 5, \quad \text{и} \quad \log_{11}^4 (0,5y) + \log_{0,5y} 11 = \log_{0,125y^3} (11^{-13}) - 5.$$

Найдите все возможные значения произведения xy .

6. [5 баллов] На координатной плоскости дан параллелограмм с вершинами в точках $O(0;0)$, $P(-15;90)$, $Q(2;90)$ и $R(17;0)$. Найдите количество пар точек $A(x_1; y_1)$ и $B(x_2; y_2)$ с целыми координатами, лежащих в этом параллелограмме (возможно, на границе) и таких, что $6x_2 - 6x_1 + y_2 - y_1 = 48$.
7. [6 баллов] Дана треугольная пирамида $SABC$, медианы AA_1 , BB_1 и CC_1 треугольника ABC пересекаются в точке M . Сфера Ω касается ребра AS в точке L и касается плоскости основания пирамиды в точке K , лежащей на отрезке AM . Сфера Ω пересекает отрезок SM в точках P и Q . Известно, что $SP = MQ$, площадь треугольника ABC равна 180, $SA = BC = 20$.
 - а) Найдите произведение длин медиан AA_1 , BB_1 и CC_1 .
 - б) Найдите двугранный угол при ребре BC пирамиды, если дополнительно известно, что Ω касается грани BCS в точке N , $SN = 6$, а радиус сферы Ω равен 8.

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☒	☐	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Поскольку $ab:2^6$, $bc:2^{14}$, а $ac:2^{16}$, $ab \cdot bc \cdot ac = a^2 b^2 c^2$.
 $ab \cdot bc \cdot ac = a^2 b^2 c^2; 2^{6+14+16}$. То есть $a^2 b^2 c^2:2^{36}$. Значит
 $abc:2^{18}$

Поскольку $ab:3^{13}$, $bc:3^{21}$, $ac:3^{25}$, $ab \cdot bc \cdot ac =$
 $= a^2 b^2 c^2; 3^{13+21+25}$. То есть $a^2 b^2 c^2:3^{59}$. Но a, b, c — натуральные числа, значит степени вхождения каждого простого числа в их разложение на простые множители — целое число. Значит степени вхождения 3 в разложение на простые множители чисел a^2, b^2, c^2 — четные числа, кратные 2. То есть и степень вхождения 3 в разложение на простые множители числа $a^2 b^2 c^2$ — четное число, кратное 2. Значит, раз $a^2 b^2 c^2:3^{59}$, то $a^2 b^2 c^2:3^{60}$. То есть $abc:3^{30}$

Заметим, что $ab \cdot bc = ab^2c = ac \cdot b^2$. Значит $ab \cdot bc:5^{28}$.
 То есть $ab \cdot bc \cdot ac = a^2 b^2 c^2:5^{28+28}$. Значит $a^2 b^2 c^2:5^{56}$. То есть $abc:5^{28}$.

Получаем, что $abc:2^{18} \cdot 3^{30} \cdot 5^{28}$. Значит $abc \geq 2^{18} \cdot 3^{30} \cdot 5^{28}$.
 Если $a = 2^4 \cdot 3^9 \cdot 5^{14}$, $b = 2^2 \cdot 3^5$, а $c = 2^{12} \cdot 3^{16} \cdot 5^{14}$, то $ab = 2^6 \cdot 3^{14} \cdot 5^{14}$,
 $bc = 2^{14} \cdot 3^{21} \cdot 5^{14}$, $ac = 2^{16} \cdot 3^{25} \cdot 5^{28}$, $abc = 2^{18} \cdot 3^{30} \cdot 5^{28}$. В таком случае
 $ab:2^6 \cdot 3^{13} \cdot 5^{14}$, $bc:2^{14} \cdot 3^{21} \cdot 5^{14}$, $ac:2^{16} \cdot 3^{25} \cdot 5^{28}$, то есть все условия соблюдены. Поскольку $abc \geq 2^{18} \cdot 3^{30} \cdot 5^{28}$ и у нас есть пример, где $abc = 2^{18} \cdot 3^{30} \cdot 5^{28}$, то $2^{18} \cdot 3^{30} \cdot 5^{28}$ — наименьшее возможное значение произведения abc .

Ответ: $2^{18} \cdot 3^{30} \cdot 5^{28}$

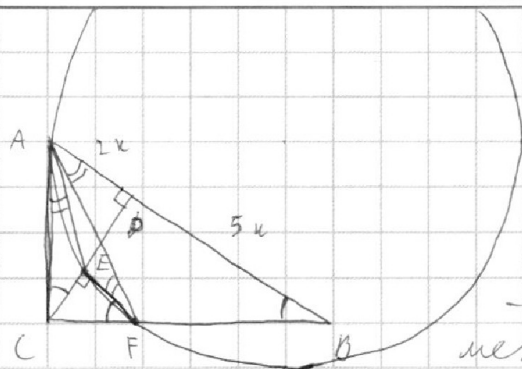
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☒	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



Пусть $AB = 7x$, тогда $BD = 5x$, а $AD = 2x$. $CD = \sqrt{AB \cdot BD} = \sqrt{10x^2} = \sqrt{10}x$.
По теореме Пифагора $AC = \sqrt{AD^2 + CD^2} = \sqrt{4x^2 + 10x^2} = \sqrt{14}x$, а $BC = \sqrt{BD^2 + CD^2} = \sqrt{25x^2 + 10x^2} = \sqrt{35}x$.
 $\angle ACE = \angle ACB = 180^\circ - 90^\circ - \angle CAD = 180^\circ - 90^\circ - \angle CAB = \angle ABC$. $\angle CAE = \angle EFA$, как углы между касательной и хордой. $\angle EFA = \angle FBA$, как накрест лежащие при параллельных AB и EF , и секущей AF . Поэтому $\angle CAE = \angle FBA$, $\angle ACE = \angle FBA$. Значит $\triangle ACE \sim \triangle ABF$. Значит $FB = CE \cdot \frac{AB}{AC} = CE \cdot \frac{7x}{\sqrt{14}x} = \sqrt{\frac{7}{2}} CE$. $\angle CFE = \angle CBA$, $\angle CEF = \angle CDB$, т.к.

$AB \parallel EF$. $\angle CEF = \angle CDB = 90^\circ = \angle ACB$. Значит $\triangle CEF \sim \triangle ACB$. Значит $CF = CE \cdot \frac{AC}{AB} = CE \cdot \frac{\sqrt{14}x}{7x} = \sqrt{\frac{2}{7}} CE$. Поэтому $BC = CF + FB = \sqrt{\frac{2}{7}} CE + \sqrt{\frac{7}{2}} CE = \sqrt{14} CE = \sqrt{35}x$. Значит $CE = \frac{\sqrt{35}}{\sqrt{14}}x = \sqrt{\frac{5}{2}}x$.
 $\angle CFE = \angle CBA = \angle ACD$, $\angle CEF = 90^\circ = \angle ADC$, значит $\triangle CEF \sim \triangle ADC$.
 $\frac{S_{ACB}}{S_{CEF}} = \left(\frac{AB}{CE}\right)^2 = \left(\frac{7x}{\sqrt{\frac{5}{2}}x}\right)^2 = \frac{49x^2}{\frac{5}{2}x^2} = 19,6$.

Ответ: $\frac{S_{ACB}}{S_{CEF}} = 19,6$.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☒	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$10 \arccos(\cos x) = 9\pi - 2x$$

$$\arccos(\cos(\frac{\pi}{2} - x)) = 0,9\pi - 0,2x$$

π к. область значений функции $\arccos - [0; \pi]$,

$$0 \leq 0,9\pi - 0,2x \leq \pi$$

$$0 \leq 4,5\pi - x \leq 5\pi$$

$$-4,5\pi \leq -x \leq 0,5\pi$$

$$4,5\pi \geq x \geq -0,5\pi$$

Если $x \in [-0,5\pi; 0,5\pi]$, $\arccos(\cos(\frac{\pi}{2} - x)) = 0,5\pi - x$

$$0,5\pi - x = 0,9\pi - 0,2x \Rightarrow -0,4\pi = 0,8x \Rightarrow x = -0,5\pi. -0,5\pi \in [-0,5\pi; 0,5\pi]$$

Если $x \in (0,5\pi; 1,5\pi]$, $\arccos(\cos(\frac{\pi}{2} - x)) = x - 0,5\pi$

$$x - 0,5\pi = 0,9\pi - 0,2x \Rightarrow 1,2x = 1,4\pi \Rightarrow x = \frac{7}{6}\pi. \frac{7}{6}\pi \in (0,5\pi; 1,5\pi]$$

Если $x \in (1,5\pi; 2,5\pi]$, $\arccos(\cos(\frac{\pi}{2} - x)) = 2,5\pi - x$

$$2,5\pi - x = 0,9\pi - 0,2x \Rightarrow 1,6\pi = 0,8x \Rightarrow x = 2\pi. 2\pi \in (1,5\pi; 2,5\pi]$$

Если $x \in (2,5\pi; 3,5\pi]$, $\arccos(\cos(\frac{\pi}{2} - x)) = x - 2,5\pi$

$$x - 2,5\pi = 0,9\pi - 0,2x \Rightarrow 1,2x = 3,4\pi \Rightarrow x = \frac{17}{6}\pi. \frac{17}{6}\pi \in (2,5\pi; 3,5\pi]$$

Если $x \in (3,5\pi; 4,5\pi]$, $\arccos(\cos(\frac{\pi}{2} - x)) = 4,5\pi - x$

$$4,5\pi - x = 0,9\pi - 0,2x \Rightarrow 3,6\pi = 0,8x \Rightarrow x = 4,5\pi. 4,5\pi \in (3,5\pi; 4,5\pi]$$

Итак множество $\{-0,5\pi; \frac{7}{6}\pi; 2\pi; \frac{17}{6}\pi; 4,5\pi\}$ - решение данного уравнения

Ответ: $x \in \{-0,5\pi; \frac{7}{6}\pi; 2\pi; \frac{17}{6}\pi; 4,5\pi\}$.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

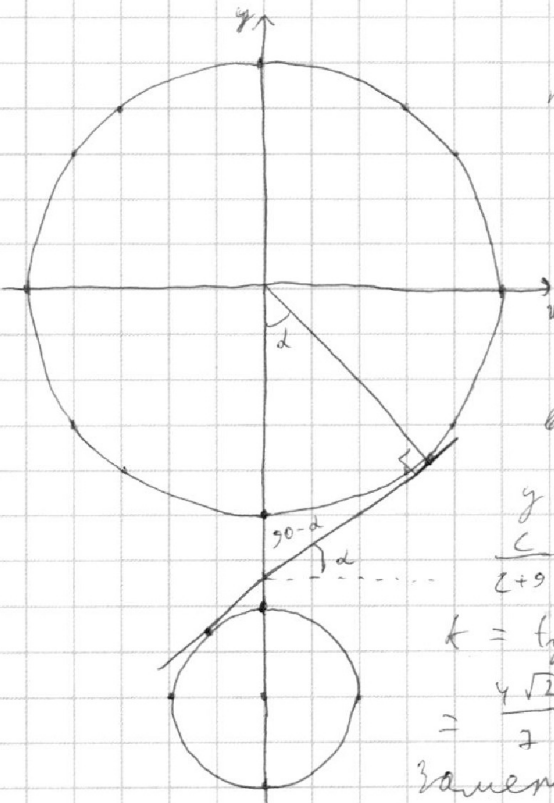
1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☒	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$\begin{cases} 5x + 6ay - b = 0, \\ (x^2 + y^2 - 25)(x^2 + y^2 + 18y + 77) = 0; \end{cases} \quad \begin{cases} y = -\frac{5}{6a}x + \frac{b}{6a} \\ \begin{cases} x^2 + y^2 = 5^2 \\ x^2 + (y+9)^2 = 2^2 \end{cases} \end{cases}$$



При построении точек, удовлетворяющих совокупности $\begin{cases} x^2 + y^2 = 5^2 \\ x^2 + (y+9)^2 = 2^2 \end{cases}$

получаем 2 окружности, радиусами 5 и 2 и центрами в точках $(0,0)$ и $(0,-9)$ соответственно.

Найдем уравнения их общей внутренней касательной:

$$y = kx + c \text{ и } y = -kx + c, \text{ где (в силу симметрии)}$$

$$\frac{c}{2+9} = -\frac{5}{2} \Rightarrow 2c = -5(2+9) \Rightarrow 2c = -45 \Rightarrow c = -\frac{45}{2}$$

$$k = \operatorname{tg} \alpha; \operatorname{tg} \alpha = \frac{\sqrt{2^2 - 5^2}}{18.5} = \frac{\sqrt{2025 - 1225}}{45} = \frac{\sqrt{800}}{45} = \frac{4\sqrt{2}}{9}$$

Заметим, что, если $-\frac{5}{6a} > \frac{4\sqrt{2}}{9}$ или

$-\frac{5}{6a} < -\frac{4\sqrt{2}}{9}$, то при $\frac{b}{6a} = -\frac{45}{2}$ прямая $y = -\frac{5}{6a}x + \frac{b}{6a}$ бу-

дет пересекать окружности ровно в 4-х точках. Если же $-\frac{5}{6a} \in [-\frac{4\sqrt{2}}{9}, \frac{4\sqrt{2}}{9}]$, то при пересечении одной из окружностей в двух точках прямая $y = -\frac{5}{6a}x + \frac{b}{6a}$ ~~будет~~ не будет пересекать вторую окружность ни в одной точке. А так как прямая пересекать окружность не более, чем в 2-х точках, то и в, так как, то данная в условии система имеет ровно 4 решения мы не найдем.

$$\text{Итак } \begin{cases} -\frac{5}{6a} > \frac{4\sqrt{2}}{9} \\ -\frac{5}{6a} < -\frac{4\sqrt{2}}{9} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a < -\frac{35\sqrt{2}}{48} \\ a > \frac{35\sqrt{2}}{48} \end{cases}$$

Ответ: $a \in (-\infty, -\frac{35\sqrt{2}}{48}) \cup (\frac{35\sqrt{2}}{48}, \infty)$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☒	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Пусть $t = \log_{11} x$, $k = \log_{11}(0,5y)$. Тогда равенства преобразуются к следующему виду:

$$\begin{cases} -t^5 - \frac{6}{t} = -\frac{2}{3t} - 5, \\ k^5 + \frac{1}{k} = -\frac{13}{3k} - 5; \end{cases} \begin{cases} 3t^5 + 15t - 16 = 0, \\ 3k^5 + 15k + 16 = 0. \end{cases}$$

Пусть t_0 — решение уравнения $3t^5 + 15t - 16 = 0$.

Тогда при $t > t_0$ $3t^5 > 3t_0^5$, $15t > 15t_0$, значит $3t^5 + 15t - 16 > 0$.

При $t < t_0$ $3t^5 < 3t_0^5$, $15t < 15t_0$, значит $3t^5 + 15t - 16 < 0$.

Значит, t_0 — единственное решение.

Пусть k_0 — решение уравнения $3k^5 + 15k + 16 = 0$.

Тогда при $k > k_0$ $3k^5 + 15k + 16 > 0$, а при $k < k_0$ $3k^5 + 15k + 16 < 0$, так же аналогично тем, что были ранее. Значит k_0 — единственное решение.

$$\text{Заметим, что } 3(-t_0)^5 + 15(-t_0) = -3t_0^5 - 15t_0 = -16 = 3k_0^5 + 15k_0. \text{ Значит } t_0 = -k_0. \text{ То есть } t_0 + k_0 = 0.$$

$$t_0 = \log_{11} x_0, \quad k_0 = \log_{11}(0,5y_0)$$

$$\log_{11} x + \log_{11}(0,5y) = \log_{11} x \cdot \log_{11}(0,5y) = 0,5xy.$$

$$\text{Значит } x_0 \cdot 0,5y_0 = 11^{t_0 + k_0} = 11^0 = 1$$

$$\text{Значит } x_0 y_0 = 2$$

Так как t_0 и k_0 — единственные решения, то и $x_0 y_0$ — единственное значение xy .

Ответ: 2.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☒	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Заметим, что ~~каждая~~ ^(каждая) пара уравнений $6x + y = a$ равносильно уравнению $y = -6x + a$.

Прямые точки A и B лежат на прямых $y = -6x + a$ и $y = -6x + a + 48$ соответственно.

Парабола ^и $OPQR$ лежит между прямыми $y = -6x$ и $y = -6x + 102$, при этом эти прямые совпадают с прямыми OP и QR . Также верно, что $a \geq 0$ и $a + 48 \leq 102$ ровно 54. При этом для каждой прямой $y = -6x + a$ есть 91 общая точка с $OPQR$, имеющая целые координаты. Так как для каждой прямой $y = -6x + a$ и $y = -6x + a + 48$ мы можем выбрать ^{каждому} a точку, а всего пар ^{точек} A, B — 54, ^{ровно} $54 \cdot 91^2$.

Ответ: $54 \cdot 91^2$

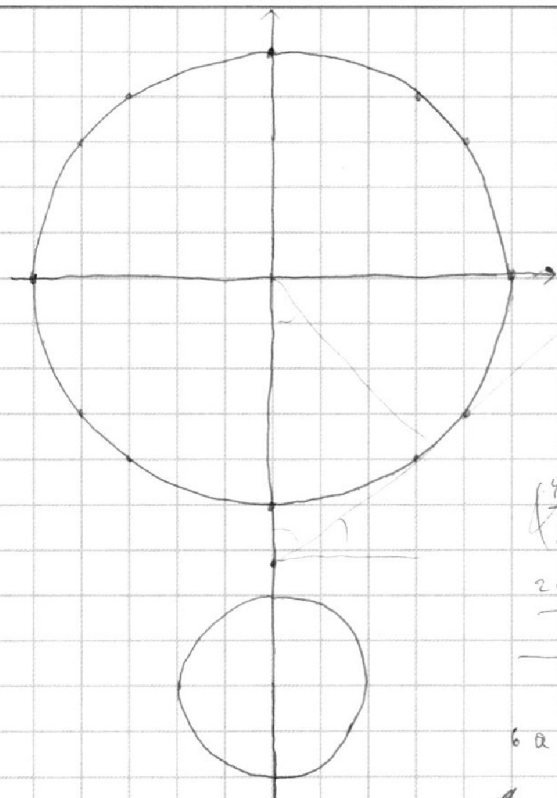
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$5x + 6ay - b = 0$$

$$y = -\frac{5}{6a}x + \frac{b}{6a}$$

$$\frac{x}{5} = \frac{5}{2}$$

$$2x = 5 \cdot 5 = 25 \Rightarrow x = 12.5$$

$$\frac{x}{5-11} = \frac{5}{2} \Rightarrow 2x = 45 - 5x$$

$$7x = 45 \Rightarrow x = \frac{45}{7}$$

$$\frac{45}{7} \cdot \sqrt{\left(\frac{45}{7}\right)^2 - 5^2} = \sqrt{\frac{2025 - 1125}{49}} = \sqrt{\frac{900}{49}} = \frac{30\sqrt{2}}{7}$$

$$\frac{20\sqrt{2}}{7} = \frac{4\sqrt{2}}{7} - \frac{5}{6a} = \frac{4\sqrt{2}}{7}$$

$$6a = -\frac{35}{4\sqrt{2}}$$

$$a \in \left(-\frac{35}{24\sqrt{2}}; \frac{35}{24\sqrt{2}}\right)$$

$$a = \pm \frac{35}{24\sqrt{2}}$$

$$\left(4 - \frac{6}{t}\right) = -\frac{2}{3t} - 5$$

$$\frac{4}{t} = \frac{16}{3t} - 5$$

$$3k^5 + 15k + 16 = 0$$

$$3t^5 + 15t - 16 = 0$$

$$k^4 + \frac{1}{k} = -\frac{13}{3k} - 5$$

$$3t^5 + 15t = 16$$

$$6x + 8 = a$$

$$y = -6x + a$$

$$\begin{array}{r} 102 \\ -48 \\ \hline 54 \end{array}$$

$$0 - 102$$

$$54.91$$

$$\Delta_1 = 30$$

$$\frac{30 \cdot 20}{2} = 300$$

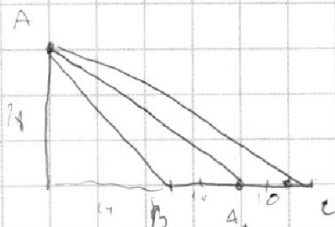
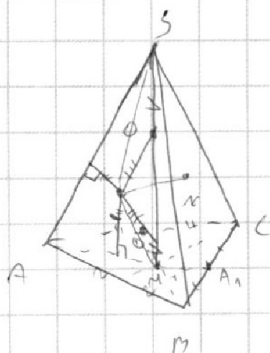
$$\frac{x-20}{2} = 180 \Rightarrow x = 380$$

$$18^2 + 14^2 = 324 + 196$$

$$\sqrt{9^2 + 27^2} = 9\sqrt{10}$$

$$\sqrt{3^2 + 9^2} = 3\sqrt{10}$$

$$20 \cdot 3\sqrt{10} \cdot 9\sqrt{10} = 5400$$





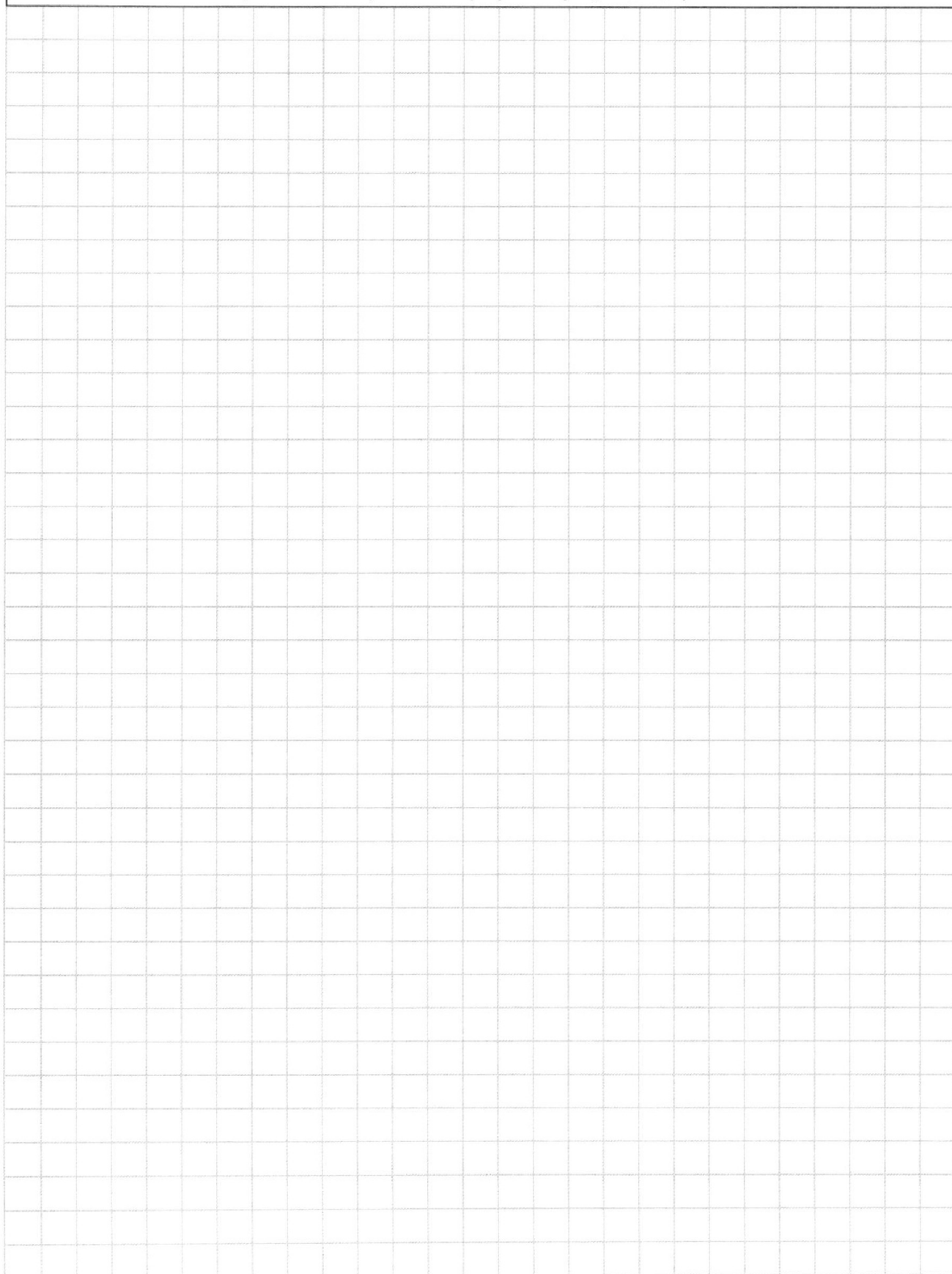
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!





На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

