



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

11 КЛАСС. Вариант 1



1. [4 балла] Натуральные числа a , b , c таковы, что ab делится на $2^9 3^{10} 5^{10}$, bc делится на $2^{14} 3^{13} 5^{13}$, ac делится на $2^{19} 3^{18} 5^{30}$. Найдите наименьшее возможное значение произведения abc .

2. [5 баллов] Дан прямоугольный треугольник ABC . Окружность, касающаяся прямой BC в точке B , пересекает высоту CD , проведённую к гипотенузе, в точке F , а катет AC – в точке E . Известно, что $AB \parallel EF$, $AD : DB = 3 : 1$. Найдите отношение площади треугольника ABC к площади треугольника CEF .

3. [4 балла] Решите уравнение $5 \arcsin(\cos x) = x + \frac{\pi}{2}$.

4. [5 баллов] Найдите все значения параметра a , для каждого из которых найдётся значение параметра b , при котором система уравнений

$$\begin{cases} ax + 2y - 3b = 0, \\ (x^2 + y^2 - 9)(x^2 + y^2 - 12x + 32) = 0 \end{cases}$$

имеет ровно 4 решения.

5. [5 баллов] Некоторые числа x и y удовлетворяют равенствам

$$\log_3^4 x + 6 \log_x 3 = \log_{x^2} 243 - 8 \quad \text{и} \quad \log_3^4(5y) + 2 \log_{5y} 3 = \log_{25y^2} (3^{11}) - 8.$$

Найдите все возможные значения произведения xy .

6. [5 баллов] На координатной плоскости дан параллелограмм с вершинами в точках $O(0; 0)$, $P(-14; 42)$, $Q(6; 42)$ и $R(20; 0)$. Найдите количество пар точек $A(x_1; y_1)$ и $B(x_2; y_2)$ с целыми координатами, лежащих в этом параллелограмме (возможно, на границе) и таких, что $3x_2 - 3x_1 + y_2 - y_1 = 33$.

7. [6 баллов] Дана треугольная пирамида $SABC$, медианы AA_1 , BB_1 и CC_1 треугольника ABC пересекаются в точке M . Сфера Ω касается ребра AS в точке L и касается плоскости основания пирамиды в точке K , лежащей на отрезке AM . Сфера Ω пересекает отрезок SM в точках P и Q . Известно, что $SP = MQ$, площадь треугольника ABC равна 90, $SA = BC = 12$.

а) Найдите произведение длин медиан AA_1 , BB_1 и CC_1 .

б) Найдите двугранный угол при ребре BC пирамиды, если дополнительно известно, что Ω касается грани BCS в точке N , $SN = 4$, а радиус сферы Ω равен 5.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☒	☐	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

N4

a, b, c -кат :

$$ab: 2^9 3^{10} 5^{10}$$

$$bc: 2^{14} 3^{13} 5^{13}$$

$$ac: 2^{19} 3^{18} 5^{30}$$

Рассмотрим степень вхождения 3-ки в a, b и c
 пусть в b она входит в 0 степени $\Rightarrow$ в a хотя бы в 10 (из $ab: 3^{10}$)
 в c хотя бы в 13 (из $bc: 3^{13}$)

$\Rightarrow$ min степ вхождения 3 $0+10+13=23$

пусть в 1 степ $\Rightarrow$ в a хотя бы в ~~10~~ 9 (10-1=9 из $ab: 3^{10}$)
 в c хотя бы в 12 (13-1=12 из $bc: 3^{13}$)

$\Rightarrow$ min степ вхождения 3 $1+9+12=22$

пусть в 2 степ $\Rightarrow$ в a хотя бы в 8 (10-2=8 из $ab: 3^{10}$)
 в c хотя бы в 11 (13-2=11 из $bc: 3^{13}$)

$\Rightarrow$ min степ вхожд 3 $2+8+11=21$

пусть в ≥ 3 степ $\Rightarrow$ в a и c хотя бы в 18 (из $ac: 3^{18}$)

$\Rightarrow$ ~~min степ~~ вхожд $\geq 3+18=21$

$\Rightarrow$ min степень вхожд. 3 - 21

Рассмотрим степень вхождения 2

пусть в b она входит в 0 степени $\Rightarrow$ в a хотя бы в 9 (из $ab: 2^9$)

$\Rightarrow$ min степень вхожд 2: $0+9+14=23$ в c хотя бы в 14 (из $bc: 2^{14}$)

пусть в 1 степени $\Rightarrow$ в a хотя бы в 8 (9-1=8 из $ab: 2^9$)
 в c хотя бы в 13 (14-1=13 из $bc: 2^{14}$)

$\Rightarrow$ min степень вхожд 2: $1+8+13=22$

пусть в 2 степени $\Rightarrow$ в a хотя бы в 7 (9-2=7 из $ab: 2^9$)
 в c хотя бы в 12 (14-2=12 из $bc: 2^{14}$)

$\Rightarrow$ min степень вхожд 2: $2+7+12=21$

пусть в ≥ 3 степени $\Rightarrow$ в a и c хотя бы в 19 (из $ac: 2^{19}$)

$\Rightarrow$ min степень вхожд $\geq 3+19=22$

$\Rightarrow$ min степень вхожд 2 - 21

min степень вхождения 5 в $ac=30$ т.е. $ac: 5^{30} \Rightarrow$

для abc min ст. вхожд $2=21 \Rightarrow abc = 2^{21} \cdot 3^{21} \cdot 5^{30}$

Пример: $a = 2^7 \cdot 3^8 \cdot 5^{10}$ $b = 2^7 \cdot 3^2$ $c = 2^{17} \cdot 3^{11} \cdot 5^{20}$

$\Rightarrow abc = 2^{21} \cdot 3^{21} \cdot 5^{30}$

$ab = 2^9 \cdot 3^{10} \cdot 5^{10} : 2^9 \cdot 3^{10} \cdot 5^{10}$

$ac = 2^{19} \cdot 3^{19} \cdot 5^{30} : 2^{19} \cdot 3^{18} \cdot 5^{30}$

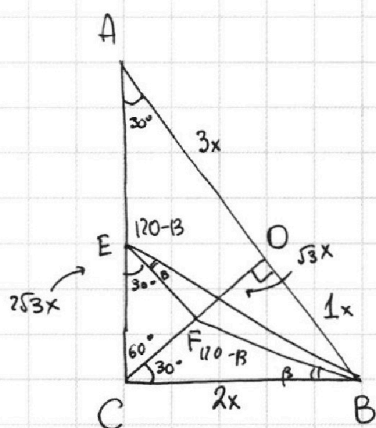
$bc = 2^{14} \cdot 3^{13} \cdot 5^{20} : 2^{14} \cdot 3^{13} \cdot 5^{13}$

Ответ: $2^{21} \cdot 3^{21} \cdot 5^{30}$

1	2	3	4	5	6	7
☐	☒	☒	☐	☐	☐	☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

N2 Чистовик



$$AD:DB = 3:1$$

$$\text{CD - высота в пр. тр.} \Rightarrow CD = \sqrt{AD \cdot DB} = \sqrt{3x^2} = \sqrt{3}x$$

$$\text{в пр. } \triangle OBC \quad CB^2 = OB^2 + OC^2 = 3x^2 + x^2 = 4x^2 \Rightarrow CB = 2x$$

$$\text{в пр. } \triangle APC \quad AC^2 = AD^2 + DC^2 = 9x^2 + 3x^2 = 12x^2 \Rightarrow AC = 2\sqrt{3}x$$

$$\angle BAC = \angle FEC \quad (AB \parallel EF)$$

$$\angle BAC = \angle DCB \quad (\angle BAC + \angle ACD = 90^\circ \text{ в } \triangle ADC, \angle DCB + \angle ACD = 90^\circ \text{ в } \triangle ACB)$$

$$\Rightarrow \angle BAC = \angle FEC = \angle DCB = \alpha$$

$$\text{в } \triangle DBC \quad \sin \alpha = \frac{DB}{CB} = \frac{1}{2} \Rightarrow \alpha = 30^\circ$$

CB - касат. $\Rightarrow \angle FBC = \beta$ - угол между хордой FB и касат. CB

$$\angle FBC = \angle FEB \quad (\angle FEB \text{ опирается на хорду FB})$$

$$\Rightarrow \angle FEB = \beta \Rightarrow$$

$$\angle AEB = 180^\circ - \angle CEB = 180^\circ - (30^\circ + \beta) = 120^\circ - \beta$$

$$\triangle CFB: \angle CFB = 180^\circ - \angle FCB - \angle FBC = 180^\circ - 30^\circ - \beta = 120^\circ - \beta$$

$$\Rightarrow \triangle CFB \sim \triangle AEB \quad \text{по 3-м углам: } \angle FCB = \angle EAB = 30^\circ$$

$$\angle AEB = \angle CFB = 120^\circ$$

$$\angle ABE = \angle FBC$$

$$\Rightarrow \frac{AB}{CB} = \frac{AE}{CF} = \frac{4x}{2x} = 2$$

$$\text{пусть } EC = y \Rightarrow AE = AC - EC = 2\sqrt{3}x - y$$

$$\text{в } \triangle CEF \quad \cos 60^\circ = \frac{CF}{EC} = \frac{1}{2} \Rightarrow CF = \frac{EC}{2} = \frac{y}{2} \Rightarrow$$

$$\frac{AE}{CF} = \frac{2\sqrt{3}x - y}{y/2} = 2 \Rightarrow$$

$$2\sqrt{3}x - y = y \Rightarrow 2\sqrt{3}x = 2y \Rightarrow y = \sqrt{3}x \Rightarrow$$

$$EC = \sqrt{3}x \Rightarrow \text{в } \triangle ECF \quad CF = \frac{EC}{2} = \frac{\sqrt{3}x}{2} \Rightarrow EF = \frac{3}{2}x$$

$$S_{ABC} = \frac{CB \cdot AC}{2} = \frac{2x \cdot 2\sqrt{3}x}{2} = 2\sqrt{3}x^2$$

$$S_{CEF} = \frac{CF \cdot EF}{2} = \frac{\frac{3}{2}x \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}x}{2} = \frac{3\sqrt{3}}{8}x^2$$

$$\Rightarrow \frac{S_{ABC}}{S_{CEF}} = \frac{2\sqrt{3}x^2}{\frac{3\sqrt{3}}{8}x^2} = \frac{16}{3}$$

$$= \frac{16}{3}$$

$$\text{Ответ } \frac{16}{3}$$

1 ☐ 2 ☐ 3 ☒ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

N3

$$5 \arcsin(\cos x) = x + \frac{\pi}{2}$$

$$\arcsin(\cos x) = \frac{x}{5} + \frac{\pi}{10} \Rightarrow$$

$$\frac{x}{5} + \frac{\pi}{10} \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \Rightarrow \frac{x}{5} \in \left[-\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{10}, \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{10}\right]$$

$$\arcsin(\cos x) = \frac{x}{5} + \frac{\pi}{10} \quad | \sin$$

$$\cos x = \sin\left(\frac{x}{5} + \frac{\pi}{10}\right)$$

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin\left(\frac{x}{5} + \frac{\pi}{10}\right) \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} \frac{\pi}{2} - x = \frac{x}{5} + \frac{\pi}{10} + 2\pi k \\ \frac{\pi}{2} - x = \pi - \left(\frac{x}{5} + \frac{\pi}{10}\right) + 2\pi k \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} \frac{6x}{5} = \frac{4}{10}\pi + 2\pi k \\ \frac{4x}{5} = -\frac{4}{10}\pi + 2\pi k \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} \frac{6x}{5} = \frac{4}{10}\pi + 2\pi k \\ \frac{4x}{5} = -\frac{4}{10}\pi + 2\pi k \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\frac{x}{5} = \frac{\pi}{15} + \frac{\pi k}{3}$$

$$\frac{x}{5} = -\frac{\pi}{10} + \frac{\pi k}{2}$$

$$x = -\frac{6\pi}{10} = -\frac{3\pi}{5}$$

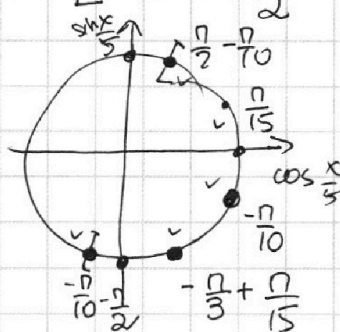
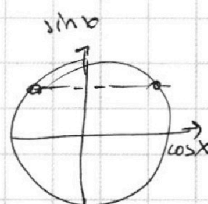
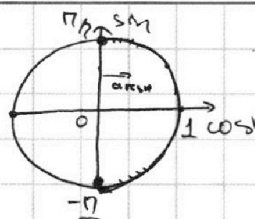
$$x = -\frac{4\pi}{15}$$

$$x = -\frac{\pi}{10}$$

$$x = \frac{\pi}{15}$$

$$x = \frac{4\pi}{10} = \frac{2\pi}{5}$$

Ответ: $-\frac{3\pi}{5}, -\frac{4\pi}{15}, -\frac{\pi}{10}, \frac{\pi}{15}, \frac{2\pi}{5}$



Проверка:

$$\frac{\pi}{15} - \frac{2\pi}{3} = -\frac{\pi}{10} - \frac{\pi}{2}$$

$$\frac{1}{15} - \frac{10}{15} = -\frac{1}{10} - \frac{5}{10}$$

$$-\frac{9}{15} = -\frac{6}{10}$$

$$-90 = -90$$

$$\frac{\pi}{15} + \frac{\pi}{3} = \frac{6\pi}{15}$$

$$= \frac{2\pi}{5}$$

$$= \frac{4\pi}{10} = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{10}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☒ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

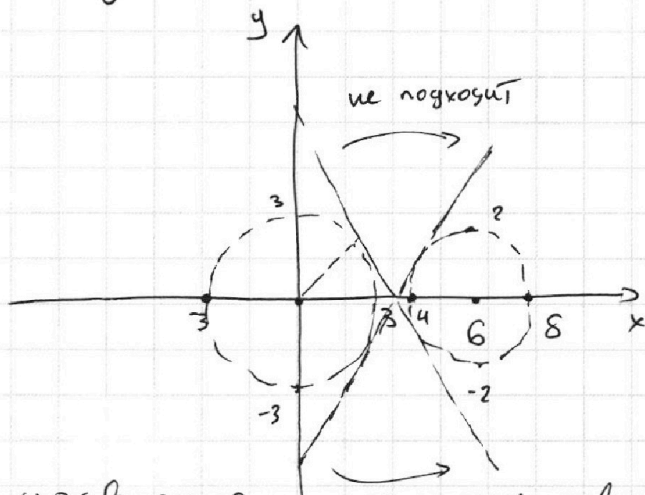


№4

1ая страница

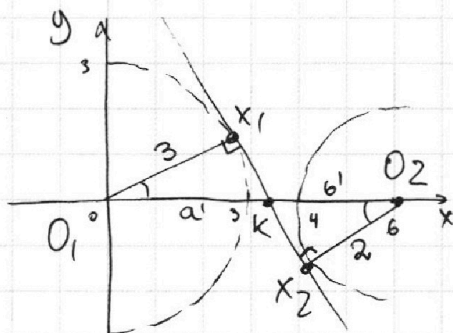
$$\begin{cases} ax+2y-3b=0 \\ (x^2+y^2-9)(x^2+y^2-12x+32)=0 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} x^2+y^2-9=0 &\Leftrightarrow x^2+y^2=9=3^2 \text{ ур-ие окружности} \\ x^2+y^2-12x+32=0 &\Leftrightarrow x^2-12x+36+y^2=4 \Leftrightarrow (x-6)^2+y^2=2^2 \\ &\text{ур-ие окр.} \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} ax+2y-3b=0 &\leftarrow \text{прямая} \\ y &= -\frac{a}{2}x + \frac{3b}{2} \\ &\uparrow \\ &\text{наклон} \end{aligned}$$

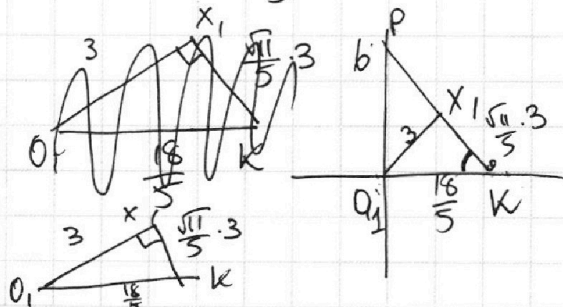
уравнение может иметь ровно 4 решения, когда
прямая пересекает две окружности в 2-х точках $\Rightarrow$
каждую окружность в 2-х точках



$$\begin{aligned} \text{треугольники подобны} &\Rightarrow \triangle O_1X_1K \sim \triangle KO_2X_2 \\ \frac{O_1X_1}{O_2X_2} &= \frac{a'}{b'} = \frac{3}{2} \Rightarrow a' = \frac{3}{2}b' \\ a' + b' &= 6 \\ \frac{3}{2}b' + b' &= 6 \Rightarrow b' = \frac{12}{5} \Rightarrow a' = \frac{18}{5} \end{aligned}$$

$\Rightarrow$ прямая проходит через точку $\left(\frac{18}{5}, 0\right) \Rightarrow$

$$0 = -\frac{a}{2} \cdot \frac{18}{5} + \frac{3}{2}b \Rightarrow \frac{18}{10}a = \frac{3}{2}b \Rightarrow a = \frac{15}{18}b$$



$$\begin{aligned} \triangle PKO_1 &\sim \triangle X_1KO_2 \Rightarrow \frac{PK}{X_1K} = \frac{KO_1}{KO_2} \\ \frac{PK}{X_1K} &= \frac{KO_1}{KO_2} \Rightarrow \frac{PK}{X_1K} = \frac{3}{2} \\ \frac{PK}{X_1K} &= \frac{3}{2} \Rightarrow PK = \frac{3}{2}X_1K \\ PK &= \frac{3}{2} \cdot \frac{12}{5} = \frac{18}{5} \\ a &= \frac{15}{18}b = \frac{15}{18} \cdot \frac{18}{5} = \frac{15}{5} = 3 \end{aligned}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

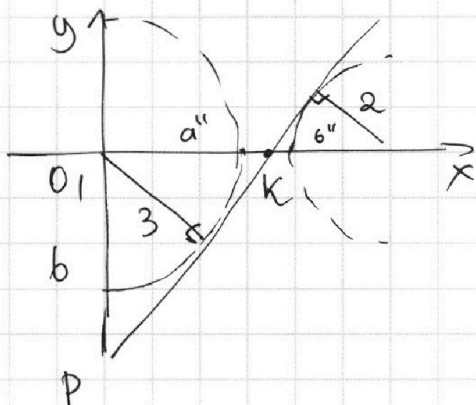
1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☒ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



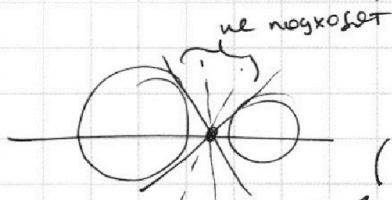
N4



2ая страница
аналогично $a'' = \frac{15}{5}$ $b'' = \frac{18}{5}$
(картинка симметрична относительно оси OX)

$$\Rightarrow b = -\frac{18}{\sqrt{11}} \quad a = -\frac{15}{\sqrt{11}}$$

$\Rightarrow$ не подходят прямые ~~и~~ между касательными
т.е. могут пересечь так
одну окружность



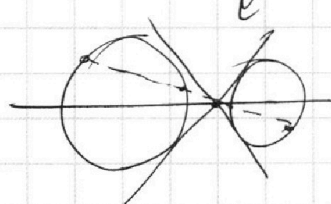
где них $a \in \left[-\frac{15}{\sqrt{11}}, \frac{15}{\sqrt{11}}\right)$ $a \in \left[\frac{15}{\sqrt{11}}, +\infty\right)$
 $a \in \left(-\infty, -\frac{15}{\sqrt{11}}\right]$

Ответ: ~~$\left(-\frac{15}{\sqrt{11}}, \frac{15}{\sqrt{11}}\right)$~~ ~~$\left(-\frac{18}{\sqrt{11}}, \frac{18}{\sqrt{11}}\right)$~~

$$\frac{56}{18} = \frac{3 \cdot 5}{3 \cdot \sqrt{11}} \Rightarrow b = \frac{18}{\sqrt{11}}$$

$$a = \frac{15}{18} b = \frac{15}{18} \cdot \frac{18}{\sqrt{11}} = \frac{15}{\sqrt{11}}$$

все
оставшиеся
подходят



На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7
☐ ☐ ☐ ☐ ☒ ☐ ☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



2ая страница

$$\frac{(a^2+b^2)(a-b)ab}{a^4b - a^3b^2 + a^2b^3 - a^6b^4} = \frac{a^4}{b^4} - \frac{a^3}{b^3} + \frac{a^2}{b^2} - \frac{a}{b} = t^4 - t^3 + t^2 - t = t^3(t-1)(t+1)$$

$$= t(t^2+1)(t-1)$$

Рассмотрим уравнение $t^4 + 8 + \frac{7}{2}t = 0$

для него $\log_3 x$ и $-\log_3 y$ являются корнями

$\Rightarrow \log_3 x$ и $\log_3 y$ являются корнями $t^4 + 8 + \frac{7}{2}t = 0$

$\log_3 x$ и $-\log_3 y$ являются корнями $t^4 + 8 + \frac{7}{2}t = 0$

замечим, что при $t \geq 0$ $t^4 \geq 0$, $8 + \frac{7}{2}t > 0 \Rightarrow$

$t^4 + 8 + \frac{7}{2}t > 0 \Rightarrow$ не является корнем $\Rightarrow$

$$\begin{cases} \log_3 x < 0 \\ -\log_3 y < 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \log_3 x < 0 \\ \log_3 y > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \log_3 x < \log_3 y \\ \log_3 y > \log_3 x \end{cases}$$

пусть $\log_3 y = a$ $\log_3 x = b \Rightarrow$

$b < 0, a > 0$

перепишем II вар через a и b

$2(a^2+b^2)(a-b) \cdot a \cdot b - 7 = 0 \Rightarrow$

$(a^2+b^2)(a-b) \cdot a \cdot b = \frac{7}{2}$, но

$a^2+b^2 > 0$ т.ч. $\begin{cases} a^2 > 0 \\ b^2 > 0 \end{cases}$

$a-b > 0$ т.ч. $\begin{cases} a > 0 \\ -b > 0 \end{cases} \Rightarrow$

$a > 0$
 $b < 0$

$(a^2+b^2)(a-b) \cdot a \cdot b < 0 \Rightarrow$
 не может быть
 равно $\frac{7}{2} \Rightarrow$

этот вариант не имеет
 решений $\Rightarrow$
 только I вар

Ответ: $\frac{1}{5}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☒	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

N5

1ая страница

$$\begin{cases} \log_3^4 x + 6 \log_x 3 = \log_{x^2} 243 - 8 \\ \log_3^4(5y) + 2 \log_{5y} 3 = \log_{25y^2} (3'') - 8 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \log_3^4 x + 8 + 6 \log_x 3 - \frac{5}{2} \log_x 3 = 0 \\ \log_3^4(5y) + 8 + 2 \log_{(5y)} 3 - \frac{11}{2} \log_{5y} 3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} \log_3^4 x + 8 + \frac{7}{2} \log_x 3 = 0 \quad (1) \\ \log_3^4(5y) + 8 - \frac{7}{2} \log_{5y} 3 = 0 \quad (2) \Rightarrow \log_3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \log_3^4 x + 8 + \frac{7}{2} \log_x 3 = 0 \quad (1) \\ \log_3^4(5y) + 8 - \frac{7}{2} \log_{5y} 3 = 0 \quad (2) \Rightarrow \log_3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \log_3^4 x + 8 + \frac{7}{2} \log_x 3 = 0 \quad (1) \\ \log_3^4(5y) + 8 - \frac{7}{2} \log_{5y} 3 = 0 \quad (2) \Rightarrow \log_3 \end{cases}$$

для уравнения $t^4 + \frac{7}{2} \frac{1}{t} + 8 = 0$ $\log_3 x$ и $-\log_3 5y$ являются корнями

по теореме Виета произведение корней $= -\frac{7}{2}$

$$\log_3^4(5y) - \log_3^4 x - \frac{7}{2} \left(\frac{1}{\log_3 5y} + \frac{1}{\log_3 x} \right) = 0$$

$$(\log_3^2(5y) + \log_3^2 x) (\log_3(5y) + \log_3 x) (\log_3(5y) - \log_3 x) - \frac{7}{2} \frac{\log_3 x + \log_3 5y}{\log_3 5y \cdot \log_3 x} = 0$$

$$(\log_3 5y + \log_3 x) \left((\log_3^2(5y) + \log_3^2 x) (\log_3 5y - \log_3 x) - \frac{7}{2 (\log_3 5y \cdot \log_3 x)} \right) = 0$$

$$\Rightarrow \log_3 5y \cdot x = 0 = \log_3 1$$

$$\begin{cases} 2(\log_3^2 5y + \log_3^2 x) (\log_3 5y - \log_3 x) \log_3 5y \log_3 x - 7 = 0 \Leftrightarrow \\ \log_3 5y \neq 0 \\ \log_3 x \neq 0 \end{cases}$$

I вар:

$$5xy = 1 \Rightarrow xy = \frac{1}{5}$$

II вар $\log_3 5y = a$ $\log_3 x = b \Rightarrow (a^2 + b^2)(a - b)ab - \frac{7}{2} = 0$
 $a \neq 0$ $b \neq 0$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

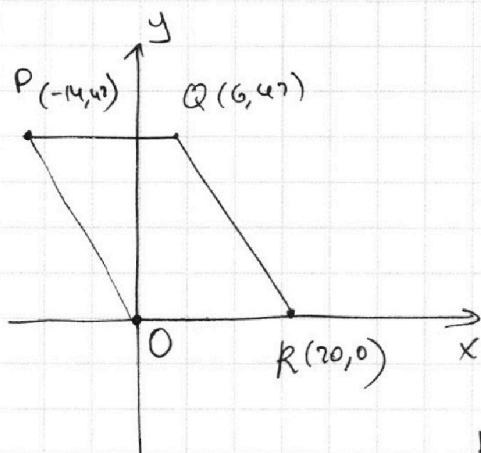
1 2 3 4 5 6 7

☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☒ ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

N 6



где точки $A(x_1, y_1)$ $B(x_2, y_2)$:

$$3x_2 - 3x_1 + y_2 - y_1 = 33$$

~~42 48 47 43~~

9/2/23

① nycmb $y_1 = y_2 \Rightarrow 3(x_2 - x_1) = 33 \Rightarrow$

$$x_2 - x_1 = 1 \quad \begin{array}{c} \bullet \text{-----} \bullet \\ x_1 \quad 1 \quad x_2 \end{array} \Rightarrow$$

ка отрезке OR находится 10 точек
пар $(0,0)$ и $(11,0)$ — $(9,0)$ и $(20,0)$

Прямая PO пересекает 15 узловых точек

$$11.2 \quad \nabla \cdot \mathbf{A} = 0$$

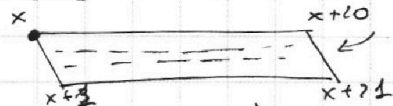
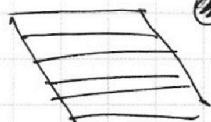
$\frac{y}{x} = -\frac{1}{3} \Rightarrow y = -\frac{1}{3}x$ - y-achse

и у-улов

для прямой $PO: y = -3x \Rightarrow$ если x - целое $\Rightarrow y : 3 \Rightarrow$

от 0 до 42 15 чисел $\therefore 3 \Rightarrow$ где каждой из таких точек можно построить прямую // OX , где которой будет 10 парходящих пар $\Rightarrow$ всего $15 \cdot 10 = 150$ пар.

$\Rightarrow$ Все секторы агентами (всего 14)



где двух прямых $110X$
еще по 9 пар $\Rightarrow$ всего
 $2 \cdot 9 \cdot 14 = 252$ пар

$$\text{nyumb } y_2 - y_1 + 0 \Rightarrow \underset{3}{3}(x_2 - x_1) + \underset{3}{y_2 - y_1} = \underset{3}{33} \Rightarrow y_2 - y_1 : 3 \Rightarrow$$

$y_2 - y_1$ может быть $\pm 3, \pm 6, \pm 9, \pm 12, \pm 15, \pm 18, \dots, \pm 39, \pm 42$ (max ~~42~~)
 $y_2 - y_1 = 42$

$\Rightarrow$ если y_2 находится на одной из прямых $110x$ из (1)
 $\Rightarrow y_2$ тоже находится на одной из таких прямых
 аналогично

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

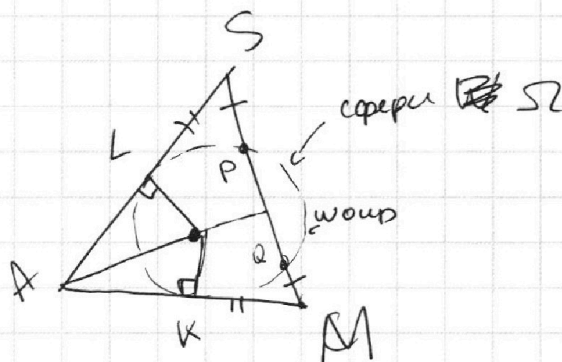
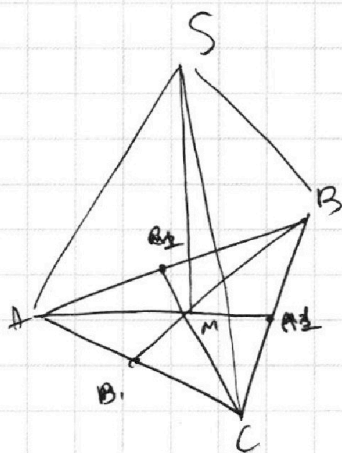
Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

[illegible]

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

N7



$$SA \cdot BC = 90$$
$$SA = BC = 12$$

сечение торуса M отн окруж W : $MQ \cdot MP = MK^2$
 сечение торуса S отн окруж W : $SP \cdot SQ = SL^2$

Смещение точки S от опоры W: $SP - SQ = SL^2$

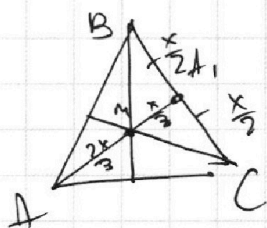
$$SP = MQ \Rightarrow SP + PQ = MQ + PQ \Rightarrow SQ = MP \Rightarrow$$

$$MQ \cdot MP = SP \cdot SQ \Rightarrow MK^2 = SL^2 \Rightarrow MK = SL$$

$$AK = AL \text{ (отр. кацат)} \Rightarrow AK + KM = AL + LS \Rightarrow$$

$$AM = KS \Rightarrow$$

$$AM = BC = x$$



медусами делится точкой пересечения
в отношении 2:1

$$\Rightarrow m_{A_1} = \frac{x}{3}, A_1 C = \frac{x}{2} \Rightarrow$$

$$AC = 6, \quad MA_1 = 4$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

 a, b, c

Черновик

ab : 2⁹ 3¹⁰ 5¹⁰

bc 2¹⁴ 3¹³ 5¹³

$$ac: 2^{19} 3^{18} 5^{30}$$

acb

$$3^{18} 5^{30} 2^{19}$$

al

ab: $2^9 3^{10} 5^{10}$

3 3¹⁰
3⁴ 3⁹
60 12 14 13 13
3 5

3¹⁸ 5³⁰ 2¹⁴ 3³ 2²

3⁶ 3⁴

ac 3¹⁸

26 18

$$3^8 3^2$$

$3^3 \quad 3^0$

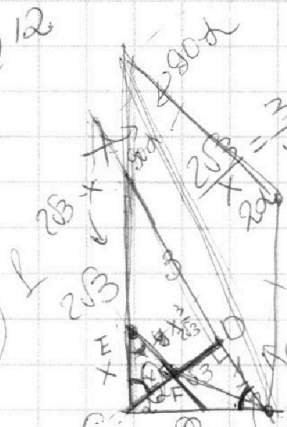
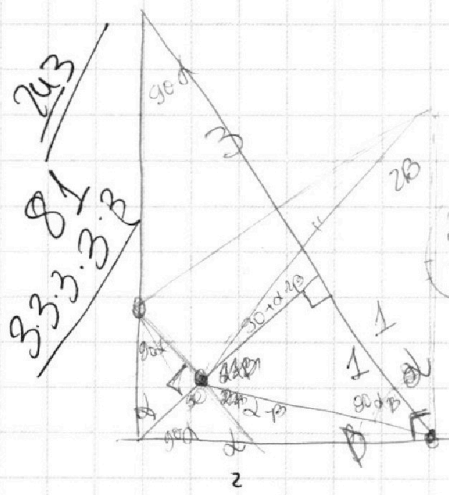
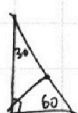
$3^2 \quad 3^8$

323

3^3 2^2

$$\begin{array}{cc} 2^2 & 2^7 \\ 2^2 & 2^{12} \\ 2^2 & \end{array}$$

a^5
 c^5
 $3x^2 - 3x + 1$
 $4x^2 - 3x$



$\frac{AC}{CB} = \frac{CD}{DB} = \frac{3x}{x} = \frac{EF}{CF}$

$$CD = \frac{\sqrt{3}x}{2} = \frac{\sqrt{3} \cdot \frac{3}{2}}{2} = \frac{3\sqrt{3}}{4}$$

$$\frac{2}{\sqrt{3}} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$x^2 \cdot x^{\frac{3}{2}} = x^{\frac{7}{2}}$$



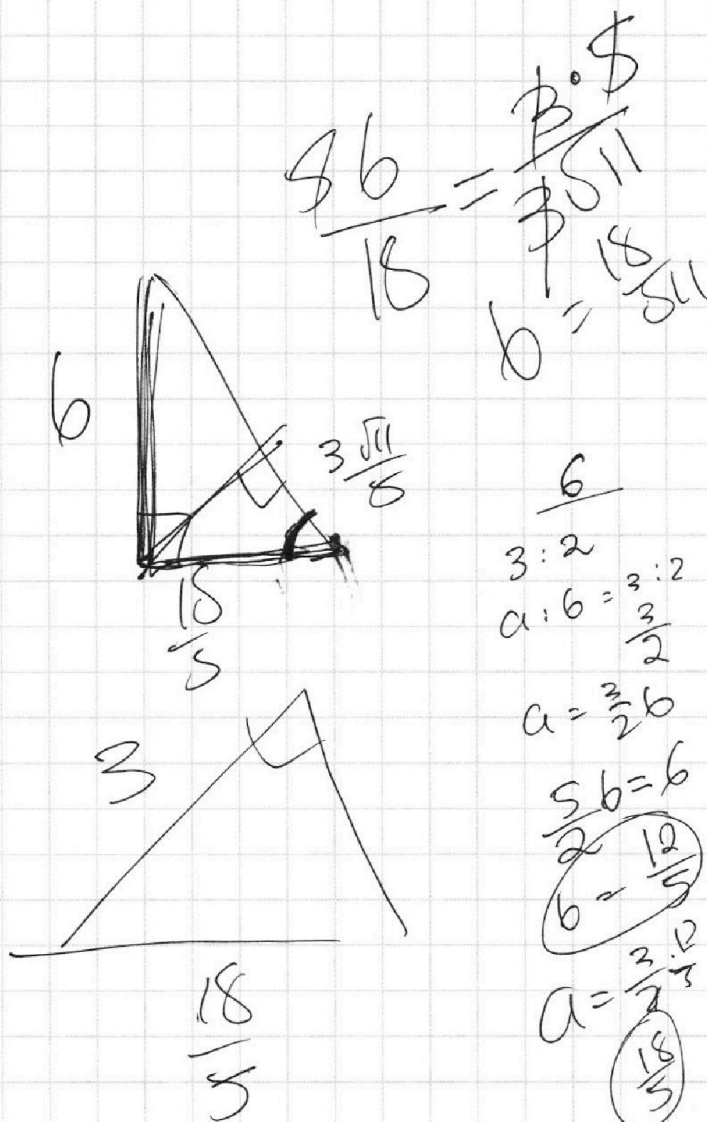
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



Handwritten calculations:

$$\frac{374}{75}$$
$$\frac{13 \cdot 9 \cdot 25}{50^2 \cdot 8}$$
$$\frac{225}{99}$$

Handwritten calculation:

$$\frac{11 \cdot 9}{3011}$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

2/100

$$2(a^2+b^2)(a-b)ab-7=0$$

$$a^2+b^2(a-b)ab = \frac{7}{2}$$

$$+^4+8+\frac{7}{+}=0$$

$$+^5+8+7=0$$

$$+^7+8+7 < 0$$

$$\log_8 x < 0$$

$$0 < x < 1$$

$$\log_8 5y > 0$$

$$5y > 1$$

$$y > \frac{1}{5}$$

$$9 + \frac{11 \cdot 9}{25}$$

$$\frac{4 \cdot 25}{225}$$

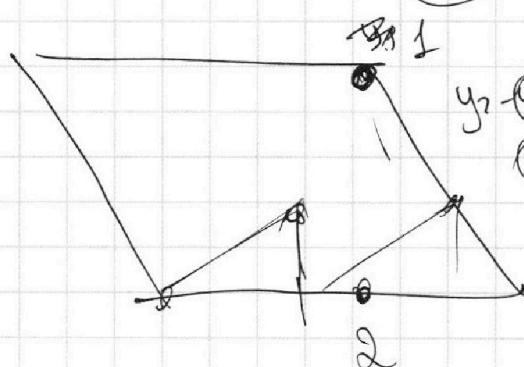
$$9y +$$

$$\frac{225}{9y}$$

$$324$$

$$\frac{18}{718}$$

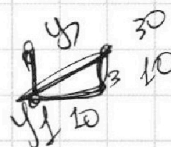
$$\frac{16}{37}$$



$$y_2 - y_1 = -42$$

$$42$$

$$y_2 - y_1 = 42$$



$$42$$

$$33 + 42$$

$$75$$

$$25$$

$$39$$

$$72$$

$$24$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\log_3^4 x + 8 + \frac{7}{2} \log_3 x^3 = 0$$

$$\log_3^4 (5y) + 8 - \frac{7}{2} \log_3 y^3 = 0$$

$$t^5 + 8t - \frac{7}{2} = 0$$

$$\log_3 (5y) = -\log_3 x$$

$$t^4 + 8 - \frac{7}{2} = 0$$
$$2t^5 + 16t - 7 = 0$$

полюс

$$(x-x_1)(x-x_2) \dots (x-x_n)$$

$$x_1 \cdot x_2 \dots x_n = \frac{7}{2}$$

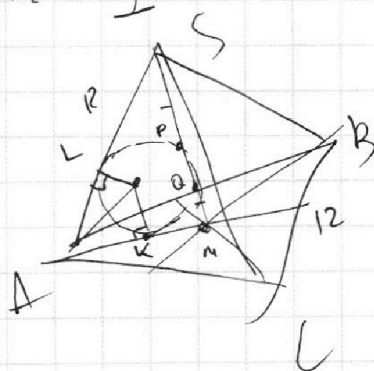
$$x_1 x_2 x_3 x_4 + \dots = 16$$

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0$$

$$\log_3 \frac{5y_1}{x_1 y_2} = 0 = \log_3 1$$

$$y_1 \dots = x_1 \dots y_2$$

$$5y_1 y_2 x_1 x_2 = 1$$





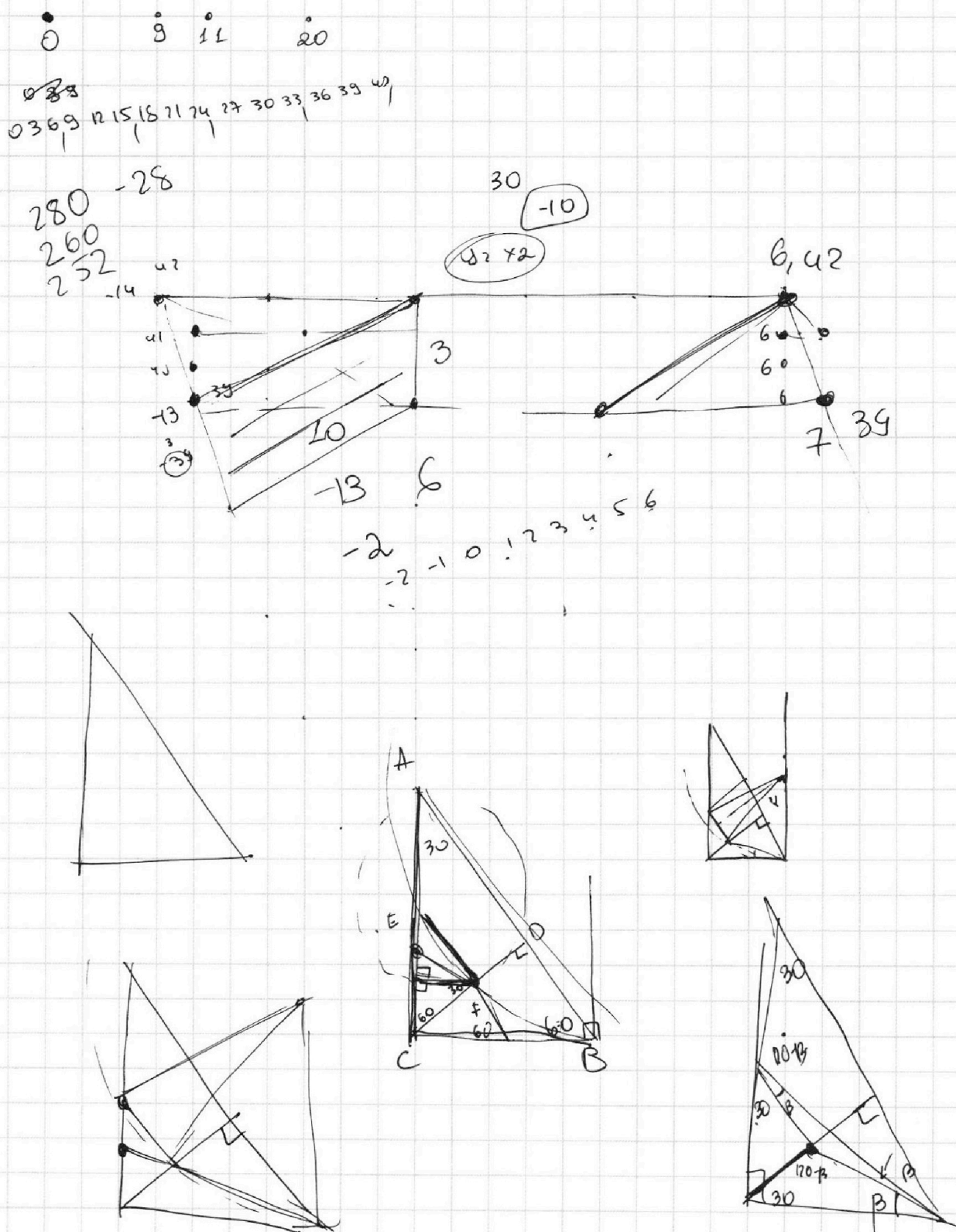
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

[illegible]

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



N1

a, b, c - ham : $ab : 2^9 3^{10} 5^{10}$
 $bc : 2^{14} 3^{13} 5^{13}$ $\Rightarrow ac \geq 2^{19} 3^{18} 5^{30} \Rightarrow abc \geq 2^{19} \cdot 3^{18} \cdot 5^{30}$
 $ac : 2^{19} 3^{18} 5^{30}$

$\Rightarrow$ min степень входящая 2_{ab} abc это 19, 3_{ac} это 18, 5_{bc} это 30
 пусть степень входящая 3_{ab} $\neq 2 \Rightarrow$ b а она должна быть
 хотя бы $10 - 2 = 8$ (из $ab: 2^{10}$) b с она должна быть хотя бы
 ~~$11 - 2 = 9$ (из $bc: 2^{11}$)~~ $\Rightarrow$ b а с хотя бы ~~$12 + 13 = 25$~~ $\Rightarrow$
 $13 - 2 = 11$ $11 + 8 = 19 > 18$

пусть степень вхождения $366 > 2 \Rightarrow$

abc

$$\boxed{2^{19} \quad \underline{3^{18}} \quad 5^{30}}$$

$$\underline{3^{10}} \quad \underline{3^{13}}$$



0 10 + 13

$19 + 12$

$2/8 + 1/1$

3 7 10

18

u 1.8

$$0 \leq t + 9 + 5 + 7$$

$$8 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots$$

$$(5x-x)(4x-x)(3x-x)(2x-x)(1x-x)$$

$$0 = \log_5 8 + \log_5 2 - \log_5 m$$

53 98
18 TS 08
2t
Et
29 n9
22
22
22
21 91
6 8

random

$$S.D = \frac{1}{2}$$
$$d = 60$$

$$0 = \frac{2}{7} + 8 + 47$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$ax + 2y - 36 = 0$$

$$(x^2 + y^2 - 9)(x^2 + y^2 - 12x + 32) = 0$$

$$x^2 + y^2 = 9$$

$$x^2 - 12x + 36 + y^2 - 4 = 0$$

$$(x - 6)^2 + y^2 = 4$$

$$2(a^2 + b^2)(a - b)ab - 7 = 0$$

$$(a^3 - a^2b + ab^2 - b^3)ab$$

$$a^4b - a^3b^2 + a^2b^3 - ab^4 = 7$$

$$a^4b - a^3b^2 + a^2b^3 - ab^4 - 7 = 0$$

$$0 = \frac{2}{7} \log_3 x + \log_3 y$$

$$\log_3^2 (xy) + \log_3 x$$

$$\log_3^4 (xy) - \log_3^4 x - \log_3^4 y = 0$$

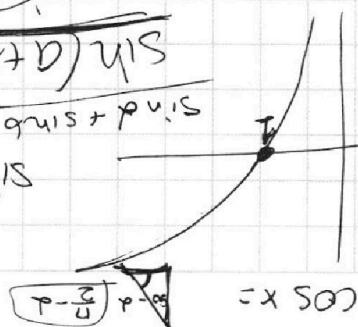
$$\log_3^5 m + 78 \log_3 m + \frac{7}{2} = 0$$

$$\log_3 x \cdot \log_3 y = \frac{7}{2}$$

$$\log_3 x \cdot \log_3 y = \frac{7}{2}$$

$$\sin(a+b) = 2 \sin a \cos b$$

$$\sin(a+b) = 2 \sin a \cos b$$



$$\cos x = \sin(90 - x)$$

$$\log_3 x$$

$$y > \frac{1}{5}$$

$$\frac{2}{6}$$

$$\sin(30+60) = \sin 90 = 1$$