



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

11 КЛАСС. Вариант 2



1. [4 балла] Натуральные числа a, b, c таковы, что ab делится на $2^7 3^{11} 5^{14}$, bc делится на $2^{13} 3^{15} 5^{18}$, ac делится на $2^{14} 3^{17} 5^{43}$. Найдите наименьшее возможное значение произведения abc .
2. [5 баллов] Дан прямоугольный треугольник ABC . Окружность, касающаяся прямой AC в точке A , пересекает высоту CD , проведённую к гипотенузе, в точке E , а катет BC – в точке F . Известно, что $AB \parallel EF$, $AB : BD = 1,3$. Найдите отношение площади треугольника ACD к площади треугольника CEF .
3. [4 балла] Решите уравнение $5 \arccos(\sin x) = \frac{3\pi}{2} + x$.
4. [5 баллов] Найдите все значения параметра a , для каждого из которых найдётся значение параметра b , при котором система уравнений

$$\begin{cases} x + 3ay - 7b = 0, \\ (x^2 + 14x + y^2 + 45)(x^2 + y^2 - 9) = 0 \end{cases}$$

имеет ровно 4 решения.

5. [5 баллов] Некоторые числа x и y удовлетворяют равенствам

$$\log_7^4(6x) - 2 \log_{6x} 7 = \log_{36x^2} 343 - 4, \quad \text{и} \quad \log_7^4 y + 6 \log_y 7 = \log_{y^2} (7^5) - 4.$$

Найдите все возможные значения произведения xy .

6. [5 баллов] На координатной плоскости дан параллелограмм с вершинами в точках $O(0; 0)$, $P(-17; 68)$, $Q(2; 68)$ и $R(19; 0)$. Найдите количество пар точек $A(x_1; y_1)$ и $B(x_2; y_2)$ с целыми координатами, лежащих в этом параллелограмме (возможно на границе) и таких, что $4x_2 - 4x_1 + y_2 - y_1 = 40$.
7. [6 баллов] Дана треугольная пирамида $SABC$, медианы AA_1 , BB_1 и CC_1 треугольника ABC пересекаются в точке M . Сфера Ω касается ребра AS в точке L и касается плоскости основания пирамиды в точке K , лежащей на отрезке AM . Сфера Ω пересекает отрезок SM в точках P и Q . Известно, что $SP = MQ$, площадь треугольника ABC равна 60, $SA = BC = 10$.
 - а) Найдите произведение длин медиан AA_1 , BB_1 и CC_1 .
 - б) Найдите двугранный угол при ребре BC пирамиды, если дополнительно известно, что Ω касается грани BCS в точке N , $SN = 3$, а радиус сферы Ω равен 4.



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☒	☐	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

✱

Заметим, что

$$ab \geq 2^2 \cdot 3^{11} \cdot 5^{14}$$

2, 3, 5 - попарно
взаимно-просты

$$bc \geq 2^{13} \cdot 3^{15} \cdot 5^{16}$$

$$ac \geq 2^{14} \cdot 3^{17} \cdot 5^{13}$$

$$(abc)^2 \geq 2^7 \cdot 3^{11} \cdot 5^{14} \cdot 2^{13} \cdot 3^{15} \cdot 5^{16} \cdot 2^{14} \cdot 3^{17} \cdot 5^{13} =$$
$$= 2^{34} \cdot 3^{43} \cdot 5^{45}$$

т.е. $abc \geq 2^{17} \cdot 3^{\frac{43}{2}} \cdot 5^{\frac{45}{2}}$

$a, b, c \in \mathbb{N}$, то наименьшее произведение
такого натурального числа, множителем
которого имеют натуральные степени

$$\left\lceil \frac{43}{2} \right\rceil + 1 = 22$$

$$\left\lceil \frac{45}{2} \right\rceil + 1 = 23$$

$$abc \geq 2^{17} \cdot 3^{22} \cdot 5^{23}$$

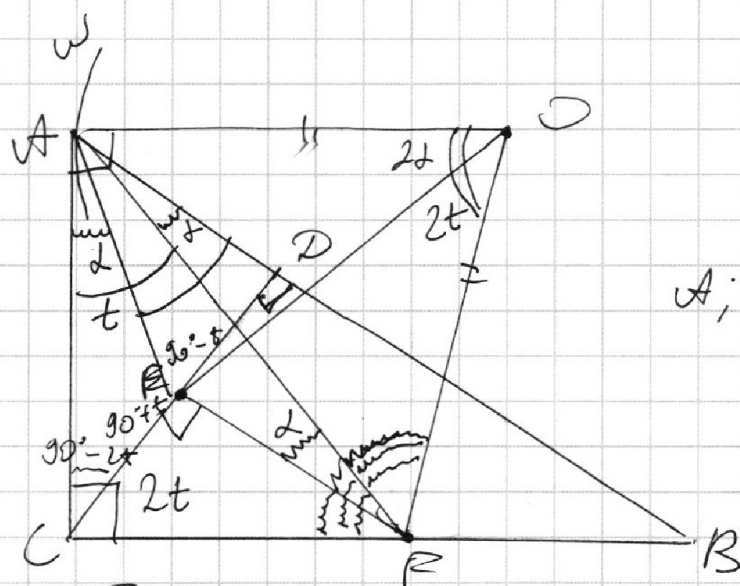
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ



Телескоп

Darew

СД - высота

A, E, F - на отрезке OC

$$\frac{AB}{BD} = \frac{13}{10}$$

EF // AB

Hauten

$$\frac{S(ACD)}{S(CBF)}$$

1) $\text{Tyer } AB = 13x$

$$h_2 = 10x$$

Proz. $AD = 13x - 10x = 3x$

2) т.к. скр. ω касается AC , то $AO \perp AC$, $\angle C = 90^\circ$

Значит, $AO \perp CB$

3) $EO = OR = AO$ - радиусы, AR - хорда

4) $\text{Sty cr} \quad \angle A \quad \angle CAE = \alpha$

$\subset AFE = \mathcal{L}$ (no d-by g via energy react. & appear)

$\angle AOE$ - центральный, $\angle AOE = 2\angle$

5) $\Delta \text{PyCTB} < \text{CAF} = t$, тогда,

$\angle AOK = 2t$ (по св-ву угла между касательной и хордой)

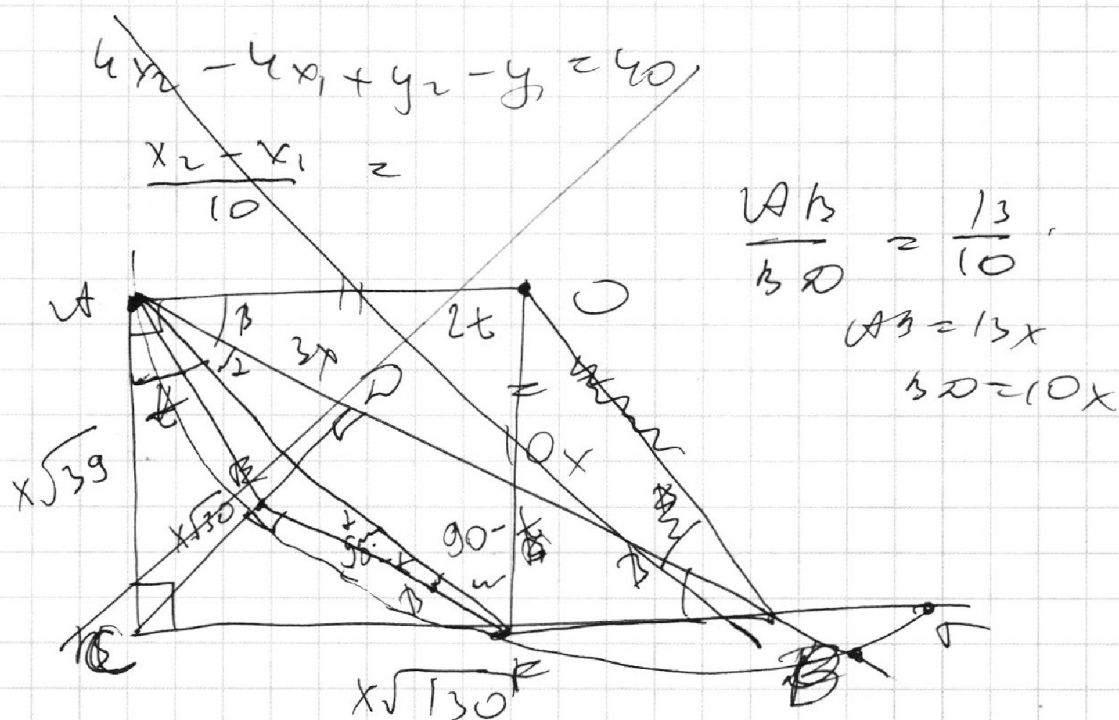
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☒	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$\mu_{OY} = \frac{140^\circ - 2z}{2} = 90^\circ - z$
 $\angle CFA = 90^\circ - z$ и $\triangle ACF$ - прямоугольный.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☒	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$5 \arccos(\sin x) = \frac{3\pi}{2} + x$$

$$x \in \mathbb{R}, \text{ т.к. } -1 \leq \sin x \leq 1$$

$$5 \arccos(\sin x) = 3(\arcsin(\sin x) + \arccos(\sin x)) + x$$

$$2 \arccos(\sin x) = 4x$$

$$\arccos(\sin x) = 2x$$

$$\begin{cases} \cos 2x = \sin x \\ 0 \leq 2x \leq \pi \end{cases}$$

$$\begin{cases} 1 - 2\sin^2 x = \sin x \\ 0 \leq 2x \leq \pi \\ \sin x = t \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2\sin^2 x + \sin x - 1 = 0 \\ 0 \leq x \leq \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2t^2 + t - 1 = 0 \\ (0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}) \quad t \geq 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} t = -1 \\ t = \frac{1}{2} \\ t \geq 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \begin{cases} \sin x = -1 \\ \sin x = \frac{1}{2} \\ 0 \leq x \leq \frac{\pi}{2} \end{cases} \\ \begin{cases} x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n \\ x = \frac{\pi}{6} + 2\pi n \\ 0 \leq x \leq \frac{\pi}{2} \end{cases} \end{cases}$$

$$x = \frac{\pi}{6}$$

$$\text{Other } x = \frac{\pi}{6}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☒	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\rho(O; L) = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

$$L: \frac{1}{3a}x + y - \frac{7b}{3a} = 0$$

$$O(0; 0);$$

Вспомогательная прямая L
имеет положительный
наклон угла наклона,
тогда, $\frac{1}{3a} > 0$.

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{|1 - \frac{7b}{3a}|}{\sqrt{\frac{1+9a^2}{9a^2}}} = 3 \\ \frac{|1 - \frac{7}{3a} - \frac{7b}{3a}|}{\sqrt{\frac{1+9a^2}{9a^2}}} = 2 \end{array} \right.$$

$$\frac{7b}{3a} < 0; -\frac{7b}{3a} > 0$$

$$\text{При этом, } -\frac{7b}{3a} - \frac{7}{3a} > 0$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{-\frac{7b}{3a} \cdot 3a}{\sqrt{1+9a^2}} = 3 \\ \frac{-7-7b}{\sqrt{1+9a^2}} = 2 \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{-7b}{\sqrt{1+9a^2}} = 3 \\ \frac{-7-7b}{\sqrt{1+9a^2}} = 2 \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} 7 = \sqrt{1+9a^2} \\ \frac{-7-7b}{\sqrt{1+9a^2}} = 2 \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} 49 = 1+9a^2 \\ \frac{-7(1+b)}{\sqrt{1+9a^2}} = 2 \end{array} \right.$$

$$a^2 = \frac{16}{3}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} a = \pm \frac{4}{\sqrt{3}} = \pm \frac{4\sqrt{3}}{3} \\ a > 0 \end{array} \right.$$

$$a = \frac{4\sqrt{3}}{3}$$

Аналогичные рассуждения
для $\frac{1}{3a} < 0$, тогда $a < 0$,

$$\text{тогда } \forall a: a \in \left(-\frac{4\sqrt{3}}{3}, \frac{4\sqrt{3}}{3}\right)$$

система будет 4 различными решениями

$$\text{Ответ } a \in \left(-\frac{4\sqrt{3}}{3}, \frac{4\sqrt{3}}{3}\right)$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☒	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



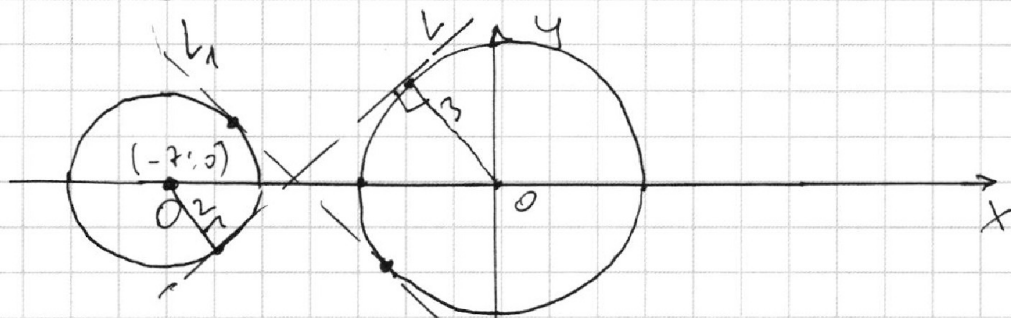
$$\begin{cases} x + 3ay - 7b = 0 \\ (x^2 + 14x + y^2 + 45)(x^2 + y^2 - 9) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = \frac{7b}{3a} - \frac{1}{3a}x \\ ((x+7)^2 + y^2 - 4)(x^2 + y^2 - 9) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = \frac{7b}{3a} - \frac{1}{3a}x & (3) \\ [(x+7)^2 + y^2 = 2^2] & (1) \\ (x^2 + y^2 = 3^2) & (2) \end{cases}$$

Заметим, что графики уравнений (1) и (2) задают окружности ω и ν с центрами $O(-7; 0)$ и $O_1(0; 0)$ и радиусами $r=2$ $r_1=3$ соответственно.

$y = -\frac{1}{3a}x + \frac{7b}{3a}$ — задаёт множество прямых. Тогда данное множество будет иметь 4 решения тогда и только тогда, когда графики (1) (2) (3) функции будут касаться попарно. Это в 4-х случаях.



Заметим, что от параметра b зависит перемещение прямой $y = -\frac{1}{3a}x + \frac{7b}{3a}$ по оси Ox .

Тогда рассмотрим крайнее положение прямой, когда она вообще будет касательной.



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☒	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\left\{ \begin{array}{l} \log_7 6x + \log_7 y = 0 \\ x \neq \frac{1}{6} \\ y \neq 1 \end{array} \right\} \quad \log_7 6xy = 0$$
$$\left\{ \begin{array}{l} x \neq \frac{1}{6} \\ y \neq 1 \end{array} \right.$$

$$6xy = 1$$

$$xy = \frac{1}{6}$$

$$\text{Order, } \frac{1}{6}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☒	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$\begin{cases} \log_7^4 6x - 2 \log_6 x 7 = \log_{36x^2} 343 - 4 \\ \log_7^4 y + 6 \log_y 7 = \log_y 2 (7^5) - 4 \end{cases}$$

Положим $t = \log_7 6x$

Заметим, что $h = \log_7 y$

$x, y > 0, x \neq \frac{1}{6}, y \neq 7 \quad (3)$

$$\begin{cases} t^4 - \frac{2}{t} = \frac{3}{2t} - 4 \\ h^4 + \frac{6}{h} = \frac{5}{2h} - 4 \end{cases}$$

$$\log_{36x^2} 343 = \log_{(6x)^2} 343 = \frac{3}{2} \log_{|6x|} 7 = \frac{3}{2} \log_{6x} 7$$

$$\begin{cases} \frac{2t^5 + 8t - 7}{2t} = 0 \quad (1) \\ \frac{2h^5 + 8h + 7}{2h} = 0 \quad (2) \end{cases}$$

Сложим (1) и (2) используя условие (3)

$$2t^5 + 2h^5 + 8t + 8h = 0$$

$$2(t^5 + h^5) + 8(t + h) = 0$$

$$(t^5 + h^5) + 4(t + h) = 0$$

$$(t + h)(t^4 - t^3h + t^2h^2 - th^3 + h^4 + 4) = 0$$

$$t \neq 0; h \neq 0$$

$$(t + h)(t^3(t - h) - h^3(t - h) + t^2h^2 + 4) = 0$$

$$t \neq 0; h \neq 0$$

Заметим, что $(t - h)^2(t^2 + th + h^2) + t^2h^2 + 4 > 0$,

т.е. $t^2h^2 \geq 0, t^2h^2 + 4 \geq 4$

$(t - h)^2 \geq 0; t^2 + h^2 \geq -2th$

Поэтому, $t + h = 0, t \neq 0, h \neq 0$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☒

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$NT = KT$ (как отрезки касательных к

одной точке,

т.е. $NT \perp BC$; $KT \perp BC \Rightarrow \angle NTK$ — искомый

угол двугранного угла

5) $\triangle OKT$ — прямоугол., т.к. $OK \perp (ABC)$;

$OK = 4$ (по условию)

$KT \subset (ABC)$

$$KT = \frac{32}{5};$$

$$\angle = \angle KTO$$

$$\operatorname{tg} \angle = \frac{4}{\frac{32}{5}} = \frac{5}{8};$$

т.к. K, O, N, T лежат в одной плоскости,

$\triangle ONT = \triangle KOT$ (по катету и общему гипотенузу)

Поэтому, $\angle KTN = 2\angle$

$$\operatorname{tg} 2\angle = \frac{\sin 2\angle}{\cos 2\angle} = \frac{2\sin \angle \cdot \cos \angle}{1 - 2\sin^2 \angle} = \frac{2\operatorname{tg} \angle}{1 - 2\operatorname{tg}^2 \angle}$$

$$= \frac{2 \cdot \frac{5}{8}}{1 - 2 \cdot \frac{25}{64}} = \frac{\frac{5}{4}}{1 - \frac{25}{32}} = \frac{\frac{5}{4}}{\frac{7}{32}} = \frac{5}{4} \cdot \frac{32}{7} = \frac{40}{7}$$

$$2\angle = \operatorname{arctg} \frac{40}{7}$$

$$\angle KTN = 2\angle = 2 \operatorname{arctg} \frac{5}{8}$$

Ответ а) 1350

б) $2 \operatorname{arctg} \frac{5}{8}$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☒

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Тогда для медиан BB_1 и CC_1 ,

$$(2BB_1)^2 = 2(AB^2 + 100) - AC^2$$

$$(2CC_1)^2 = 2(AC^2 + 100) - AB^2$$

$$(2BB_1)^2 = 2(260) - 340$$

$$(2CC_1)^2 = 2(440) - 160$$

$$(2BB_1)^2 = 180$$

$$BB_1^2 = 45$$

$$BB_1 = 3\sqrt{5}$$

$$(2CC_1)^2 = 720$$

$$CC_1^2 = 180$$

$$CC_1 = 6\sqrt{5}$$

$$AA_1 \cdot BB_1 \cdot CC_1 = 15 \cdot 3\sqrt{5} \cdot 6\sqrt{5} = 15 \cdot 18 \cdot 5 = 1350$$

б) 1) Если $Q \in \Omega$ касается (SBC) и (AKC) , то

$NS = 3 = SL$ (как отрезки касательных)

$$\text{Тогда } AL = 10 - 3 = 7$$

$$AL = AK = 7 \text{ км} = 3; KA_1 = 8$$

2) Д.а. существует перпендикуляр из точки K на BC , тогда: $KT \perp BC$

$$\text{Д.а. } (OK \perp (AKC); KT = Pr_{OT}) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow OT \perp BC; (по \nabla \nabla \nabla) \quad (AKC)$$

3) $\triangle KAT \sim \triangle AA_1H$ (по двум углам)

$$\text{Т.е. } \frac{KT}{AH} = \frac{KA_1}{AA_1} = \frac{8}{15};$$

$$\angle KTA_1 = \angle AA_1H = 90^\circ, \\ \angle AA_1H - \text{обозначим}$$

$$KT = \frac{8}{15} \cdot 12 = \frac{32}{5}$$

4) Т.а. $(OT \perp BC; BC \subset (SBC); ON \perp (SBC)) \Rightarrow$

$\Rightarrow NT \perp BC$; NT и KT - отрезки касательных

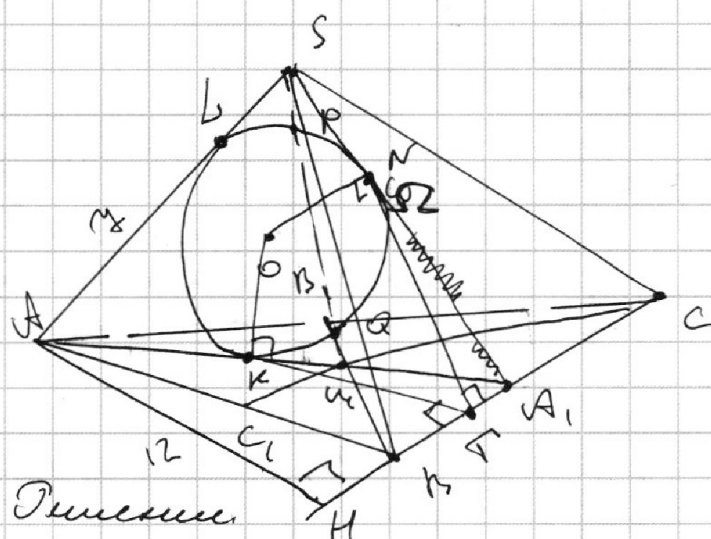
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☒

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ



Дано

$$BC \perp AS = 10$$

Решение

1) LS и KM — касательные к Ω , где
 $SP = MQ$ (по условию), то $S'Q = MP$

2) То все касательные
 $KM^2 = MQ \cdot MP = SP \cdot SQ = LS^2$
 $KM = LS$

$AK = AL$ (как касательные из одной точки)

Тогда $AM = AK + KM = AL + LS = AS = 10$
 $AM = 10$

Тогда $AA_1 = \frac{3}{2} \cdot AM = 15$ (по д-лу медианы)

3) Д-н AH — высота: $S = \frac{1}{2} AH \cdot BC$; $AH = 12$

$\triangle AHA_1$: по т. Пифагора:

$$HA_1 = \sqrt{225 - 144} = 9$$

Значит, $\triangle ABC$ — прямоугольный, $HC = 9 + 5 = 14$

4) $\triangle AHC$ (по т. Пифагора):

$$AC^2 = 144 + 196 = 340$$

5) $(2AA_1)^2 + BC^2 = 2(AB^2 + AC^2)$

$$1000 = 680 + 2AB^2,$$

$$2AB^2 = 160$$

Тогда, где медианы BB_1 и CC_1

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☒	☒	☒	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$5 \arccos(\sin x) = \frac{3\pi}{2} + x$$

$$x \in \mathbb{R}, \text{ т.е. } -1 \leq \sin x \leq 1$$

$$5 \arccos(\sin x) = 3(\arcsin(\sin x) + \arccos(\sin x) + x)$$

$$5 \arccos(\sin x) = 3 \arcsin(\sin x) + 3 \arccos(\sin x) + 3x$$

$$2 \arccos(\sin x) = 4x + y \in \mathbb{Z} \cdot 2\pi$$

$$\arccos(\sin x) = 2x$$

$$\begin{cases} \sin x = \sin 2x \\ -\frac{\pi}{2} \leq 2x \leq \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \sin x = 2 \sin x \cdot \cos x \\ -\pi \leq x \leq \pi \end{cases}$$

$$\begin{cases} \sin x (2 \cos x - 1) = 0 \\ -\pi \leq x \leq \pi \end{cases}$$

$$\begin{cases} \sin x = 0 \\ \cos x = \frac{1}{2} \end{cases}$$

$$-\pi \leq \pi n \leq \pi$$

$$-1 \leq n \leq 1 \quad n = \{-1; 0; 1\}$$

$$-\pi \leq \frac{\pi}{3} + 2\pi n \leq \pi$$

$$-1 \leq \frac{1}{3} + 2n \leq 1$$

$$-\frac{1}{3} \leq 2n \leq \frac{2}{3}$$

$$-\frac{1}{6} \leq n \leq \frac{1}{3}$$

$$n = 0$$

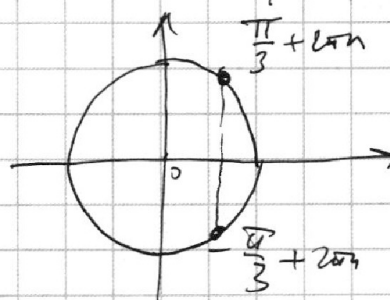
$$\text{Other. } x =$$

$$-\pi \leq -\frac{\pi}{3} + 2\pi n \leq \pi$$

$$-1 \leq -\frac{1}{3} + 2n \leq 1$$

$$-\frac{2}{3} \leq 2n \leq 1 \frac{1}{3}$$

$$-\frac{1}{3} \leq n \leq \frac{2}{3} \quad n = 0$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$\begin{cases} (\log_7 6x)^4 - 2 \log_{6x} 7 = \log_{36x^2} 343 - 4 \\ (\log_7 y)^4 + 6 \log_y 7 = \log_{y^2} (7^5) - 4 \end{cases}$$

$x > 0, y > 0, x \neq \frac{1}{6}, y \neq 1$

Пусть $t = \log_7 6x$

$$t^4 - 2 \frac{1}{t} = \log_{(6x)^2} 7^3 - 4$$

$$t^4 - 2 \frac{1}{t} = \frac{3}{2} \log_7 \frac{1}{t} - 4$$

$$t^4 - \frac{2}{t} - \frac{3}{2t} + 4 = 0$$

$$2t^5 + 8t - 7 = 0$$

$$\frac{2t^5 - 2t}{2t} = 0$$

$$D = 16 + 14$$

$$2t^5 + 8t - 7 = 0$$

$$\frac{3}{2} \log_{6x} 7 - 2 \log_{6x} 7 - \frac{3}{2} \log_{6x} 7 =$$

$$h = \log_7 7 = -2 \frac{3}{2} \log_{6 \cdot 7} 7 - \frac{7}{2}$$

$$h^4 + 6 \frac{1}{h} = \frac{5}{2} \frac{1}{h} - 4$$

$$\log_7 6x = \log_7 x + \log_7 6$$

$$(\log_7 6x)^4 - \frac{2}{\log_7 6x} = \frac{1}{\log_7^3 (6x)} - 4$$

$$\frac{2h^5 + 7 + 8h}{2h} = 0$$

$$\frac{2}{3} \frac{3}{2}$$

$$\log_7 x + \log_7 y = \log_7 (xy)$$

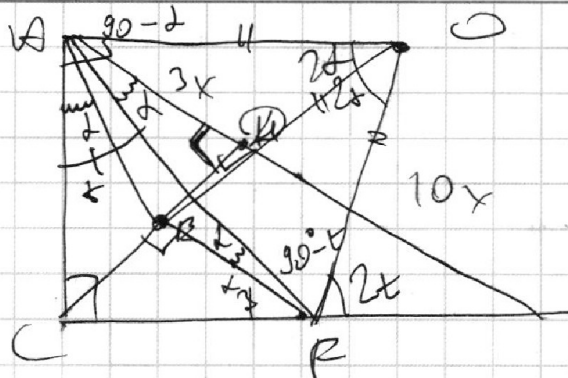
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$CB = \sqrt{30} \cdot x$$

$$CB = x\sqrt{130}$$

$$CD = x\sqrt{30}$$

$$AE = x\sqrt{39}$$

$$90^\circ - 2\alpha = \beta + \gamma$$

$$\gamma = 90^\circ - 2\alpha - \beta$$

$$\sin(90^\circ - \beta - \gamma)$$

$$\sin \beta = \frac{x\sqrt{30}}{x\sqrt{130}} = \sqrt{\frac{3}{13}}$$

$$5 \arccos(\sin x) = \frac{3\pi}{2} + x$$

$$\arccos(\sin x) = \frac{\pi}{2} - x$$

$$\cos x = \sin x$$

$$\arccos(\sin x) = \frac{\pi}{2} - x$$

$$\arccos(\cos x) = x$$

$$\arccos(\sin x) = \frac{\pi}{2} - x$$

$$\arccos(\sin x)$$

$$\sin x = \sqrt{1 - \cos^2 x}$$

$$5 \arccos(\sin x) = \frac{3\pi}{2} + \arcsin x$$

$$5 \arccos(\sin x) = 3 \arccos(\sin x) + 3 \arcsin(\sin x) + \frac{\pi}{2}$$

$$2 \arccos(\sin x) = \frac{\pi}{2}$$

$$\arccos(\sin x) = \frac{\pi}{4}$$

$$\sin 2x = \sin x$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



Handwritten solution on grid paper for a geometry problem. The diagram shows a triangle ABC with a point D on BC. A line segment AD is drawn. A circle is tangent to AD and BC at point E. The angle at D is labeled as $90^\circ - \frac{3}{2}\alpha$. The angle at A is labeled as $\frac{3}{2}\alpha$. The angle at B is labeled as $90^\circ - \frac{3}{2}\alpha$. The angle at C is labeled as $90^\circ - \frac{3}{2}\alpha$. The angle at E is labeled as $90^\circ - \frac{3}{2}\alpha$. The angle at F is labeled as $90^\circ - \frac{3}{2}\alpha$. The angle at G is labeled as $90^\circ - \frac{3}{2}\alpha$. The angle at H is labeled as $90^\circ - \frac{3}{2}\alpha$. The angle at I is labeled as $90^\circ - \frac{3}{2}\alpha$. The angle at J is labeled as $90^\circ - \frac{3}{2}\alpha$. The angle at K is labeled as $90^\circ - \frac{3}{2}\alpha$. The angle at L is labeled as $90^\circ - \frac{3}{2}\alpha$. The angle at M is labeled as $90^\circ - \frac{3}{2}\alpha$. The angle at N is labeled as $90^\circ - \frac{3}{2}\alpha$. The angle at O is labeled as $90^\circ - \frac{3}{2}\alpha$. The angle at P is labeled as $90^\circ - \frac{3}{2}\alpha$. The angle at Q is labeled as $90^\circ - \frac{3}{2}\alpha$. The angle at R is labeled as $90^\circ - \frac{3}{2}\alpha$. The angle at S is labeled as $90^\circ - \frac{3}{2}\alpha$. The angle at T is labeled as $90^\circ - \frac{3}{2}\alpha$. The angle at U is labeled as $90^\circ - \frac{3}{2}\alpha$. The angle at V is labeled as $90^\circ - \frac{3}{2}\alpha$. The angle at W is labeled as $90^\circ - \frac{3}{2}\alpha$. The angle at X is labeled as $90^\circ - \frac{3}{2}\alpha$. The angle at Y is labeled as $90^\circ - \frac{3}{2}\alpha$. The angle at Z is labeled as $90^\circ - \frac{3}{2}\alpha$.

1) $\triangle CEF \sim \triangle CDB$

$\frac{CF}{AB} = \frac{CB}{DB}$ $CB^2 = AB \cdot DB$

$CB = x\sqrt{30}$

$CD^2 = 30x^2$

$CD = x\sqrt{30}$

$\frac{S_{CDB}}{S_{ACB}} = \frac{10x^2\sqrt{30}}{3x^2\sqrt{30}} = \frac{10}{3}$

$\sin(3 \cdot (\frac{1}{2}\alpha)) = 3\sin\frac{\alpha}{2} - 4\sin^3\frac{\alpha}{2}$

$\angle CAB = \frac{3}{2}\alpha$

$\sin\frac{3}{2}\alpha = \frac{CD}{AC}$

$BD = \tan\frac{5\alpha}{4} \cdot 3x$

$CB = x\sqrt{30} = \tan\frac{5\alpha}{4} \cdot 3x$

$\tan\frac{5\alpha}{4} = \frac{BD}{3x}$

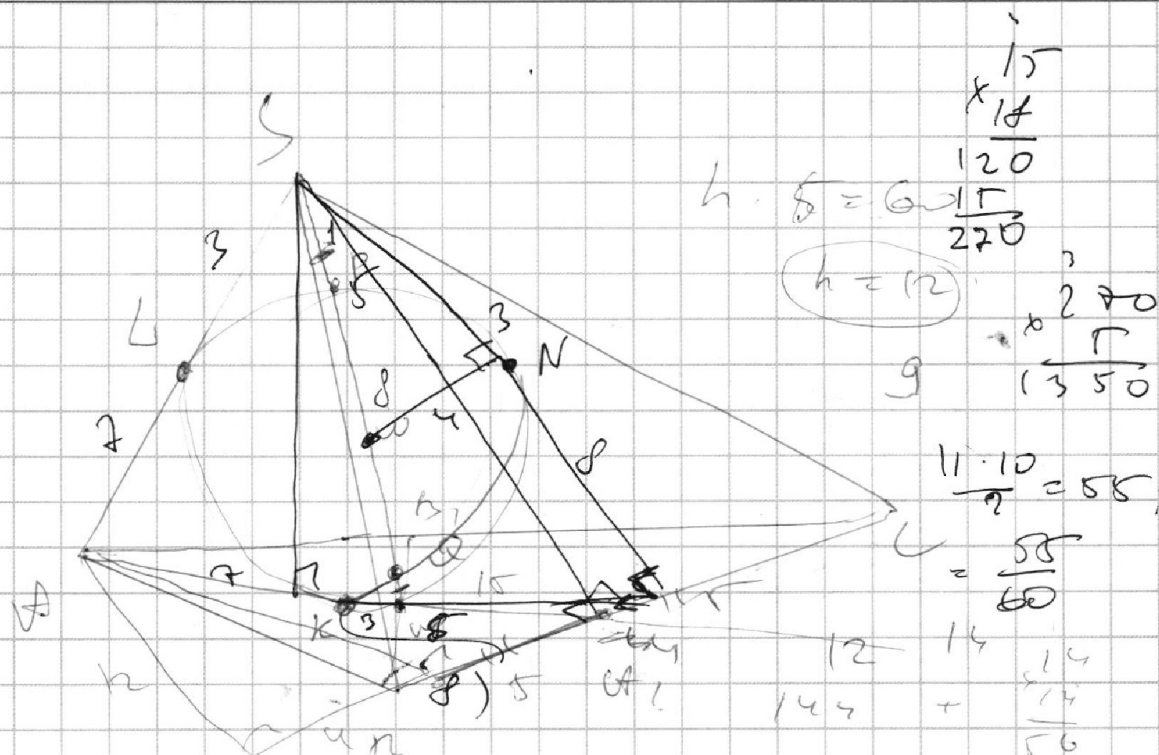
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

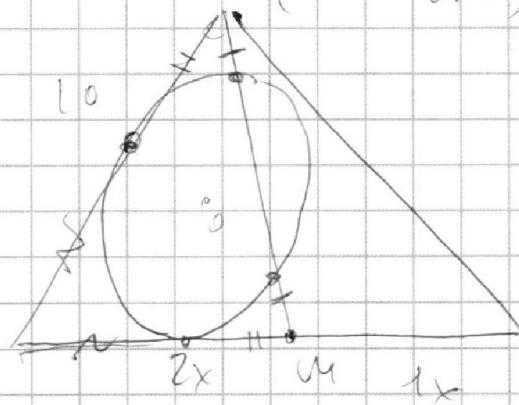
Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ



$$30^2 + 10^2 = 2(AC^2 + AB^2) \quad S_{ABC} = 60$$

$$S_{ABC} = 60$$



$$(2BM)^2 = 2(AB^2 + 100) - AC^2$$

$$(2CM)^2 = 2(AC^2 + 100) - AB^2$$

$$4BM^2 + 4CM^2 = AB^2 + AC^2 + 400$$

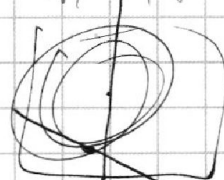
$$BM^2 + CM^2 = 225$$

$$(BM + CM)^2 = BM^2 + CM^2 + 2BM \cdot CM$$

$$AM = 10$$

$$\frac{AM}{AS} = \frac{2}{3}$$

$$AS = 15$$



$$\begin{array}{r} 15 \\ \times 18 \\ \hline 120 \\ 270 \\ \hline 270 \end{array}$$

$$h = 12$$

$$\begin{array}{r} 270 \\ \times 270 \\ \hline 1350 \end{array}$$

$$\frac{11 \cdot 10}{2} = 55$$

$$= 55$$

$$\begin{array}{r} 12 \quad 14 \\ 144 \quad + \quad 196 \\ \hline 340 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 196 \\ + 144 \\ \hline 340 \end{array}$$

$$2\sqrt{85}$$