



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

11 КЛАСС. Вариант 2



1. [4 балла] Натуральные числа a, b, c таковы, что ab делится на $2^7 3^{11} 5^{14}$, bc делится на $2^{13} 3^{15} 5^{18}$, ac делится на $2^{14} 3^{17} 5^{43}$. Найдите наименьшее возможное значение произведения abc .

2. [5 баллов] Дан прямоугольный треугольник ABC . Окружность, касающаяся прямой AC в точке A , пересекает высоту CD , проведённую к гипотенузе, в точке E , а катет BC – в точке F . Известно, что $AB \parallel EF$, $AB : BD = 1,3$. Найдите отношение площади треугольника ACD к площади треугольника CEF .

3. [4 балла] Решите уравнение $5 \arccos(\sin x) = \frac{3\pi}{2} + x$.

4. [5 баллов] Найдите все значения параметра a , для каждого из которых найдётся значение параметра b , при котором система уравнений

$$\begin{cases} x + 3ay - 7b = 0, \\ (x^2 + 14x + y^2 + 45)(x^2 + y^2 - 9) = 0 \end{cases}$$

имеет ровно 4 решения.

5. [5 баллов] Некоторые числа x и y удовлетворяют равенствам

$$\log_7^4(6x) - 2 \log_{6x} 7 = \log_{36x^2} 343 - 4, \quad \text{и} \quad \log_7^4 y + 6 \log_y 7 = \log_{y^2} (7^5) - 4.$$

Найдите все возможные значения произведения xy .

6. [5 баллов] На координатной плоскости дан параллелограмм с вершинами в точках $O(0;0)$, $P(-17;68)$, $Q(2;68)$ и $R(19;0)$. Найдите количество пар точек $A(x_1; y_1)$ и $B(x_2; y_2)$ с целыми координатами, лежащих в этом параллелограмме (возможно на границе) и таких, что $4x_2 - 4x_1 + y_2 - y_1 = 40$.

7. [6 баллов] Дана треугольная пирамида $SABC$, медианы AA_1 , BB_1 и CC_1 треугольника ABC пересекаются в точке M . Сфера Ω касается ребра AS в точке L и касается плоскости основания пирамиды в точке K , лежащей на отрезке AM . Сфера Ω пересекает отрезок SM в точках P и Q . Известно, что $SP = MQ$, площадь треугольника ABC равна 60, $SA = BC = 10$.

а) Найдите произведение длин медиан AA_1 , BB_1 и CC_1 .

б) Найдите двугранный угол при ребре BC пирамиды, если дополнительно известно, что Ω касается грани BCS в точке N , $SN = 3$, а радиус сферы Ω равен 4.

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☒	☐	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Задача 1.

$$a, b, c \in \mathbb{N}$$

Пусть

$$\begin{cases} ab = 2^7 \cdot 3^{11} \cdot 5^{14} \cdot x \\ bc = 2^{13} \cdot 3^{15} \cdot 5^{18} \cdot y \\ ac = 2^{14} \cdot 3^{17} \cdot 5^{43} \cdot z \end{cases}$$

$$x, y, z \in \mathbb{N}$$

$$\text{Тогда } (abc)^2 = 2^{34} \cdot 3^{43} \cdot 5^{75} \cdot x \cdot y \cdot z$$

$$\text{Так как } a, b, c, x, y, z \in \mathbb{N}, \text{ то } (abc): 2^{17} \cdot 3^{22} \cdot 5^{38}$$

$$\text{при этом } ac: 5^{43} \Rightarrow abc: 5^{43} \Rightarrow (abc): 2^{17} \cdot 3^{22} \cdot 5^{43}$$

Значит, наименьшее значение (abc) равно $2^{17} \cdot 3^{22} \cdot 5^{43}$

Приведём пример таких чисел a, b, c :

$$a = 2^4 \cdot 3^7 \cdot 5^{14}$$

$$b = 2^3 \cdot 3^5$$

$$c = 2^{10} \cdot 3^{10} \cdot 5^{29}$$

$$\text{Тогда } ab = 2^7 \cdot 3^{12} \cdot 5^{14} : 2^7 \cdot 3^{11} \cdot 5^{14}$$

$$bc = 2^{13} \cdot 3^{15} \cdot 5^{29} : 2^{13} \cdot 3^{15} \cdot 5^{18}$$

$$ac = 2^{14} \cdot 3^{17} \cdot 5^{43} : 2^{14} \cdot 3^{17} \cdot 5^{43}$$

Таким образом, наименьшее значение abc равно $2^{17} \cdot 3^{22} \cdot 5^{43}$

Ответ: $2^{17} \cdot 3^{22} \cdot 5^{43}$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☒	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Задание 2 (Продолжение)

~~СР~~ Заметим, что $CE = CD:2 \Rightarrow$ так как $FE \parallel BD$, то

FE — средняя линия $\triangle BCD \Rightarrow EF = \frac{1}{2} BD = 5x$

тогда ~~S_{BCD}~~ $S_{CEF} = \frac{1}{2} CE \cdot FE = \frac{1}{2} \cdot \frac{x\sqrt{30}}{2} \cdot 5x = \frac{5x^2\sqrt{30}}{4}$

$$S_{ACD} = \frac{1}{2} \cdot CD \cdot AD = \frac{1}{2} \cdot x\sqrt{30} \cdot 3x = \frac{3x^2\sqrt{30}}{2}$$

$$\frac{S_{ACD}}{S_{CEF}} = \frac{\cancel{3x^2\sqrt{30}} \cdot 4}{2 \cdot \cancel{5x^2\sqrt{30}}} = \frac{12}{10} = \frac{6}{5} = 1,2$$

Ответ: 1,2.

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☒	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Задача 3 (продолжение)

$$4) x \in \left[\frac{3\pi}{2}; \frac{5\pi}{2} \right] \Rightarrow \arcsin(\sin x) = x - 2\pi$$

$$\pi = 5(x - 2\pi) + x$$

$$\frac{3\pi}{2} < \frac{11\pi}{6} < \frac{5\pi}{2}$$

верно

$$6x = 8\pi + 11\pi$$

$$x = \frac{11\pi}{6}$$

$$5) x \in \left[\frac{5\pi}{2}; \frac{7\pi}{2} \right] \Rightarrow \arcsin(\sin x) = \cancel{4\pi - x} \cancel{2\pi - x} 3\pi - x$$

$$\pi = 5(3\pi - x) + x$$

$$4x = 14\pi$$

$$x = \frac{7\pi}{2}$$

Таким образом, $x \in \left\{ -\frac{3\pi}{2}; \frac{\pi}{6}; \pi; \frac{11\pi}{6}; \frac{7\pi}{2} \right\}$

Преобразования были равносильными, поэтому найденные
решения подходят.

Ответ: $-\frac{3\pi}{2}, \frac{\pi}{6}, \pi, \frac{11\pi}{6}, \frac{7\pi}{2}$.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☒	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Задача 3

$$5 \arccos(\sin x) = \frac{3\pi}{2} + x \quad \text{ОДЗ: } -1 \leq \sin x \leq 1 \text{ верно}$$

$$\arccos(\sin x) \in [0; \pi] \Rightarrow 5 \arccos(\sin x) \in [0; 5\pi]$$

$$\text{Тогда } 0 \leq \frac{3\pi}{2} + x \leq 5\pi$$

$$-\frac{3\pi}{2} \leq x \leq \frac{10\pi - 3\pi}{2} = \frac{7\pi}{2}$$

$$\arccos(\sin x) + \arcsin(\sin x) = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \arccos(\sin x) = \frac{\pi}{2} - \arcsin(\sin x)$$

$$5\left(\frac{\pi}{2} - \arcsin(\sin x)\right) = \frac{3\pi}{2} + x$$

$$\frac{5\pi}{2} - \frac{3\pi}{2} = 5 \arcsin(\sin x) + x$$

$$\pi = 5 \arcsin(\sin x) + x$$

Разберём несколько случаев:

$$1) x \in \left[-\frac{3\pi}{2}; -\frac{\pi}{2}\right] \Rightarrow \arcsin(\sin x) = -x - \pi$$

$$\pi = 5(-x - \pi) + x$$

$$4x = -6\pi$$

$$x = -\frac{3\pi}{2}$$

$$2) x \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right] \Rightarrow \arcsin(\sin x) = x$$

$$\pi = 5x + x$$

$$x = \frac{\pi}{6}$$

$$3) x \in \left[\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right] \Rightarrow \arcsin(\sin x) = \pi - x$$

$$\pi = 5(\pi - x) + x$$

$$4x = 4\pi \Rightarrow x = \pi$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☒ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Задание 4 (продолжение)

$$b^2 < \frac{9(9a^2+1)}{49}$$

$$b \in \left(-\frac{3\sqrt{9a^2+1}}{7}; \frac{3\sqrt{9a^2+1}}{7} \right) \quad (*)$$

для всех a

2) Подставим (1) в (2), должно быть ровно 2 решения

$$(-3ay + 7b + 7)^2 + y^2 - 4 = 0$$

$$(9a^2y + 1)y^2 - 2(21ab + 21a)y + 49b^2 + 2 \cdot 49b + 45 = 0$$

$$D = 4(21ab + 21a)^2 - 4(9a^2 + 1)(49b^2 + 2 \cdot 49b + 45) > 0$$

$$(21^2a^2 - 49(9a^2+1))b^2 + (2 \cdot 21^2a^2 - 2 \cdot 49(9a^2+1))b + 21^2a^2 - 45(9a^2+1) > 0$$

$$(21^2a^2 - 21^2a^2 - 49)b^2 + 2(21^2a^2 - 21^2a^2 - 49)b + 21^2a^2 - 49(9a^2+1) + 4(9a^2+1) > 0$$

$$49b^2 + 2 \cdot 49b + 49 - 4(9a^2+1) < 0$$

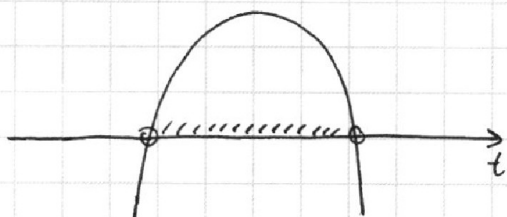
$$49b^2 + 2 \cdot 49b - 36a^2 + 45 < 0$$

Заменим $7b$ на t , тогда $t^2 + 14t - 36a^2 + 45 < 0$ должно иметь решения относительно t , причём из (*) решения на $(-\frac{3\sqrt{9a^2+1}}{7}; \frac{3\sqrt{9a^2+1}}{7})$

$f(t) = t^2 + 14t - 36a^2 + 45$ парабола с ветвями вверх, $t_0 = -7$

$$\begin{aligned} D &= 14^2 - 4(45 - 36a^2) = \\ &= 4(49 - 45 + 36a^2) = \\ &= 4(4 + 36a^2) = 4^2(9a^2 + 1) \end{aligned}$$

$$t \in (-7 - 2\sqrt{9a^2+1}; -7 + 2\sqrt{9a^2+1})$$



1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☒	☐	☐	☐

Задача 4

$$\begin{cases} x + 3ay - 7b = 0 \\ (x^2 + 14x + y^2 + 45)(x^2 + y^2 - 9) = 0 \end{cases} \quad (=\Rightarrow)$$

$$\begin{cases} x = -3ay + 7b & (1) \\ (x^2 + 7)^2 + y^2 - 4 = 0 & (2) \\ x^2 + y^2 - 9 = 0 & (3) \end{cases}$$

(1) - линейная зависимость, (2) и (3) - квадратичные. каждое из

(2) и (3) может дать не более 2-х решений (подставляем в них (1)), ~~и~~

всего решений должно быть 4 $\Rightarrow$ они имеют по 2 решения.

Заметим, что (2) - окружность с центром в $(-7; 0)$ и радиусом 2,

(3) - окружность с центром в $(0; 0)$ и радиусом 3, они не пересекаются,

поэтому решения в (2) и (3) не совпадают.

1) подставляем (1) во (2), должно быть ровно 2 решения

$$(7b - 3ay)^2 + y^2 - 9 = 0$$

$$(9a^2 + 1)y^2 - 42aby + 49b^2 - 9 = 0$$

$$D = 42^2 \cdot a^2 b^2 - 4(9a^2 + 1) \cdot (49b^2 - 9) > 0$$

$$21^2 a^2 b^2 - (9a^2 + 1) \cdot (49b^2 - 9) > 0 \quad \text{должно существовать } b, \text{ что неравенство}$$

$$(21^2 a^2 - 9 \cdot 49a^2 - 49)b^2 + 9(9a^2 + 1) > 0 \quad \text{выполнено. Рассмотрим как квадратное}$$

$$\text{относительно } b$$

$$\text{так как } 49b^2 < 9(9a^2 + 1)$$

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☒	☐	☐	☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Задача 4 (продолжение - 2)

$(-7 - 2\sqrt{9a^2 + 1}; -7 + 2\sqrt{9a^2 + 1})$ и $(-3\sqrt{9a^2 + 1}; 3\sqrt{9a^2 + 1})$ должны иметь хотя бы одну общую точку

1 случай:

$$-7 + 2\sqrt{9a^2 + 1} < 3\sqrt{9a^2 + 1}, \text{ так как}$$

$$\sqrt{9a^2 + 1} > -7$$

$$-7 + 2\sqrt{9a^2 + 1} > 3\sqrt{9a^2 + 1}$$

$$\sqrt{9a^2 + 1} < -7$$

тогда должно выполняться

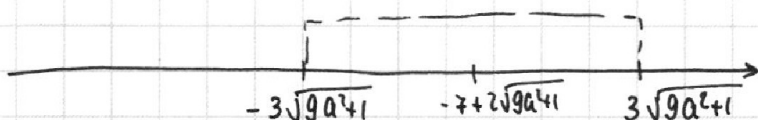
$$-7 + 2\sqrt{9a^2 + 1} > -3\sqrt{9a^2 + 1}$$

$$5\sqrt{9a^2 + 1} > 7$$

$$9a^2 + 1 > \frac{49}{25}$$

$$9a^2 > \frac{24}{25}$$

$$a^2 > \frac{24}{25 \cdot 9} \Rightarrow a \in (-\infty; -\frac{\sqrt{24}}{15}) \cup (\frac{\sqrt{24}}{15}; +\infty)$$



при $a \in (-\infty; -\frac{\sqrt{24}}{15}) \cup (\frac{\sqrt{24}}{15}; +\infty)$ интервалы $(-3\sqrt{9a^2 + 1}; 3\sqrt{9a^2 + 1})$

и $(-7 - 2\sqrt{9a^2 + 1}; -7 + 2\sqrt{9a^2 + 1})$ будут иметь хотя бы одну общую

точку, которую можно приравнять $t = 7b \Rightarrow$ будет существовать

b , что сист уравнения (2) и (3) (при подстановке (1)) будут иметь по

2 несовпадающих решения $\Rightarrow$ система имеет ровно 4 решения.

Ответ: $a \in (-\infty; -\frac{\sqrt{24}}{15}) \cup (\frac{\sqrt{24}}{15}; +\infty)$.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:



1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☒	☐	☐



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Задача 5 (продолжение 2)

минимум $g(a)$ в точке $a = -\left(\frac{7}{8}\right)^{\frac{1}{5}}$ и равен

$$\frac{2 \cdot \left(-\frac{7}{8}\right)^{\frac{2}{5}} - 8 \cdot \left(\frac{7}{8}\right)^{\frac{1}{5}} - 7}{-2 \cdot \left(\frac{7}{8}\right)^{\frac{1}{5}}} > 0 \Rightarrow g(a) > 0 \Rightarrow f(t) > 0$$

тогда $f(6x) = 0$ и $f(y) = 0$ не имеет решений

Ответ: таких x и y не существует.



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☒	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Задание 5 (продолжение)

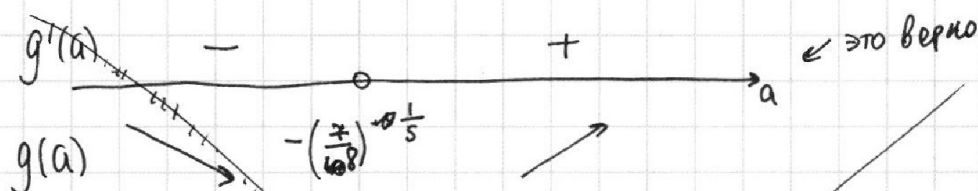
$$f_1(a) = 2a^5 + 8a - 7$$

$$f_1'(a) = 10a^4 + 8 > 0 \Rightarrow f_1(a) \uparrow$$

Пусть $f_1(a) = 0$ имеет корень a_0 . Он единственный в силу
монотонности $f_1(a)$ и $\epsilon > 0$, так как $f_1(0) < 0$.

$$g'(a) = \frac{(10a^4 + 8) \cdot 2a - 2(2a^5 + 8a - 7)}{4a^2} =$$

$$= \frac{20a^5 + 16a - 4a^5 - 16a + 14}{4a^2} = \frac{10a^5 + 14}{2a^2} = \frac{16a^5 + 14}{4a^2} = \frac{8a^5 + 7}{2a^2}$$



минимум $g(a)$ равен $(g(-(\frac{7}{10})^{\frac{1}{5}})) = \frac{2 \cdot \frac{7}{10} - 8 \cdot (\frac{7}{10})^{-\frac{1}{5}} - 7}{-2 \cdot (\frac{7}{10})^{-\frac{1}{5}}} > 0$

тогда $g(a) > 0 \Rightarrow f_1(a) > 0 \Rightarrow f_1(x) = 0$ и $f_1(y) = 0$ не имеет
решений

Ответ: таких x и y не существует.

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☒	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Задача 5

$$\begin{cases} \log_7^4(6x) - 2\log_{6x} 7 = \log_{36x^2} 343 - 4 \\ \log_7^4 y + 6\log_y 7 = \log_{y^2} (7^7) - 4 \end{cases}$$

найти: xy

$$\text{ОДЗ: } \begin{cases} x > 0 \\ x \neq \frac{1}{6} \\ x \neq -\frac{1}{6} \\ y > 0 \\ y \neq \pm 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ x \neq \frac{1}{6} \\ y > 0 \\ y \neq 1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \log_7^4(6x) - \frac{2}{\log_7(6x)} = \frac{3}{\log_7(6x) \cdot 2} - 4 \\ \log_7^4 y + \frac{6}{\log_7 y} = \frac{5}{\log_7 y \cdot 2} - 4 \end{cases} \quad (\Rightarrow)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \log_7^4(6x) - \frac{7}{2\log_7(6x)} + 4 = 0 \\ \log_7^4 y - \frac{7}{2\log_7 y} + 4 = 0 \end{cases}$$

~~$$f(t) = \log_7^4 t - \frac{7}{2\log_7 t} + 4 = 0$$~~

$$f(t) = \log_7^4 t - \frac{7}{2\log_7 t} + 4 = 0$$

тогда система имеет вид $\begin{cases} f(6x) = 0 \\ f(y) = 0 \end{cases}$

Проанализируем $f(t)$:

Пусть $\log_7 t = a$, тогда $g(a) = a^4 - \frac{7}{2a} + 4 = \frac{2a^5 + 8a - 7}{2a}$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$4x_2 - 4x_1 + y_2 - y_1 = 40$$

$$f(x_2) - f(x_1) - f(y_2) = 40$$

$$f(A) = 4x_1 + y_1$$

$$t^4 - \frac{7}{2}t + 4 = 0$$

$$f(t) = 2t^4 - 7t + 8 = 0$$

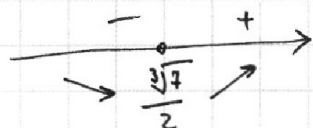
$$f'(t) = 8t^3 - 7$$

$$\text{Берем, это же } t^4 - \frac{7}{2t} + 4 = 0$$

$$\frac{2t^5 - 7 + 8t}{2t} = 0$$

$$f(t) = 2t^5 + 8t - 7 = 0$$

$$f'(t) = 10t^4 + 8 > 0$$



$$f(t) \geq f\left(\frac{7}{2}\right) = 2 \cdot \frac{7 \cdot 7^{\frac{1}{3}}}{16} - 7 \cdot \frac{7 \cdot 7^{\frac{1}{3}}}{2} + 8 = -\frac{7 \cdot 7^{\frac{1}{3}} \cdot 3}{8} + 8 =$$

$$= \frac{64 - 21 \sqrt[3]{7}}{8}$$

$$64 \cup 21 \sqrt[3]{7}$$

$$64^3 \cup 21^3 \cdot 7 = 21^3 \cdot 3 + 21^3 \cdot 3 + 21^3$$

$$64 \geq 64^3 > 24^3 \cdot 8 \quad | : 8^3$$

$$8^3 > 4^3 \cdot 8 = 8 \cdot 4 \cdot 8 \quad \text{юху}$$

Кривая

$$g(a) \geq$$



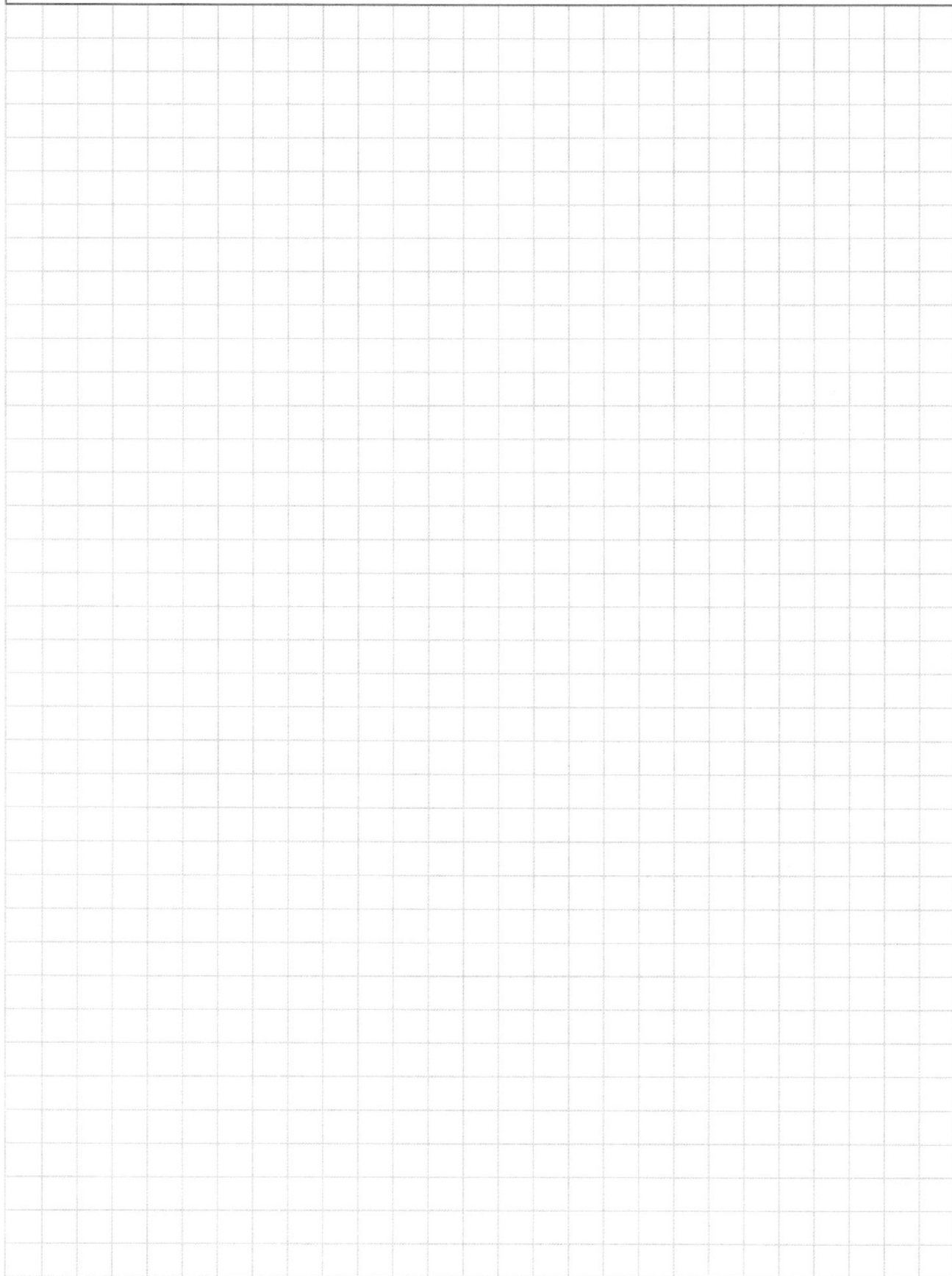
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

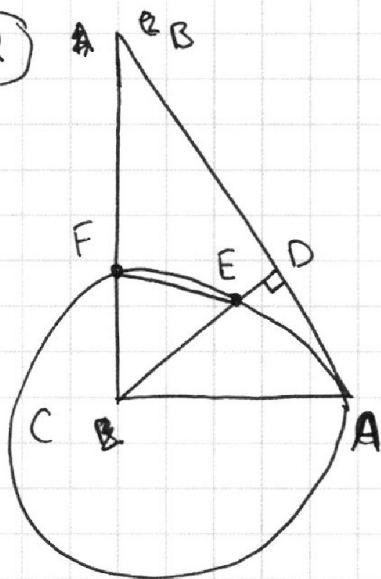
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

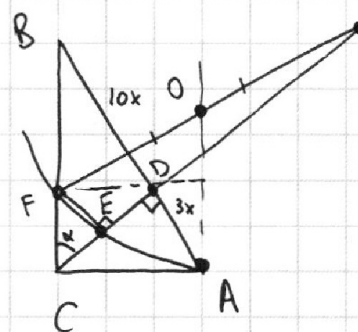
Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

2



$$\frac{AB}{BD} = 1,3 = \frac{10}{13}$$

$$AD = 3x, BD = 10x$$



$$CD^2 = 3x \cdot 10x = x^2 \cdot 30$$

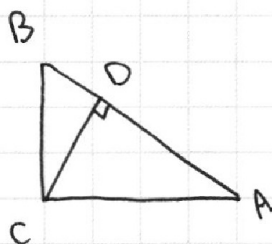
$$CD = x\sqrt{30}$$

$$S_{ACD} = \frac{1}{2} \cdot x\sqrt{30} \cdot 3x = \frac{3x^2\sqrt{30}}{2}$$

$$CF = y$$

$$AC = \sqrt{30x^2 + 9x^2} = x\sqrt{39}$$

$$x^2 \cdot 39 +$$





На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1

☐

2

☐

3

☐

4

☐

5

☐

6

☐

7

☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$21^2 a^2 - 7^2(9a^2 + 1) > 0$$

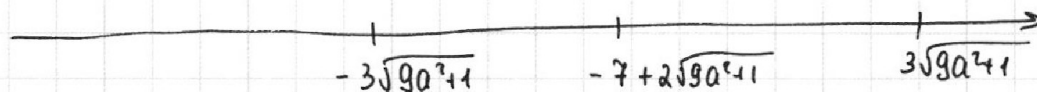
$$9a^2 - 9a^2 - 1 > 0 \text{ ну, ладно думал не надо...}$$

но блин, вы угадаете что ли.

$$21^2 a^2 - 9 \cdot 49 a^2 - 49 > 0$$

$$9a^2 - a^2 a, 9a, \text{ конечно}$$

$$D = 4 \cdot 49^2 - 4 \cdot 49(45 - 36a^2) = 4 \cdot 49(49 - 45 + 36a^2) =$$
$$= 4 \cdot 49(4 + 36a^2)$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

4

$$x + 3ay - 7b = 0 \quad (1)$$

$$(x^2 + 14x + y^2 + 45)(x^2 + y^2 - 9) = 0 \quad (2)$$

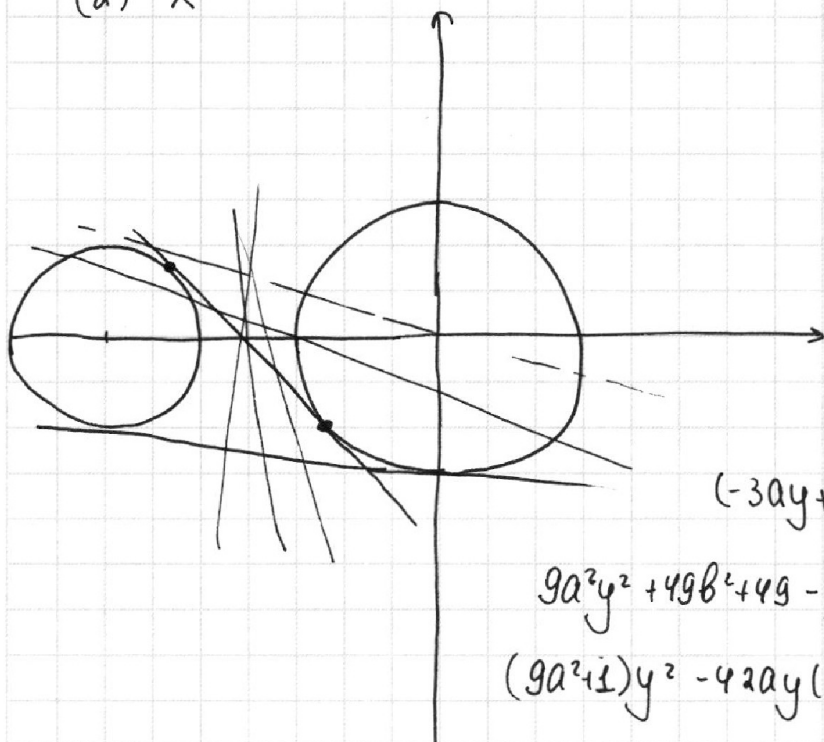
(2) x

Черновик

если $a = 0$, то прямая
параллельна оси $Oy \Rightarrow$
 $\Rightarrow$ решений не больше 2-х
" "
 $a \neq 0$

если $a > 0$, то

можно просто тут подставить
и посмотреть



$$(-3ay + 7b + 7)^2 + y^2 = 4$$

$$9a^2y^2 + 49b^2 + 49 - 42ab y + 14b - 42ay + y^2 = 4$$

$$(9a^2 + 1)y^2 - 42ay(b + 1) + 49b^2 + 14b + 45 = 0$$

a , для которых $\exists b$, что 2 решения
2 решения если $D > 0$

$$D = 42^2 a^2 (b + 1)^2 - 4(9a^2 + 1)(49b^2 + 14b + 45) > 0$$

$$21^2 a^2 b^2 + 21^2 a^2 \cdot 2b + 21^2 \cdot a^2 - 9 \cdot 49 a^2 b^2 + 9 \cdot 14 a^2 b + 9 \cdot 45 a^2 \dots > 0$$

есть решение относительно $b \Rightarrow$ при квадратном относительно b $D \geq 0$

$(21^2 a^2)$ выглядит как лютый крик, в D будут mega страшные числа

$$49 \cdot (9a^2 + 1)b^2 + (2 \cdot 21^2 a^2 - (9a^2 + 1) \cdot 14)b + 42^2 21^2 a^2 - (9a^2 + 1) \cdot 45 > 0$$

~~а не, тут же всегда есть решение, так~~

2 случая: 1) коэф перед $b^2 < 0$ — крик, нужен $D \geq 0$

2) коэф перед $b^2 > 0$ — крик, ничего не надо

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

3) $5 \arccos(\sin x) = \frac{3\pi}{2} + x$

ОДЗ: $-1 \leq \sin x \leq 1$ верно

Пусть $\arccos(\sin x) = \alpha$, $\alpha \in [0; \pi]$

$5\alpha \in [0; 5\pi]$

$0 \leq \frac{3\pi}{2} + x \leq 5\pi$

$-\frac{3\pi}{2} \leq x \leq \frac{10\pi - 3\pi}{2} = \frac{7\pi}{2}$

$5\alpha = \frac{3\pi}{2} + x$

$5\left(\frac{\pi}{2} - \arcsin(\sin x)\right) = \frac{3\pi}{2} + x$

$\frac{5\pi}{2} - 5 \arcsin(\sin x) = \frac{3\pi}{2} + x$

$\pi = 5 \arcsin(\sin x) + x$

Пусть $\beta = \arcsin(\sin x)$

$\sin \beta = \sin x$

$\beta = x + 2\pi k$ $k \in \mathbb{Z}$
 $\beta = \pi - x + 2\pi k$

1) $\beta = x + 2\pi k$

$\pi = 5x + 10\pi k + x$

$6x = \pi - 10\pi k = \pi(1 - 10k)$

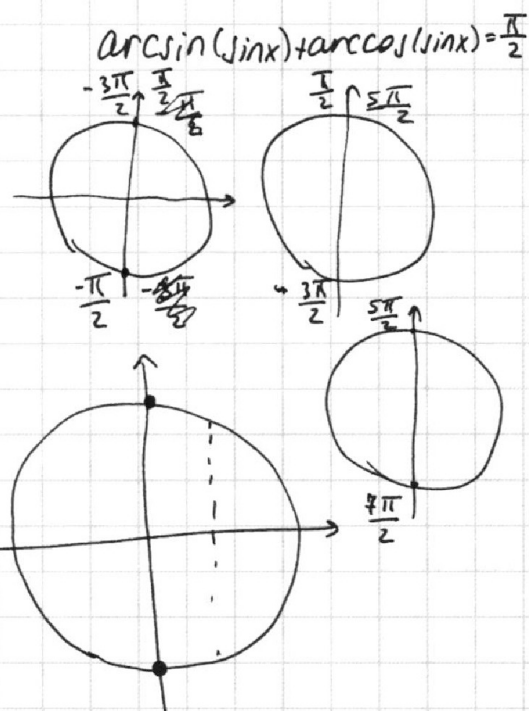
$-\frac{3\pi}{2} \leq x = \frac{\pi(1 - 10k)}{6} \leq \frac{7\pi}{2}$

$-9 \leq 1 - 10k \leq 21$

$-10 \leq -10k \leq 20$

$-20 \leq 10k \leq 10$

$-2 \leq k \leq 1$



$k = -2: x = \frac{\pi(1 + 20)}{6} = \frac{21\pi}{6}$

$\frac{21\pi}{6} > \frac{5\pi}{2}$

$21 > 15$

$k \notin \text{OK}$

$k = -1: x = \frac{\pi(1 + 10)}{6} = \frac{11\pi}{6}$

$\frac{3\pi}{2} < \frac{11\pi}{6} < 2\pi$

$9\pi < 11\pi$ $k \notin \text{OK}$

$k = 0: x = \frac{\pi}{6}$ OK

$k = 1: x = \frac{\pi(1 - 10)}{6} = -\frac{9\pi}{6}$
 $= -\frac{3\pi}{2}$ OK

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

① $a, b, c \in \mathbb{N}$

Черновик

$$ab : 2^7 \cdot 3^{11} \cdot 5^{14} \quad (1)$$

$$bc : 2^{13} \cdot 3^{15} \cdot 5^{18} \quad (2)$$

$$ac : 2^{14} \cdot 3^{17} \cdot 5^{43} \quad (3)$$

Найти: $\min(abc) - ?$

$$ab = 2^7 \cdot 3^{11} \cdot 5^{14} \cdot \frac{1}{2} x$$

$$a = \frac{2^7 \cdot 3^{11} \cdot 5^{14} \cdot \frac{1}{2} x}{b} \rightarrow (3) \quad \frac{c \cdot x}{b} \cdot 2^7 \cdot 3^{11} \cdot 5^{14} = 2^{14} \cdot 3^{17} \cdot 5^{43} y$$

$$43 - 15 = 33 - 5 = 28$$

$$cx = by \cdot 2^7 \cdot 3^6 \cdot 5^{28}$$

$$b = \frac{cx}{y} \quad c = \frac{by \cdot \dots}{x}$$

$$\frac{b^2 y}{x} \cdot 2^7 \cdot 3^6 \cdot 5^{28} = 2^{13} \cdot 3^{15} \cdot 5^{18} \cdot 2$$

$$b^2 = \frac{2x \cdot 2^6 \cdot 3^9}{y \cdot 5^{10}} \quad \text{крив}$$

$$\text{Идея } (1) \cdot (2) \cdot (3) : 2^{34} \cdot 3^{43} \cdot 5^{75}$$

$a^2 b^2 c^2$ - причём это квадрат, поэтому $abc \geq 2^{17} \cdot 3^{22} \cdot 5^{38}$

$$\begin{aligned} a &= 2^6 \\ b &= 2^8 \\ c &= 2^8 \end{aligned}$$

$$a = 2^4 \cdot 3^7 \cdot 5^{14}$$

$$b = 2^3 \cdot 3^5 \cdot 5^0$$

$$c = 2^{10} \cdot 3^{10} \cdot 5^{29}$$

$$ac : 5^{43} \Rightarrow abc : 5^{43}$$

$$43 - 14 = 29$$

$$\frac{3\pi}{2} < \frac{11\pi}{6} < \frac{5\pi}{2}$$

$$9\pi < 11\pi < 15\pi \text{ верно}$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Задача 4

$$\begin{cases} x+3ay-7b=0 & (1) \end{cases}$$

$$\begin{cases} (x^2+14x+y^2+45)(x^2+y^2-9)=0 & (2) \end{cases}$$

найти a , для
которых $\exists b$, при
котором система
имеет ровно 4
решения

$$(2) (x^2+14x+y^2+45)(x^2+y^2-9)=0$$

II

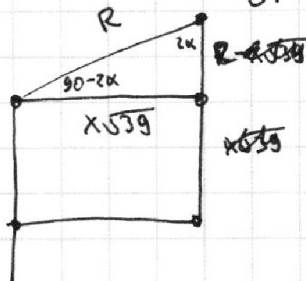
$$\begin{cases} x^2+14x+49+y^2=4 & \Leftrightarrow (x+7)^2+y^2=2^2 - \text{окружность с центром в } (-7;0) \text{ и радиусом } 2 \\ x^2+y^2=9 & - \text{окружность с центром в } (0;0) \text{ и радиусом } 3 \end{cases}$$

$$(1) x=-3ay+7b$$

Черновик

$$EC \cdot (EC+EK) = AC^2 = x^2 \cdot 39$$

$$CF \cos \beta (CF \cos \beta + \sqrt{4R^2 -$$



$$180^\circ - 2\alpha - 90^\circ = 90^\circ - 2\alpha$$

$$x\sqrt{39} = R \sin 2\alpha =$$

$$\cos \alpha = \sqrt{1 - \sin^2 \alpha}$$

$$\sin 2\alpha = 1 - \cos$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Задание 6

Пусть $F(A) = \chi$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

