



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

11 КЛАСС. Вариант 3



1. [4 балла] Натуральные числа a, b, c таковы, что ab делится на $2^8 3^{14} 5^{12}$, bc делится на $2^{12} 3^{20} 5^{17}$, ac делится на $2^{14} 3^{21} 5^{39}$. Найдите наименьшее возможное значение произведения abc .
2. [5 баллов] Дан прямоугольный треугольник ABC . Окружность, касающаяся прямой BC в точке B , пересекает высоту CD , проведённую к гипотенузе, в точке F , а катет AC – в точке E . Известно, что $AB \parallel EF$, $AD : DB = 5 : 2$. Найдите отношение площади треугольника ABC к площади треугольника CEF .

3. [4 балла] Решите уравнение $10 \arcsin(\cos x) = \pi - 2x$.

4. [5 баллов] Найдите все значения параметра a , для каждого из которых найдётся значение параметра b , при котором система уравнений

$$\begin{cases} ax - 3y + 4b = 0, \\ (x^2 + y^2 - 1)(x^2 + y^2 - 20y + 64) = 0 \end{cases}$$

имеет ровно 4 решения.

5. [5 баллов] Некоторые числа x и y удовлетворяют равенствам

$$\log_5^4(2x) - 3 \log_{2x} 5 = \log_{8x^3} 625 - 3, \quad \text{и} \quad \log_5^4 y + 4 \log_y 5 = \log_{y^3} 0,2 - 3.$$

Найдите все возможные значения произведения xy .

6. [5 баллов] На координатной плоскости дан параллелограмм с вершинами в точках $O(0; 0)$, $P(-16; 80)$, $Q(2; 80)$ и $R(18; 0)$. Найдите количество пар точек $A(x_1; y_1)$ и $B(x_2; y_2)$ с целыми координатами, лежащих в этом параллелограмме (возможно, на границе) и таких, что $5x_2 - 5x_1 + y_2 - y_1 = 45$.

7. [6 баллов] Дана треугольная пирамида $SABC$, медианы AA_1 , BB_1 и CC_1 треугольника ABC пересекаются в точке M . Сфера Ω касается ребра AS в точке L и касается плоскости основания пирамиды в точке K , лежащей на отрезке AM . Сфера Ω пересекает отрезок SM в точках P и Q . Известно, что $SP = MQ$, площадь треугольника ABC равна 100, $SA = BC = 16$.

а) Найдите произведение длин медиан AA_1 , BB_1 и CC_1 .

б) Найдите двугранный угол при ребре BC пирамиды, если дополнительно известно, что Ω касается грани BCS в точке N , $SN = 4$, а радиус сферы Ω равен 5.



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☒	☐	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Задача № 1)

Пусть $a = 2^{\alpha_1} \cdot 3^{\beta_1} \cdot 5^{\gamma_1}$. Заме-
тим, что если в разложении
 a на простые множители при-
сутствует простой множитель
 $p \neq 2, 3, 5$, то выкинув его
делимость не нарушится, а
 a, b, c уменьшится $\Rightarrow a$ только
на $2, 3, 5$. a представим
в виде $2^{\alpha_1} \cdot 3^{\beta_1} \cdot 5^{\gamma_1}$. Аналогично,
для b и c : $b = 2^{\alpha_2} \cdot 3^{\beta_2} \cdot 5^{\gamma_2}$,
 $c = 2^{\alpha_3} \cdot 3^{\beta_3} \cdot 5^{\gamma_3} \Rightarrow$

для произведения a и b :

$$\begin{cases} \alpha_1 + \alpha_2 \geq 8 \\ \beta_1 + \beta_2 \geq 14 \\ \gamma_1 + \gamma_2 \geq 12 \end{cases}$$

Аналогично для b и c :

$$\begin{cases} \alpha_2 + \alpha_3 \geq 12 \\ \beta_2 + \beta_3 \geq 20 \\ \gamma_2 + \gamma_3 \geq 17 \end{cases} \quad \begin{cases} \alpha_1 + \alpha_3 \geq 14 \\ \beta_1 + \beta_3 \geq 21 \\ \gamma_1 + \gamma_3 \geq 39 \end{cases}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☒	☐	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Задача №1) (продолжение)

Сложим все 1-ые ур-я системы,
все 2-ые и все 3-и!

$$\begin{cases} 2x_1 + 2x_2 + 2x_3 \geq 34 \\ 2y_1 + 2y_2 + 2y_3 \geq 55 \\ 2z_1 + 2z_2 + 2z_3 \geq 68 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 \geq 17 \\ y_1 + y_2 + y_3 \geq 27,5 \\ z_1 + z_2 + z_3 \geq 34 \end{cases}$$

Т.к. a, b, c - натуральные $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ рациональные! $y_1 + y_2 + y_3 -$

- целое $\Rightarrow y_1 + y_2 + y_3 \geq 28$

$$\begin{aligned} \Rightarrow abc &= 2^{x_1+x_2+x_3} \cdot 3^{y_1+y_2+y_3} \cdot 5^{z_1+z_2+z_3} \\ &\geq 2^{17} \cdot 3^{28} \cdot 5^{34} \end{aligned}$$

Пример:

$$a = 2^5 \cdot 3^8 \cdot 5^{12}$$

$$b = 2^3 \cdot 3^6$$

$$c = 2^9 \cdot 3^{14} \cdot 5^{17}$$

Ответ!

$$2^{17} \cdot 3^{28} \cdot 5^{34}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

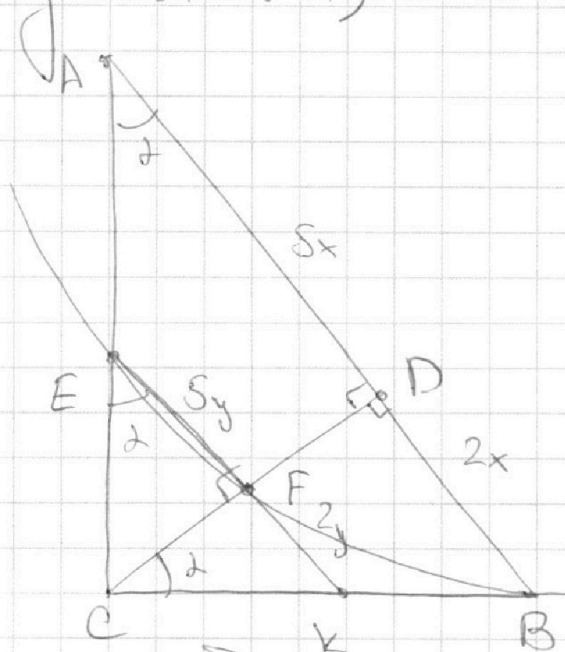
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☒	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Задача №2)



$AB \parallel EF$

$$\frac{AD}{DB} = \frac{5}{2}$$

$$\frac{S_{ABC}}{S_{CEF}} = ?$$

1. Пусть $AD = 5x$
 $\Rightarrow DB = 2x$

Т.к. параллельные
прямые

высекают на
узле подобные треугольники $\frac{EF}{AD} = \frac{CF}{CD} = \frac{FK}{DB}$
 $\Rightarrow$ Пусть $EF = 5y$, $FK = 2y$

2. Из подобия $\triangle CDA$ и $\triangle BDC$: $\angle EFC = 90^\circ = \angle CDA$

$$\frac{AD}{CD} = \frac{DB}{CD} \Rightarrow CD^2 = AD \cdot DB \Rightarrow CD = \sqrt{10} \cdot x$$

3. По т.-ме Пифагора для $\triangle CDB$:

$$CB^2 = 4x^2 + 10x^2 = 14x^2 \Rightarrow CB = \sqrt{14} \cdot x$$

4. Степень т.-ки к отн. окр:

$$KB^2 = KF \cdot KE \Rightarrow KB^2 = 2y \cdot 7y = 14y^2$$

$$\Rightarrow KB = \sqrt{14} y$$

5. В силу того, что $\frac{CF}{CD} = \frac{FK}{DB}$ ($\triangle CFK \sim \triangle CDB$)

$$\frac{CK}{CB} = \frac{y}{x} \Rightarrow CK = \sqrt{14} x \cdot \frac{y}{x} \Rightarrow CK = \sqrt{14} y = KB$$

$\Rightarrow K$ - центр $CB \Rightarrow \triangle ACB \sim \triangle ECK$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☒	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Задача №2 (продолжение)

коэф. 2. $\Rightarrow S_{ECK} = \frac{1}{7} S_{ABC}$

Т.к. CF делит EK в отношении

$$5:2, \quad \frac{S_{ECF}}{S_{CFK}} = \frac{5}{2} \Rightarrow S_{ECF} = \frac{5}{2} S_{CFK} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow S_{ECK} = S_{ECF} + S_{CFK} = \frac{7}{2} S_{CFK} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow S_{ECK} = \frac{7}{2} S_{ECF}, \Rightarrow S_{ECF} = \frac{2}{7} S_{ECK} =$$

$$= S_{ECF} = \frac{2}{7} \cdot \frac{1}{7} S_{ABC} = S_{ECF} = \frac{2}{49} S_{ABC}$$

Ответ: $\frac{28}{5}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☒	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



Задача № 3

$$10 \arcsin(\cos x) = \pi - 2x$$

Область значения арксинуса:

$$-\frac{\pi}{2} \leq \arcsin a \leq \frac{\pi}{2}$$

$$-\pi \leq \pi - 2x \leq \pi$$

$$\begin{cases} 2x \geq -4\pi \\ 2x \leq 6\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -2\pi \\ x \leq 3\pi \end{cases}$$

$$10 \arcsin(\cos x) = \pi - 2x$$

$$5\pi - 10 \arccos(\cos x) = \pi - 2x$$

Рассмотрим все случаи раскрытия аркосинуса на промеж.

$$-2\pi \leq x \leq 3\pi$$

1) $-2\pi \leq x \leq -\pi$:

$$5\pi - 10(x + 2\pi) = \pi - 2x$$

$$-15\pi - 10x = \pi - 2x$$

$$8x = -16\pi$$

$$x = -\frac{16\pi}{8} = -2\pi$$

— в ответ



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☒	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Задача № 3 (продолжение)

2. $-\pi \leq x \leq 0$

$$5\pi - 10(-x) = \pi - 2x$$

$$5\pi + 10x = \pi - 2x$$

$$12x = -4\pi$$

$$x = -\frac{\pi}{3} - \text{б ответ}$$

3. $0 \leq x \leq \pi$

$$5\pi - 10x = \pi - 2x$$

$$8x = 4\pi$$

$$x = \frac{\pi}{2} - \text{б ответ}$$

4. $\pi \leq x \leq 2\pi$:

$$5\pi - 10(2\pi - x) = \pi - 2x$$

$$-15\pi + 10x = \pi - 2x$$

$$12x = 16\pi$$

$$x = \frac{4}{3}\pi - \text{б ответ}$$

5. $2\pi \leq x \leq 3\pi$:

$$5\pi - 10(x - 2\pi) = \pi - 2x$$

$$5\pi - 10x + 20\pi = \pi - 2x$$

$$24\pi = 8x - \text{б ответ}$$

$$x = 3\pi$$

Ответ:

$$x \in \left\{ -2\pi, -\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}, \frac{4}{3}\pi, 3\pi \right\}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☒	☐	☐	☐

МФТИ

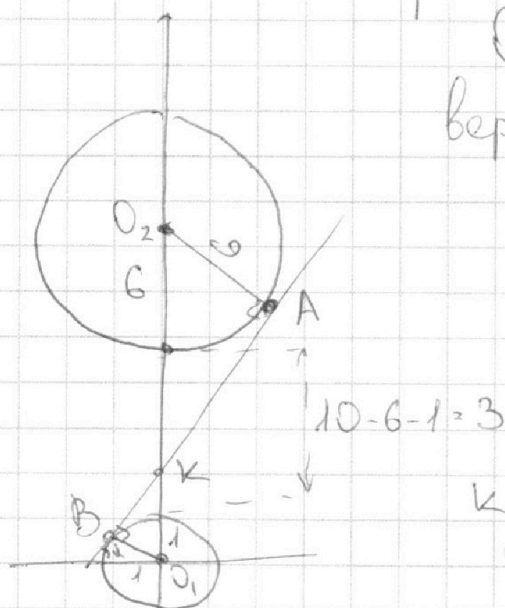
Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



Задача №4) (продолжение)
(предельный случай)

касательной то находится
т.к. внешн. касат. имеет наклон меньше внутр. касат. (если бы наклон был больше, то касат. пересекались бы)
решение, т.к. коэф. 0 отвечает

за ~~наклон~~ пересечение сдвиг
прямой. Наблюдим наклон из
внутр. касат., другая будет
сдвиг., отн. прямой $x=0$.



O_1, O_2 - центры
верхней и нижней окр.
соответ.

A, B - т.к. касания
прямой верхней
и нижней окр.

K - пересечение
касат. и прямой $x=0$

Пусть $\angle BO_1K = \alpha$,

а $O_2K = 6 + a$. В силу подобия $\triangle$
 BO_1K и $\triangle O_2AK$ $\angle KO_2A = \alpha$

$$\cos \alpha = \frac{BO_1}{O_1K} = \frac{O_2A}{O_2K} = \frac{1}{4-a} = \frac{6}{6+a} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a+6 = 24-6a \Rightarrow a = \frac{18}{7}$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☒	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Задача №4 (продолжение №2)

⇒ Наклон прямой $\tan \alpha = \frac{k_{O_1}}{30_1}$

где S - точка пересечения касат.

с прямой $y \geq 0 \Rightarrow \tan \alpha = \tan \angle BO_1K$

в силу высоты в прям. треуго. $\Rightarrow$

$$\Rightarrow \tan \angle BO_1K = \frac{BK}{BO_1} = BK = \sqrt{\left(1 - \frac{18}{7}\right)^2 - 1}$$

$$= \sqrt{\frac{100}{49} - 1} = \sqrt{\frac{51}{49}} = \frac{\sqrt{51}}{7}$$

$$\Rightarrow \left| \frac{a}{3} \right| \geq \frac{\sqrt{51}}{7} - \text{строгий}$$

знак, т.к. 2 решения не подходят

$$\Rightarrow \begin{cases} a > \frac{3}{7}\sqrt{51} \\ a < -\frac{3}{7}\sqrt{51} \end{cases}$$

$$\text{Ответ: } a \in \left(-\infty; -\frac{3}{7}\sqrt{51}\right) \cup \left(\frac{3}{7}\sqrt{51}; +\infty\right)$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☒	☐	☐	☐

МФТИ

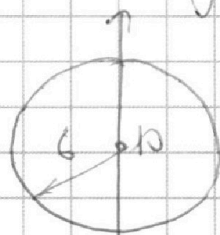
Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Задача 24)

Построим на координатной плоскости множество точек, удовлетворяющих второму ур-ю.

$$(x^2 + y^2 - 1)(x^2 + (y^2 - 10)^2 - 36) = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 = 1 \\ x^2 + (y^2 - 10)^2 = 36 \end{cases} \leftarrow 2 \text{ окружности}$$



центры окр. $(0,0)$
и $(0,10)$

радиусы 1 и 6
соответственно



первое
ур-е

Прямая должна пересекать каждую из окр. дважды. задает прямую с наклоном $\frac{a}{3}$

Заметим, что

$$y = \frac{a}{3}x + \frac{4}{3}$$

если наклон

данной прямой по модулю не превосходит наклон внутр.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7
☐ ☐ ☐ ☐ ☒ ☐ ☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Задача №5

$$2x \neq 1$$

$$y \neq 1$$

$$\text{Пусть } \log_5 2x = a$$

$$\log_5 y = b$$

$$\log_5^4(2x) - 3 \log_{2x} 5 = \log_{2x} 625 - 3$$

$$\log_5^4(2x) - 3 \frac{1}{\log_5 2x} = 3 \frac{1}{\log_5 2x} - 3$$

$$a^4 - 3 \frac{1}{a} - \frac{4}{3} \frac{1}{a} + 3 = 0$$

$$a^4 - \frac{13}{3} \frac{1}{a} + 3 = 0$$

$$\log_5^4 y + 4 \log_y 5 = \log_y 302 - 3$$

$$\log_5^4 y + 4 \frac{1}{\log_5 y} = -\frac{1}{3} \log_5 y - 3$$

$$b^4 + \frac{13}{3} b + 3 = 0$$

Ответ:
 $xy = \frac{1}{2}$

Заметим, что функция $f(t) = t^4 + \frac{13}{3}t + 3$

имеет ровно 1 пересечение с осью

Заменив этот корень на $-t$, мы

получим корень ур-я $a^4 - \frac{13}{3} \frac{1}{a} + 3 = 0$.

$\Rightarrow a_0 + b_0 = 0 \Rightarrow$ заменив каждый корень

ур-я $a^4 - \frac{13}{3} \frac{1}{a} + 3 = 0$ на

$\Rightarrow \log_5 2x + \log_5 y = \log_5 xy + \log_5 2 = 0$ а получим корень

ур-я $b^4 + \frac{13}{3} \frac{1}{b} + 3 = 0$

$\Rightarrow 2xy = 1 \Rightarrow xy = \frac{1}{2}$ Ответ $\Rightarrow$ их корней одинаково



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☒	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Задача № 6)

Выберем т-ку внутри паралл. Множество т-чек подтод-к ней в пару элемент на прямой

$$5(x_2 - x_1) + (y_2 - y_1) = 45 \text{ для}$$

т.к. ОРДР - парал., каждой
выбраной разности подтодит
4 ра



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$3) \quad 10 \operatorname{arcsin}(\cos x) = \pi - 2x \quad \begin{array}{r} 39 \\ + 17 = \\ \hline 56 \\ + 12 \\ \hline 68 \end{array}$$

$$\operatorname{arcsin}(\cos x) = \alpha$$

$$\sin \alpha = \cos x$$

$$\operatorname{arccos}(\sin x)$$

$$2^8 \cdot 3^{14} \cdot 5^{12} \quad \begin{array}{c} 1 \\ \triangle \\ \sqrt{1 - \cos^2 x} = |\sin x| \end{array}$$

$$1) \quad ab : 2^8 \cdot 3^{14} \cdot 5^{12}$$

$$bc : 2^{12} \cdot 3^{20} \cdot 5^{17}$$

$$ac : 2^{14} \cdot 3^{21} \cdot 5^{39}$$

$$abc$$

$$34$$

$$a = 2^{\alpha_1} \cdot 3^{\beta_1} \cdot 5^{\gamma_1}$$

$$b = 2^{\alpha_2} \cdot 3^{\beta_2} \cdot 5^{\gamma_2}$$

$$c = 2^{\alpha_3} \cdot 3^{\beta_3} \cdot 5^{\gamma_3}$$

$$2\alpha_1 + 2\alpha_2 + 2\alpha_3$$

$$\alpha_1 + \alpha_2 \geq 8$$

$$\alpha_2 + \alpha_3 \geq 12$$

$$\alpha_1 + \alpha_3 \geq 14$$

$$\beta_1 + \beta_2 \geq 14$$

$$\beta_2 + \beta_3 \geq 20$$

$$\beta_1 + \beta_3 \geq 21$$

$$\gamma_1 + \gamma_2 \geq 12$$

$$\gamma_2 + \gamma_3 \geq 17$$

$$\gamma_1 + \gamma_3 \geq 39$$

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Пример!

$\alpha_1 = 4$
 $\beta_1 = 1$
 $\gamma_1 = 1$

$\alpha_2 = 7$

$\alpha_1 = 5$

$\beta_1 = 8$

$\gamma_1 = 12$

$\alpha_2 = 3$

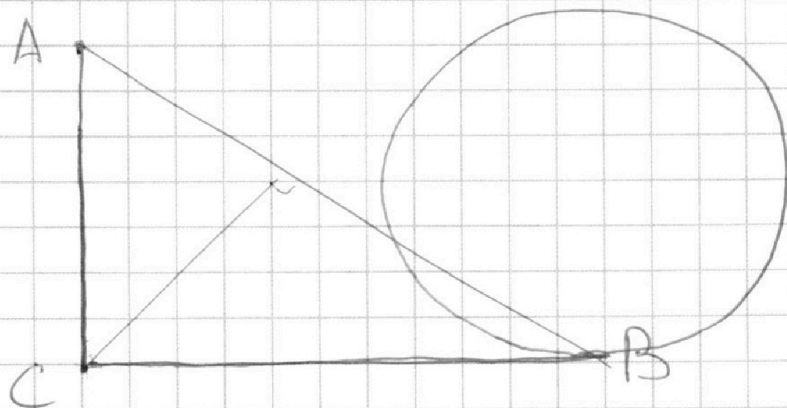
$\beta_2 = 6$

$\gamma_2 = 4$

$\alpha_3 = 9$

$\beta_3 = 14$

$\gamma_3 = 17$



5 13

18

23

28

34



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☒	☒	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Задача № 3)

$$10 \arcsin(\cos x) = \pi - 2x$$

Область определения арккосинуса:

$$-\frac{\pi}{2} \leq \arcsin a \leq \frac{\pi}{2}$$

$$\Downarrow$$
$$-\pi \leq \pi - 2x \leq \pi$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2x \geq -4\pi \\ 2x \leq 6\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -2\pi \\ x \leq 3\pi \end{cases}$$

$$10 \arcsin(\cos x) = \pi - 2x$$

$$5\pi - \arccos(\cos x) = \pi - 2x$$

1. $-2\pi \leq x \leq -\pi$

$$5\pi - (x + 2\pi) = \pi - 2x$$

$$3\pi - x = \pi - 2x$$

$$x = -2\pi \text{ — в ответ}$$

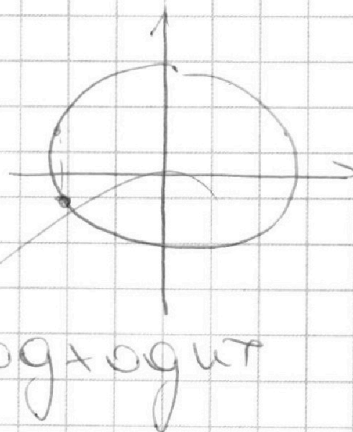
2. $-\pi \leq x \leq 0$

$$5\pi - (x + \pi) = \pi - 2x$$

$$5\pi - (-x) = \pi - 2x$$

$$3x = -4\pi$$

$$x = -\frac{4}{3}\pi \text{ — не подходит}$$





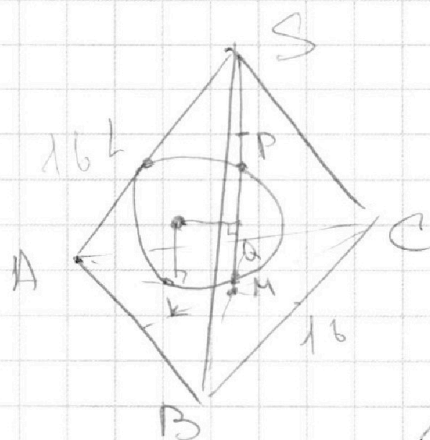
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$S_{ABC} = 100$$

$$AA_1, BB_1, CC_1$$

$$10 \arcsin(\cos x) = \pi - 2x$$

$$5\pi - \arccos(\cos x) = \pi - 2x$$

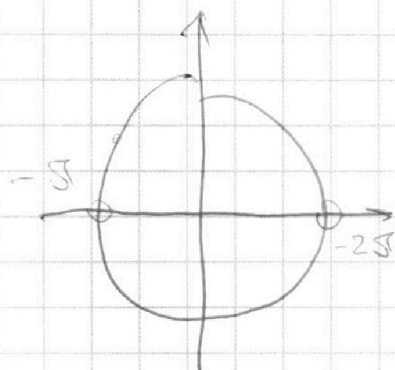
$$\rightarrow 5\pi \leq \pi - 2x \leq 5\pi$$

$$2x \geq -4\pi$$

$$2x \leq 6\pi$$

$$\begin{cases} x \geq -2\pi \\ x \leq 3\pi \end{cases}$$

$$x \leq 3\pi$$



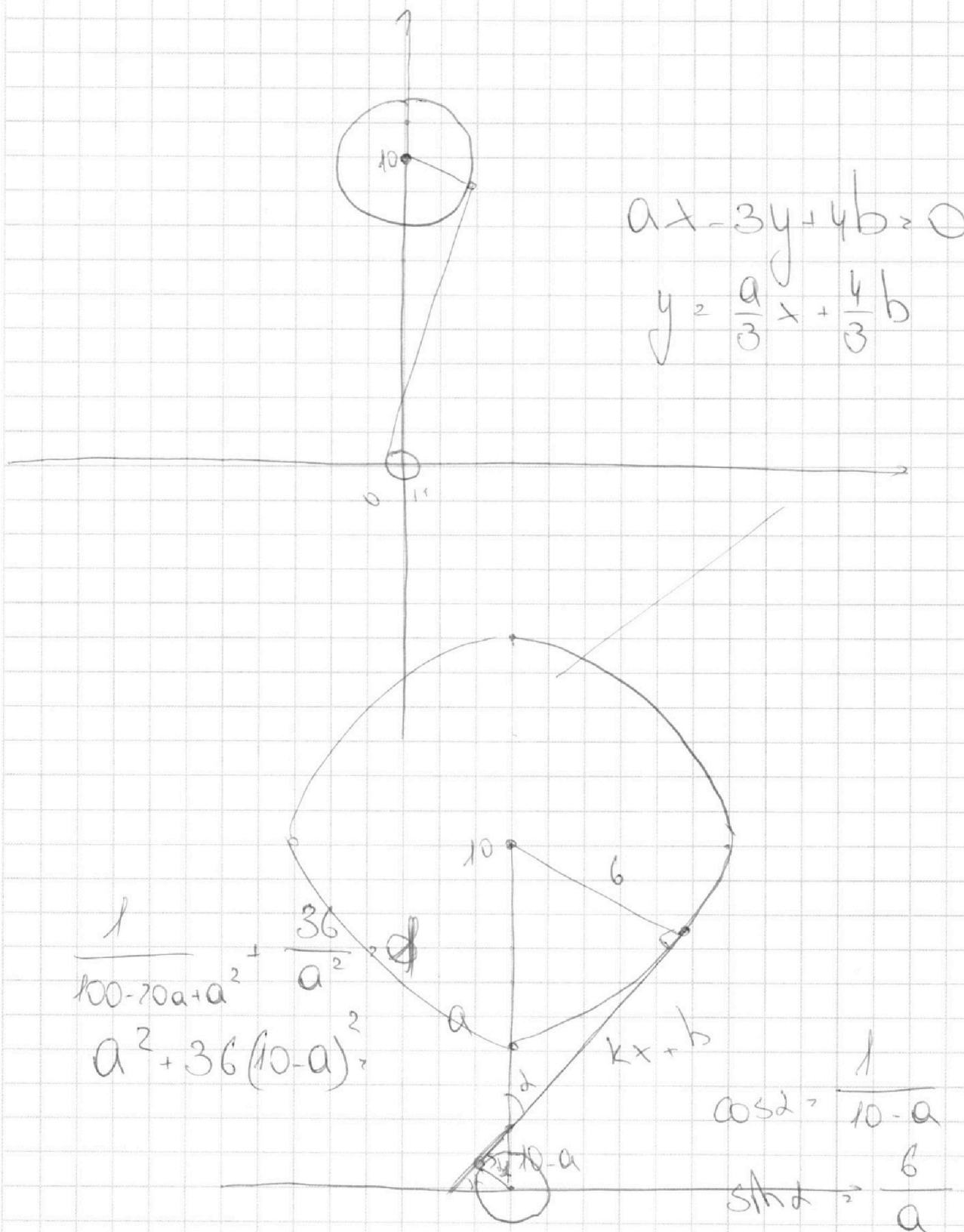
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!





На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1

☐

2

☐

3

☐

4

☐

5

☐

6

☐

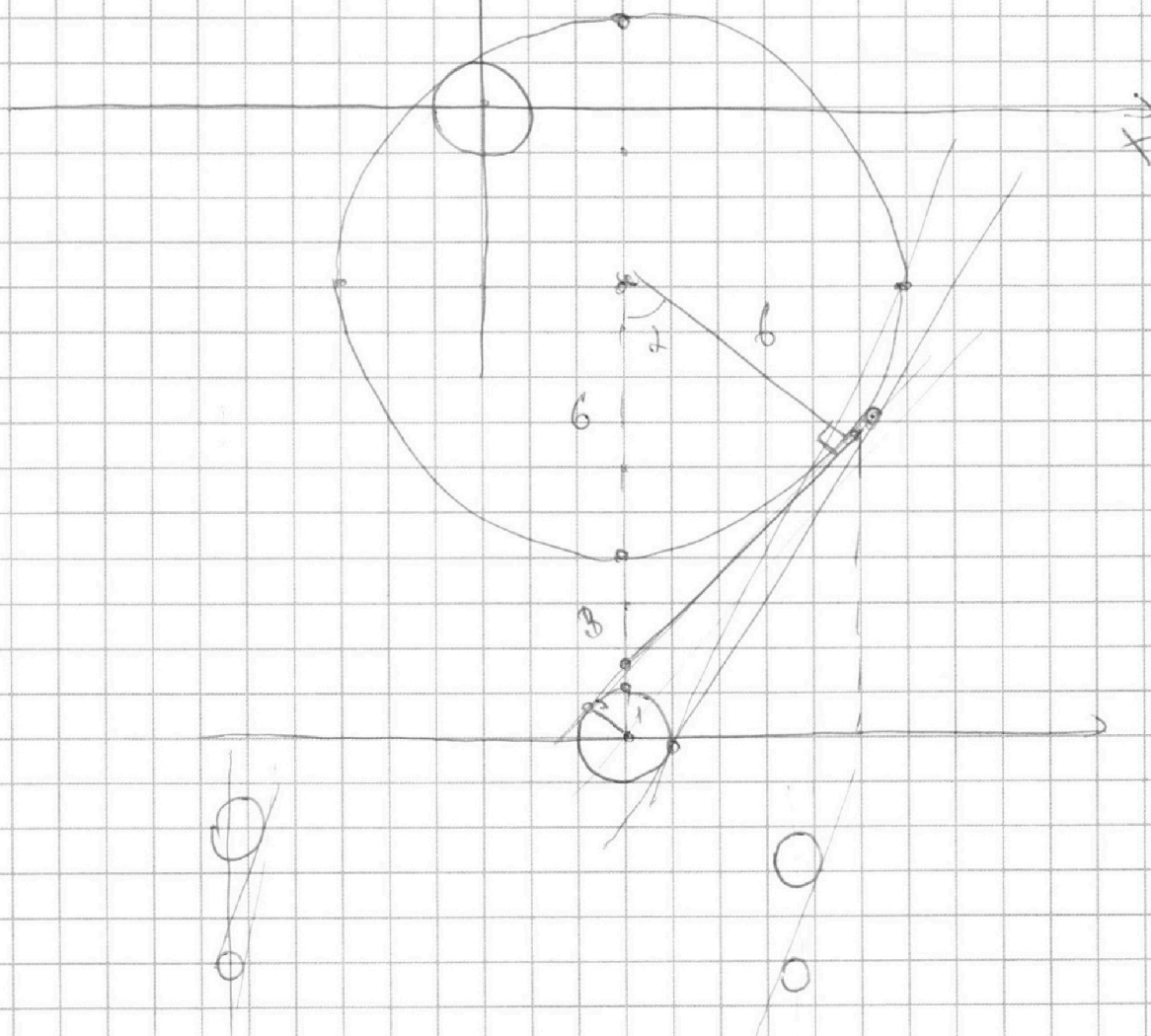
7

☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

4) $(x^2 + y^2 - 1)(x^2 + (y^2 - 20y + 100) - 36) = 0$





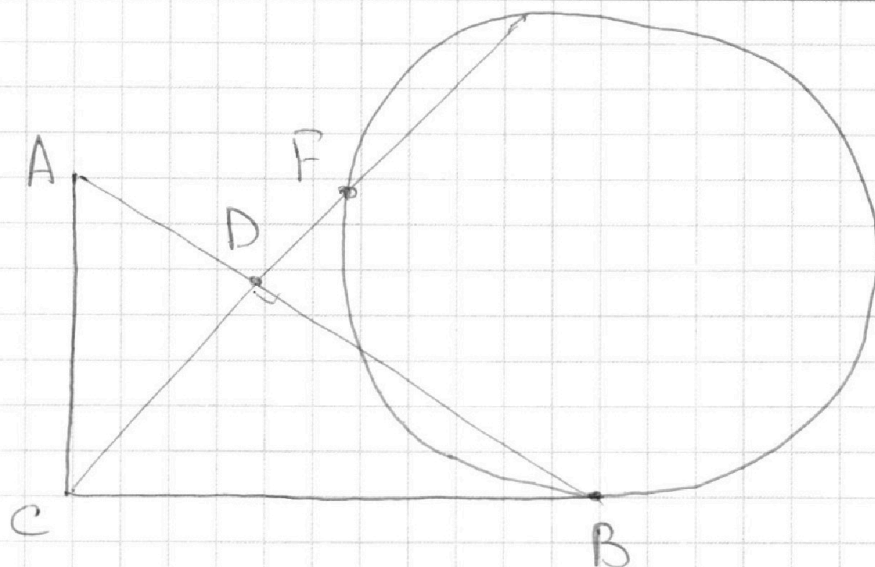
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

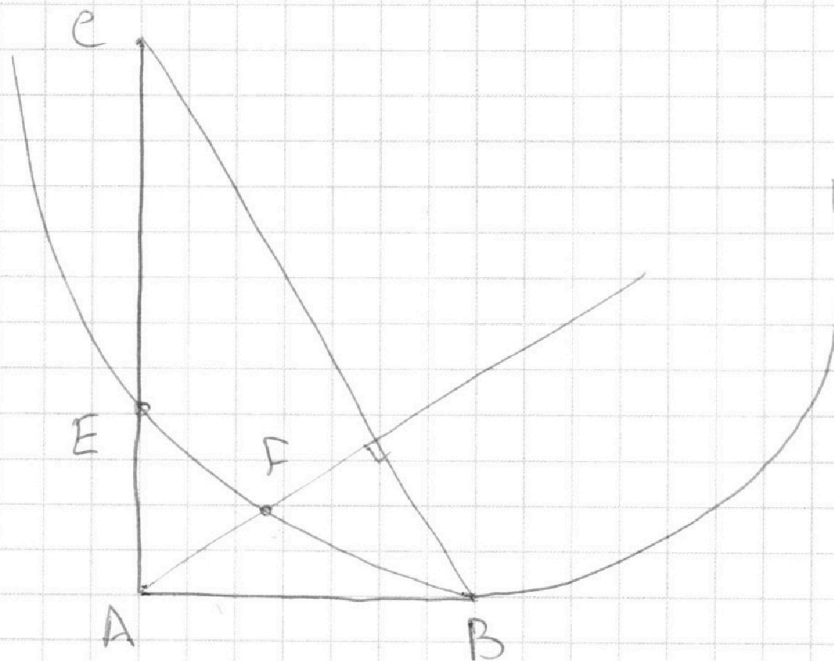
1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$\frac{AB}{EF} =$$





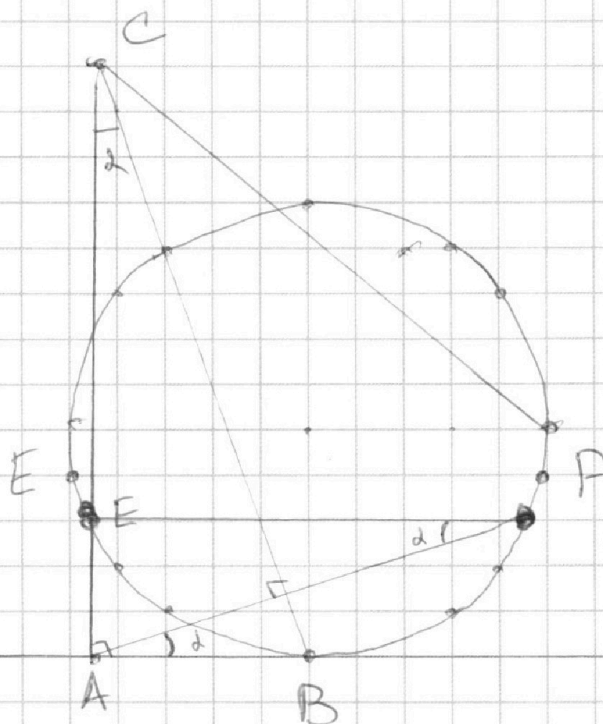
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

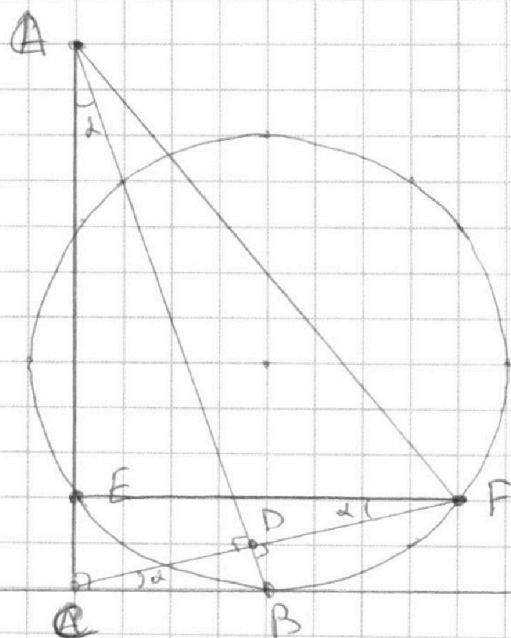
МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$\frac{S_{ABC}}{S_{CEF}}$$

$$\frac{2}{5}$$



$$\frac{S_{ABC}}{S_{CEF}}$$

$$\frac{2}{5}$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$10 \arccos(\cos x) = \pi - 2x$$

$$\arccos(a) + \operatorname{arccsh}(a) = \frac{\pi}{2}$$

$$10 \cdot \frac{\pi}{2} - 10 \arccos(\cos x) = \pi - 2x$$

$$\begin{cases} 5\pi - 10x = \pi - 2x \\ -5\pi \leq \pi - 2x \leq 5\pi \end{cases}$$

$$\begin{cases} 4\pi = 8x \\ 2x \leq 6\pi \\ 2x \geq -4\pi \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = \frac{\pi}{2} \\ x \leq 3\pi \\ x \geq -2\pi \end{cases}$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\log_5^4(2x) - 3 \log_{2x} 5 = \log_{8x^3} 625 - 3$$
$$\log_{8x^3} 625 \quad 5^4$$

$$t^4 - 3 \frac{1}{t} = \frac{4}{3} \cdot t - 3$$

$$\left\{ \begin{aligned} t^4 - 3 \frac{1}{t} - \frac{4}{3} t + 3 &= 0 \\ k^4 + \frac{4}{k} + \frac{1}{3} k + 3 &= 0 \end{aligned} \right.$$

$$xy = ?$$

$$t + k = \log_5(2x \cdot y)$$

$$\left\{ \begin{aligned} t^4 - \frac{3}{t} - \frac{4}{3} t + 3 &= 0 \\ k^4 + \frac{4}{k} + \frac{1}{3} k + 3 &= 0 \end{aligned} \right.$$

$$\left\{ \begin{aligned} t^5 - \frac{4}{3} t^2 + 3t + 3 &= 0 \\ k^5 + \frac{1}{3} k^2 + 4 + 3k &= 0 \end{aligned} \right.$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\log_5'(2x) - 3 \log_{2x} 5 = \log_{8x} 3625 - 3$$

$$\log_5(2x) = a$$

$$a^4 - \frac{3}{a} - \frac{4}{3}a + 3 = 0$$

$$\log_5' y + 4 \log_y 5 = \log_y 302 - 3$$

$$\log_5 y = b$$

$$b^4 + \frac{4}{b} + \frac{1}{3}b + 3 = 0$$

$$a^4 - \frac{4}{3}a - \frac{3}{a} + 3 = 0$$

$$b^4 + \frac{b}{3} + \frac{4}{b} + 3 = 0$$

$$\begin{cases} a^5 - \frac{4}{3}a^2 + 3a - 3 = 0 \\ b^5 + \frac{1}{3}b^2 + 3b + 4 = 0 \end{cases}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ



$$\begin{cases} a^5 - \frac{4}{3}a^2 + 3a - 3 = 0 \\ b^5 + \frac{4}{3}b^2 + 3b + 4 = 0 \end{cases}$$

$$3a^5 - 4a^2 + 9a - 9 = 0$$

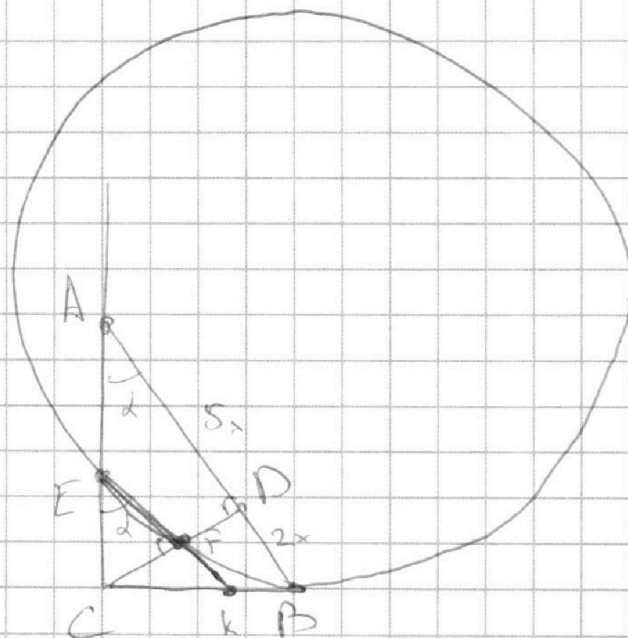
$$3a^5 - 4a^2 + 9a - 9 = 0$$

$$\frac{\sqrt{6}x - \sqrt{4}y}{\sqrt{6}x} = \frac{y}{x}$$

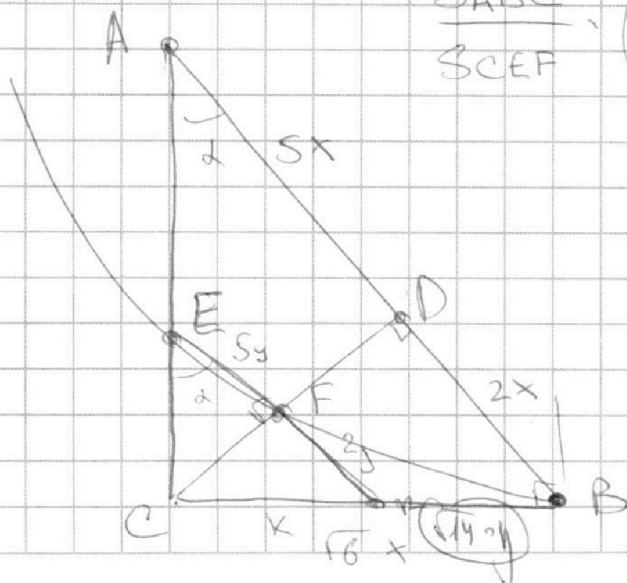
$$\sqrt{6}x^2 - \sqrt{4}y \cdot x - \sqrt{6}x \cdot y$$

$$\sqrt{6}x^2 - (\sqrt{4} + \sqrt{6})x \cdot y$$

$$\frac{CF}{CD} = \frac{FK}{DB}$$



$$\frac{S_{ABE}}{S_{CEF}}, \left(\frac{CB}{CF}\right)^2, \frac{CB^2}{CF^2}, \frac{CE \cdot CA}{CF^2}$$



$$\frac{S_{ABE}}{S_{CEF}}, \frac{CB^2}{CF^2}$$

$$= \frac{6x^2}{}$$

$$CD^2 = 10x$$

$$\frac{CD}{AD} = \frac{DB}{CD}$$

$$CD^2 = AD \cdot DB$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

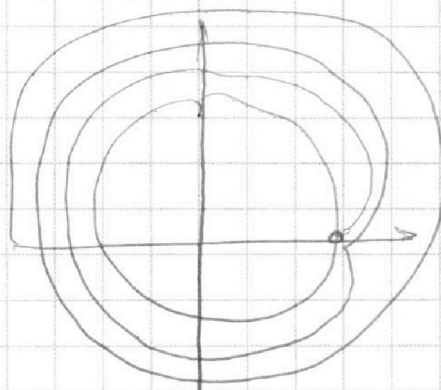
$$10 \operatorname{arcsin}(\cos x) = \pi - 2x$$

$$-5\pi \leq \pi - 2x \leq 10 \frac{\pi}{2}$$

$$2x \geq -4\pi$$

$$x \leq 6\pi$$

$$\begin{cases} x \geq -2\pi \\ x \leq 3\pi \end{cases}$$



$$\log_5^4(2x) - 3 \log_{2x} 5 = \log_{8x}^3 625 - 3$$

$$\log_5(2x) = a$$

$$a^4 - \frac{3}{a} - \frac{4}{3}a + 3 = 0$$

$$\log_5^4 y + 4 \log_y 5 = \log_y^3 0,2 - 3$$

$$\log_5 b = b$$

$$b^4 + \frac{4}{b} + \frac{1}{3}b + 3 = 0$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\log_5^4(2x) - 3 \log_{2x} 5 = \log_{8x^3 25} 3$$

$\log_5 2x$ $a \cdot b = \log_5(2 \cdot 4)$

$$\left(\frac{1}{\log_{2x} 5} \right)^4 - 3 \log_{2x} 5 = \frac{3}{3} \log_{2x} 5 - 3$$

$$\frac{1}{a^4} - 3a - \frac{4}{3}a + 3 = 0$$

$$\frac{1}{a^4} - \frac{13}{3}a + 3 = 0$$

$$\frac{1}{b^4} + \frac{4}{3}b + \frac{1}{3}b + 3 = 0$$

$$\frac{1}{b^4} + \frac{13}{3}b + 3 = 0$$

$$\frac{1}{a^4} - \frac{13}{3}a + 3 = 0$$

$$a \rightarrow b$$

$$a \rightarrow -a$$

$k = a \cdot b$
 $a = \sqrt[4]{k}$
 $b = \sqrt[4]{k}$
 $a = b$

$$\frac{13}{3}b^5 + 3b^4 + 1 = 0$$

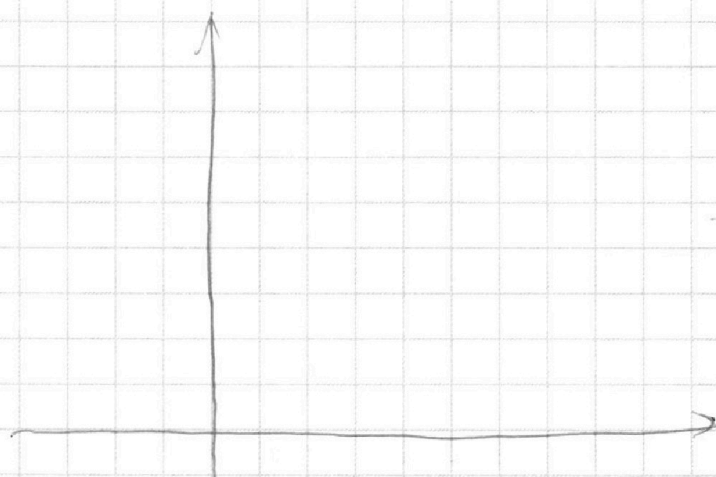
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$-4a = b$$

$$-\frac{3}{a} = \frac{4}{b}$$

$$-3b = 4a$$

$$-4a = b$$

$$a^4 - \frac{3}{a} = \frac{4}{3}a - 3$$

$$\frac{1}{625} - \frac{1}{25} - 3\sqrt{5} = \frac{4}{3\sqrt{3}} - 3$$

$$a^4 - \frac{3}{a} - \frac{4}{3}a + 3 = 0$$

$$b^4 + \frac{4}{b} + \frac{1}{3}b + 3 = 0$$

$$a+b$$

$$(b^4 - a^4) + \left(\frac{4}{b} - \frac{3}{a}\right) + \left(\frac{1}{3}b - \frac{4}{3}a\right) = 0$$

$$= \frac{4a-3b}{ab} + \frac{4a-b}{3} = 0$$



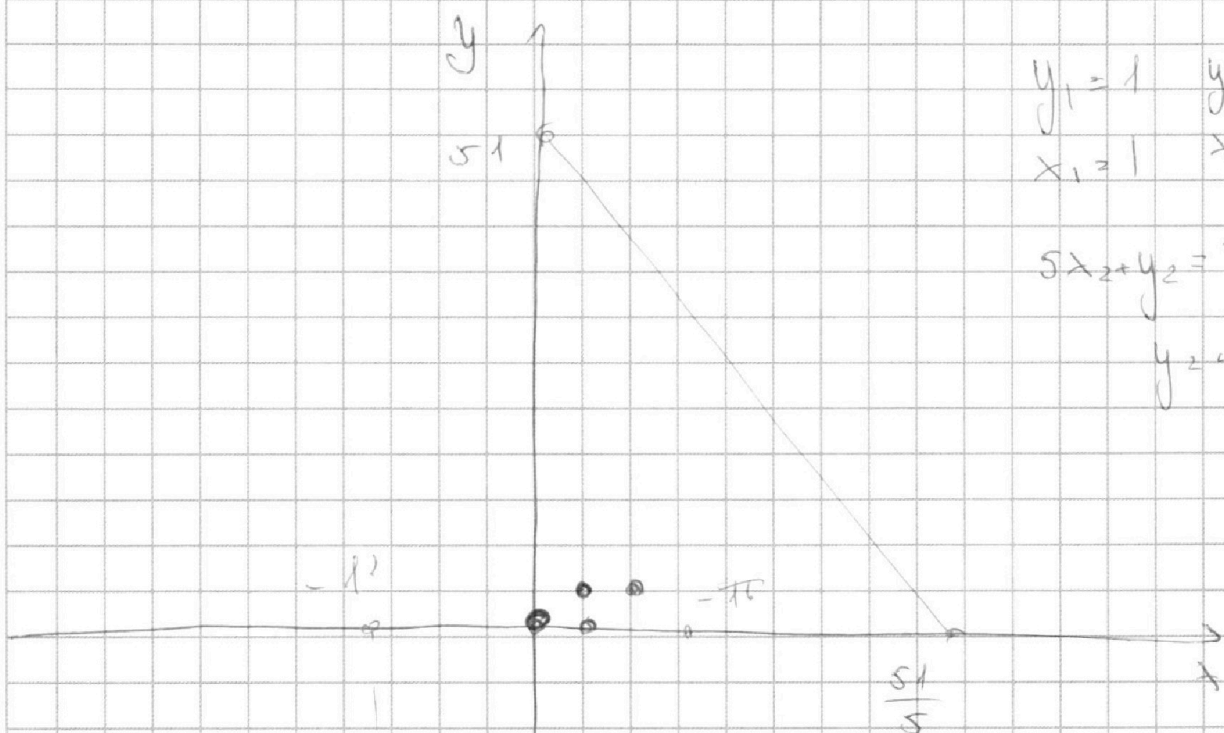
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

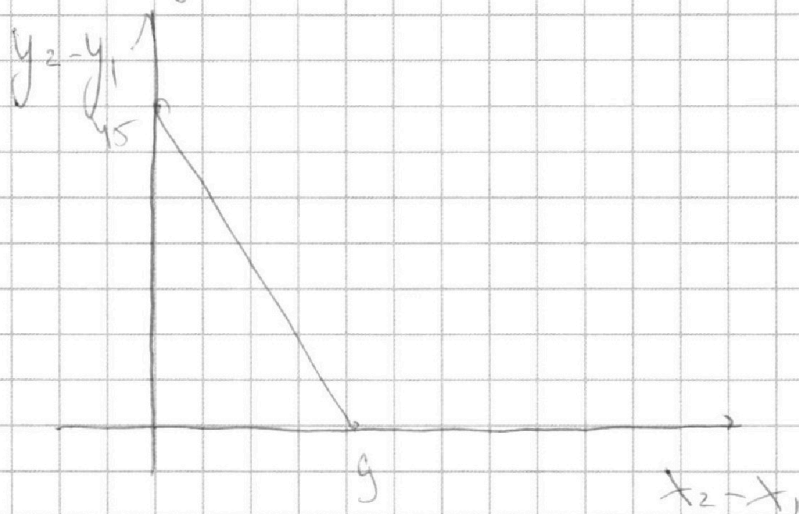


$$\begin{aligned} y_1 &= 1 & y_2 &= 1 \\ x_1 &= 1 & x_2 &= 2 \end{aligned}$$

$$5x_2 + y_2 = 51$$

$$y_2 = 51 - 5x_2$$

$$5(x_2 - x_1) + (y_2 - y_1) = 45$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{cases} a^5 - \frac{4}{3}a^2 + 3a - 3 = 0 \\ b^5 - \frac{4}{3}b^2 + 3b - 4 = 0 \end{cases}$$

$$a+b=?$$

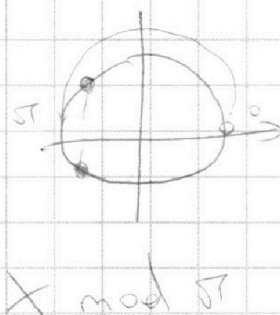
$$b^5 - \frac{4}{3}b^2 + 3b - 3 + \left(\frac{5}{3}b^2 - 1\right) = 0$$

$$\frac{\sqrt{3}}{5} \cdot \frac{3^2}{5^2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}}$$

$$\begin{aligned} & 5x_1 + y_1 \\ & (-5x_1 + y_1) + \\ & (5x_2 + y_2) + (5x_1 + y_1) = 45 \\ & -25 \leq X \leq 35 \end{aligned}$$

$$a^5 - \frac{4}{3}a^2 + 3a - 3 = 0$$

$$\frac{\sqrt{3}}{2} \cdot a^2 \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$$



$$10 \arcsin(\cos x) = \pi - 2x$$

$$5\pi - 10 \arccos(\cos x) = \pi - 2x$$

$$10 \arccos(\cos x) = 4\pi + 2x$$

$$5 \arccos(\cos x) = 2\pi + x$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

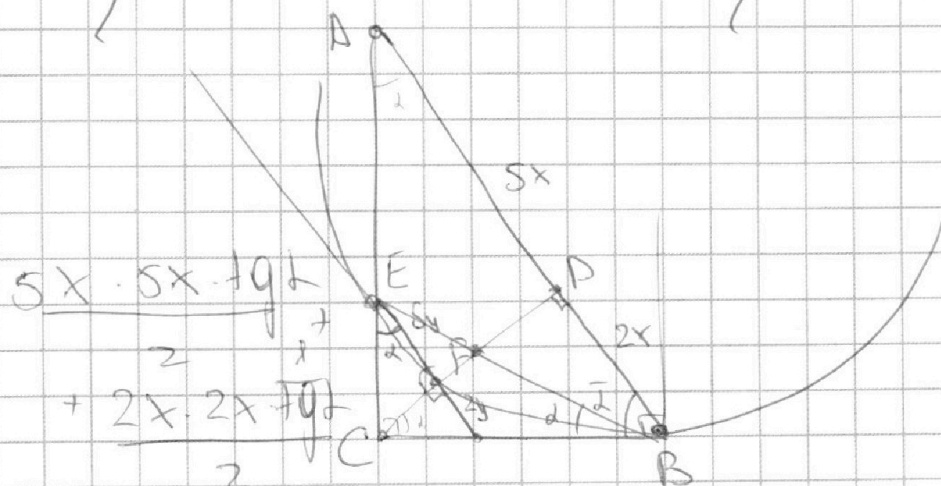
3) Задача 3

$$10 \operatorname{arctg}(\cos x) = \pi - 2x$$

$$\left\{ \begin{array}{l} 10 \frac{\pi}{2} - \operatorname{arccos}(\cos x) \cdot 10 = \pi - 2x \\ -\frac{\pi}{2} \cdot 10 \leq \pi - 2x \leq \frac{\pi}{2} \cdot 10 \end{array} \right.$$

область значений $10 \operatorname{arctg}(\cos x)$

$$\left\{ \begin{array}{l} 5\pi - \pi = \pi - 2x \\ 2x \geq \pi - 5\pi \\ 2x \leq \pi + \pi \cdot 5 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = \frac{\pi}{2} \\ x \geq -2\pi \\ x \leq 3\pi \end{array} \right.$$



$$\frac{CD}{AD} = \frac{DB}{CB} \Rightarrow CD = 10x^2$$



МФТИ

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Задача №5)

Решить первое ур-е

$$\log_5^4(2x) - 3\log_{2x} 5 = \log_{8x+3} 625 - 3$$

Пусть

$$\log_{2x+1} 5 - 3\log_{2x+1} 5 = \frac{4}{3}\log_{2x+1} 5 - 3$$

$$2x+1$$

$$1$$

$$\log_{2x+1} 5$$

$$a^4 - \frac{3}{a} - \frac{4}{3a} + 3 = 0$$

$$a^4 - \frac{1}{a} \cdot \frac{13}{3} + 3 = 0$$

$$b^4 + \frac{1}{b} \cdot \frac{13}{3} + 3 = 0$$

$$(a^4 - b^4) + \frac{13}{3} \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \right) = 0$$

$$(a^4 - b^4) + \frac{13}{3} \left(\frac{a+b}{ab} \right) = 0$$

$$(a^2 + b^2)(a - b) + \frac{13}{3}(a + b)$$

$$(a^2 + b^2)(a - b) = -\frac{13}{3ab}$$

$$a^3 + ab^2 - ba^2 - b^3$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☒	☐	☒	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Задача №3 (продолжение)

3. $0 \leq x \leq \pi$

$$5\pi - x = \pi - 2x$$

$$x = -4\pi - \text{не подходит}$$

4. $\pi \leq x \leq 2\pi$

$$5\pi - (2\pi - x) = \pi - 2x$$

$$3\pi + x = \pi - 2x$$

$$x = -\frac{2\pi}{3} - \text{не подходит}$$

5. $2\pi \leq x \leq 3\pi$

$$5\pi - (x - 2\pi) = \pi - 2x$$

$$7\pi - x = \pi - 2x$$

$$x = -6\pi - \text{не подходит}$$



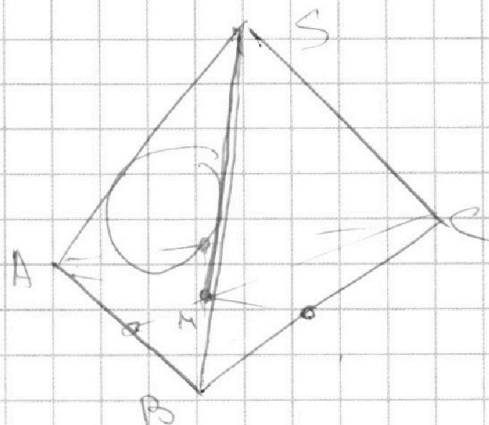
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$0 \leq \leq 5$$

$$2x_2 + y_2 = 7$$

$$2x_2 - 2x_1 + y_2 - y_1 = 5$$

$$x_1 = 1$$
$$y_1 =$$

$$2x_2 + y_2 = 5$$

$$x_1 = 1$$
$$y_1 = 0$$

$$5x_1 =$$

$$(5x_2 + y_2) = 45 + (5x_1 + y_1)$$

$$x_1 <$$

$$00 =$$

