



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

11 КЛАСС. Вариант 3



1. [4 балла] Натуральные числа a, b, c таковы, что ab делится на $2^8 3^{14} 5^{12}$, bc делится на $2^{12} 3^{20} 5^{17}$, ac делится на $2^{14} 3^{21} 5^{39}$. Найдите наименьшее возможное значение произведения abc .
2. [5 баллов] Дан прямоугольный треугольник ABC . Окружность, касающаяся прямой BC в точке B , пересекает высоту CD , проведённую к гипотенузе, в точке F , а катет AC – в точке E . Известно, что $AB \parallel EF$, $AD : DB = 5 : 2$. Найдите отношение площади треугольника ABC к площади треугольника CEF .
3. [4 балла] Решите уравнение $10 \arcsin(\cos x) = \pi - 2x$.
4. [5 баллов] Найдите все значения параметра a , для каждого из которых найдётся значение параметра b , при котором система уравнений

$$\begin{cases} ax - 3y + 4b = 0, \\ (x^2 + y^2 - 1)(x^2 + y^2 - 20y + 64) = 0 \end{cases}$$

имеет ровно 4 решения.

5. [5 баллов] Некоторые числа x и y удовлетворяют равенствам

$$\log_5^4(2x) - 3 \log_{2x} 5 = \log_{8x^3} 625 - 3, \quad \text{и} \quad \log_5^4 y + 4 \log_y 5 = \log_{y^3} 0,2 - 3.$$

Найдите все возможные значения произведения xy .

6. [5 баллов] На координатной плоскости дан параллелограмм с вершинами в точках $O(0; 0)$, $P(-16; 80)$, $Q(2; 80)$ и $R(18; 0)$. Найдите количество пар точек $A(x_1; y_1)$ и $B(x_2; y_2)$ с целыми координатами, лежащих в этом параллелограмме (возможно, на границе) и таких, что $5x_2 - 5x_1 + y_2 - y_1 = 45$.
7. [6 баллов] Дана треугольная пирамида $SABC$, медианы AA_1 , BB_1 и CC_1 треугольника ABC пересекаются в точке M . Сфера Ω касается ребра AS в точке L и касается плоскости основания пирамиды в точке K , лежащей на отрезке AM . Сфера Ω пересекает отрезок SM в точках P и Q . Известно, что $SP = MQ$, площадь треугольника ABC равна 100, $SA = BC = 16$.
 - а) Найдите произведение длин медиан AA_1 , BB_1 и CC_1 .
 - б) Найдите двугранный угол при ребре BC пирамиды, если дополнительно известно, что Ω касается грани BCS в точке N , $SN = 4$, а радиус сферы Ω равен 5.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☒	☐	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$a, b, c \in \mathbb{N}$$

$$ab: 2^8 3^{14} 5^{12}; bc: 2^{12} 3^{20} 5^{17}; ac: 2^{14} 3^{21} 5^{30}$$

Задача 1

Произведение чисел x и y : простому множителю z в степени $w \Leftrightarrow$ сумма степеней z , входящих в числа x и $y \geq w$

Если в каком-то из чисел (a, b, c) будет присутствовать какой-то простой множитель (отличный от $2, 3, 5$) в степени > 0 , то произведение abc не будет минимальным.

$$\Rightarrow \begin{cases} a = 2^{a_1} \cdot 3^{a_2} \cdot 5^{a_3} \\ b = 2^{b_1} \cdot 3^{b_2} \cdot 5^{b_3} \\ c = 2^{c_1} \cdot 3^{c_2} \cdot 5^{c_3} \end{cases}$$

Тогда по условию

$$\begin{aligned} & \overline{ab: 2^{12} 3^{20} 5^{17}} \Rightarrow \begin{cases} a_1 + b_1 \geq 12 \\ a_2 + b_2 \geq 20 \\ a_3 + b_3 \geq 17 \end{cases} \\ & \overline{bc: 2^{12} 3^{20} 5^{17}} \Rightarrow \begin{cases} b_1 + c_1 \geq 12 \\ b_2 + c_2 \geq 20 \\ b_3 + c_3 \geq 17 \end{cases} \\ & \overline{ac: 2^{14} 3^{21} 5^{30}} \Rightarrow \begin{cases} a_1 + c_1 \geq 14 \\ a_2 + c_2 \geq 21 \\ a_3 + c_3 \geq 30 \end{cases} \end{aligned}$$

$$1) (1) + (4) + (7)$$

$$2a_1 + 2b_1 + 2c_1 \geq 8 + 12 + 14$$

$$a_1 + b_1 + c_1 \geq 17$$

Рав-во достиг-т

$$\begin{cases} a_1 + b_1 = 8 \\ b_1 + c_1 = 12 \\ a_1 + c_1 = 14 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_1 = 5 \\ b_1 = 3 \\ c_1 = 9 \end{cases}$$

$$2) (2) + (5) + (8)$$

$$2a_2 + 2b_2 + 2c_2 \geq 20 + 20 + 21$$

$$a_2 + b_2 + c_2 \geq 20.5$$

Тк $a_2, b_2, c_2 \in \mathbb{N} + \{0\}$

$$a_2 + b_2 + c_2 \geq 21$$

Например, $a_2 = 8, b_2 = 6, c_2 = 14$

$$\begin{cases} a_2 + b_2 = 14 \geq 14 \\ b_2 + c_2 = 20 \geq 20 \\ a_2 + c_2 = 22 \geq 21 \end{cases} \quad \text{— верно.}$$

$$3) a_3 + c_3 \geq 30 \Rightarrow a_3 + b_3 + c_3 \geq 30$$

$$\Rightarrow a_3 = 20, c_3 = 10, b_3 = 0$$

$$\begin{cases} a_3 + b_3 = 20 \geq 12 \\ b_3 + c_3 = 10 \geq 17 \\ a_3 + c_3 = 30 \geq 30 \end{cases} \quad \text{— верно.}$$

$$\begin{aligned} \text{Итак, } abc &= 2^{a_1+b_1+c_1} \cdot 3^{a_2+b_2+c_2} \cdot 5^{a_3+b_3+c_3} \\ &\geq 2^{17} \cdot 3^{28} \cdot 5^{39} \end{aligned}$$

(пример: $(a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3, c_1, c_2, c_3) = (5, 8, 20, 3, 6, 0, 9, 14, 10)$)

$$\text{Ответ: } 2^{17} \cdot 3^{28} \cdot 5^{39}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7
☐ ☒ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Дано:

$\triangle ABC, \angle C = 90^\circ$

CD - высота

ω кас $CB = B$

ω кас $CD = F$

ω кас $AC = E$

$EF \parallel AB$

$AD = 5$

$DB = 2$

Найти:

$S_{\triangle ABC}$

$S_{\triangle CEF}$

Задача 2

$EF \cap BC = X$

По теор. о секущей и касательной

$XB^2 = XF \cdot XE$

$EX \parallel AB \Rightarrow \frac{EF}{FX} = \frac{AD}{AB}$

$\angle EF = 5y, FX = 2y$

$XB^2 = 14y^2 \Rightarrow$

$\Rightarrow XB = y\sqrt{14}$

$CD = x\sqrt{10}$ - теор. об отрезке ср. геом. отрезков

на кот. лежит радиус

$\angle A = \alpha$

$$\tan \alpha = \frac{x\sqrt{10}}{5x} = \frac{\sqrt{10}}{5} \Rightarrow \cot \alpha = \frac{5}{\sqrt{10}}$$

$$\Rightarrow \sin \alpha = \frac{1}{\sqrt{1 + \cot^2 \alpha}} = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{25}{10}}} = \frac{1}{\sqrt{\frac{35}{10}}} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{7}}$$

$$\triangle CFX \quad \sin \alpha = \frac{FX}{CX} = \frac{2y}{CX} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{7}} \Rightarrow$$

$\Rightarrow CX = y\sqrt{14} = BX = CX \Rightarrow$ по теор. о пропорц. отрезков $AE = EC$

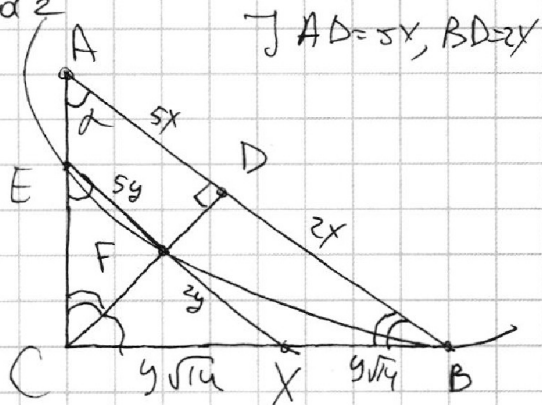
$$\triangle ECF \sim \triangle ACD \Rightarrow k = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{S_{\triangle ECF}}{S_{\triangle ACD}} = \frac{1}{4}$$

$$S_{\triangle ACD} = \frac{CD \cdot 5x}{2}, S_{\triangle ABC} = \frac{CD \cdot 7x}{2} \Rightarrow S_{\triangle ACD} = \frac{5}{7} S_{\triangle ABC} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{S_{\triangle ECF}}{S_{\triangle ABC}} = \frac{S_{\triangle ECF}}{\frac{7}{5} S_{\triangle ACD}} = \frac{2}{7} \cdot \frac{5}{7} = \frac{10}{49} \Rightarrow \frac{S_{\triangle ECF}}{S_{\triangle ACD}} = \frac{5}{49} \Rightarrow$$

$$\frac{S_{\triangle ABC}}{S_{\triangle CEF}} = \frac{28}{5}$$

Ответ: $\frac{28}{5}$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☒	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$10 \arcsin(\cos x) = \pi - 2x$$

$$\arcsin(\cos x) = \frac{\pi - 2x}{10}$$

Задача 3

$$\sin(\arcsin(\cos x)) = \sin\left(\frac{\pi - 2x}{10}\right), \quad |\cos x| \leq 1$$

$$\cos x = \sin\left(\frac{\pi - 2x}{10}\right)$$

$$\cos x = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi - 2x}{10}\right)$$

$$\cos x = \cos\left(\frac{4\pi + 2x}{10}\right) \Rightarrow \cos x = \cos\left(\frac{2\pi + x}{5}\right)$$

$$\begin{cases} x = \frac{2\pi + x}{5} + 2\pi n & (1) \end{cases} \quad (n, k \in \mathbb{Z})$$

$$\begin{cases} x = -\frac{2\pi + x}{5} + 2\pi k & (2) \end{cases}$$

$$\begin{aligned} 1) \quad 10x &= 2\pi + x + 20\pi n \\ x &= \frac{2\pi + 20\pi n}{9} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2) \quad 10x &= -2\pi - x + 20\pi k \\ x &= \frac{-2\pi + 20\pi k}{11} \end{aligned}$$

Ответ: $\frac{2\pi + 20\pi n}{9}, \frac{-2\pi + 20\pi k}{11} \quad (n, k \in \mathbb{Z})$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7
☐ ☐ ☐ ☒ ☐ ☐ ☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{cases} 5x - 3y + 4b = 0 & (1) \\ (y^2 + y^2 - 1)(y^2 + y^2 - 20y + 64) = 0 & (2) \end{cases} \quad - 4 \text{ рен.} \quad \boxed{\text{Задача 4}}$$

$$(2) \begin{cases} x^2 + y^2 = 1 & - \text{окр } (0,0), R=1 \\ y^2 + (y-10)^2 = 6^2 & - \text{окр } (0,10), R=6 \end{cases}$$

$$(1) \quad y = \frac{\alpha}{3}x + \frac{4b}{3}$$

tg угла наклона к
полож. напр. Ох = $\frac{\alpha}{3}$

$b \neq 0$ число $\Rightarrow$ прямая гвиг.

Вдоль Оу. Заметим, что
если прямая || одной касательной

то она имеет не более 2-х точек
пересеч. с этими окр.

Если $\frac{\alpha}{3} \geq 0$ и $\frac{\alpha}{3} < \text{tg} \angle \text{наклона } \ell_1$,

то также не более 2 рен.

tg $\angle$ накл. $\ell_1 = - \text{tg} \angle$ накл. ℓ_2 (тк симметричны)

Если $\frac{\alpha}{3} \leq 0$ и $\frac{\alpha}{3} > \text{tg} \angle$ накл. ℓ_1 , то не более 2
рен.

tg $\angle$ накл. $\ell_1 = k$. Тогда чтобы нашлось b ,
при котором система имеет 4 рен нужно, чтобы
 $\frac{\alpha}{3} < -k < k < \frac{\alpha}{3} \Rightarrow \alpha \in (-\infty, -3k) \cup (3k, +\infty)$

Найдем k .

$\exists \ell_1 \cap O_2 = (0, y)$

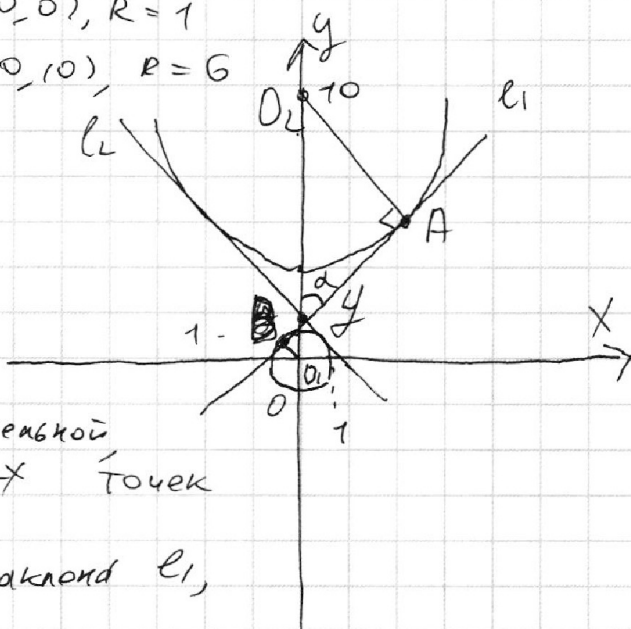
$$\text{Тогда } \sin \alpha = \frac{O_2 A}{O_2 y} = \frac{O_1 B}{O_1 y}; \quad O_2 A = 6, \quad O_1 B = 1$$

$$\frac{6}{10-y} = \frac{1}{y}; \quad 6y = 10-y \Rightarrow y = \frac{10}{7} \Rightarrow \sin \alpha = \frac{7}{10} = \cos(\alpha + \frac{\pi}{2})$$

$= \cos \angle \text{наклона}$

$\text{tg}^2 \angle \text{наклона} =$

$$= \frac{51}{100} \Rightarrow k = \frac{\sqrt{51}}{10} \Rightarrow \alpha \in (-\infty, -\frac{3\sqrt{51}}{10}) \cup (\frac{3\sqrt{51}}{10}, +\infty)$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☒	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{cases} \log_5^4(2x) - 3 \log_{2x} 5 = \log_{8x} 625 - 3 & (1) \\ \log_5^4(y) + 4 \log_y 5 = \log_y 0,2 - 3 & (2) \end{cases} \quad \text{Задача 5}$$

$$\text{ОДЗ: } \begin{cases} x > 0, x \neq \frac{1}{2} \\ y > 0, y \neq 1 \end{cases}$$

$$(1) \log_5^4(2x) - \frac{3}{\log_5(2x)} - \frac{4}{3 \log_5(2x)} + 3 = 0$$

$$\log_5 2x = a$$

$$a^4 - \frac{3}{a} - \frac{4}{3a} + 3 = 0 \quad | \cdot 3a$$

$$3a^5 + 9a - 13 = 0 \quad (*)$$

$$f_1(a) = 3a^5 \uparrow, f_2(a) = 9a \uparrow \Rightarrow f(a) = 3a^5 + 9a - 13 \uparrow \Rightarrow \text{имеет не более 1 корня.}$$

(2). Аналог. $\log_y y = 6$. После преобразований получаем $3b^5 + 9b + 13 = 0 (**)$ - также не более 1 корня.

Положим (*) и (**)

$$3a^5 + 9a - 13 = 3b^5 + 9b + 13 = 0$$

$$3(a^5 + b^5) + 9(a + b) = 0$$

$$3(a+b)(a^4 - ba^3 + b^3a^2 - ba + b^4 + 3) = 0$$

Сумма также $\uparrow$ функц. относ. $a \Rightarrow$

$\Rightarrow$ имеет не более 1 корня. Заметим, что

$a = -b$ - корень

$$a + b = 0 \Rightarrow \log_5(2x) + \log_5(y) = 0$$

$$\log_5 2xy = \log_5 1 \Rightarrow xy = 0,5$$

Ответ: 0,5

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☒	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$O(0,0)$, $P(-16,80)$, $Q(2,80)$, $R(18,0)$

$OP: y = -5x$

$QR: \frac{x-2}{16} = \frac{y-80}{-80}$

$y = -5x + 90$

$$\Rightarrow \begin{cases} y_1 \geq -5x_1 & (1) \\ y_2 \geq -5x_2 & (2) \\ y_1 \leq -5x_1 + 90 & (3) \\ y_2 \leq -5x_2 + 90 & (4) \end{cases} + y_1, y_2 \in [0, 80]$$

$U_3 (1) \text{ и } (3) \Rightarrow -90 \leq -y_1 - 5x_1 \leq 0$

$U_3 (2) \text{ и } (4) \Rightarrow 0 \leq y_2 + 5x_2 \leq 90$

$5x_2 - 5x_1 + y_2 - y_1 = 45$

При $-y_1 - 5x_1 < -45$ или $y_2 + 5x_2 < 45$ реш. нет.

$\Rightarrow (1) \begin{cases} -y_1 - 5x_1 = -45 \\ y_2 + 5x_2 = 90 \end{cases} \quad 1) y_1, y_2 : 5, \text{ тк точки с целыми коорд.}, y_1, y_2 \in [0, 80] \Rightarrow$

$(2) \begin{cases} -y_1 - 5x_1 = -44 \\ y_2 + 5x_2 = 82 \end{cases} \Rightarrow \text{для } y_1, \frac{80}{5} + 1 = 17 \text{ вариантов,}$

$$\begin{cases} -y_1 - 5x_1 = 0 \\ y_1 + 5x_1 = 45 \end{cases}$$

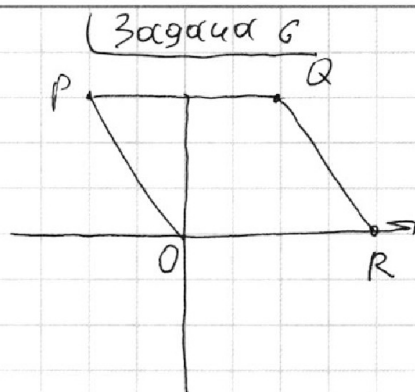
для y_2 17 вариантов $\Rightarrow$
 $\Rightarrow$ для пар $(x_1, y_1), (x_2, y_2)$ 17^2 вариантов. (тк при опр. y_1, y_2 x_1 и x_2 опр. однозначно).

2) Аналог. п. 1, только $y_1 \equiv 4 \pmod{5} \equiv y_2 - 16$ вариантов $\Rightarrow 16^2$ пар.

И т.д. для чисел $: 5$ будет 17^2 вариантов, для чисел $\neq 5$ 16^2 вариантов. Чисел $: 5$ от -45 до $0 : \frac{45}{5} + 1 = 10$, остальных $46 - 10 = 36. \Rightarrow$

$\Rightarrow$ Общее кол-во пар $10 \cdot 17^2 + 36 \cdot 16^2 = 2890 + 9216 = 12106$

Ответ: 12106



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{cases} \log_5^4(2x) - \frac{3}{\log_5(2x)} = \frac{4}{3\log_5(2x)} - 3 \\ \log_5^4(y) - \frac{4}{\log_5(y)} = -\frac{1}{3\log_5(y)} - 3 \end{cases}$$

$$\log_5^4(2x) - \log_5^4(y) - \frac{3}{\log_5(2x)} - \frac{4}{\log_5(y)} - \frac{4}{3\log_5(2x)} - \frac{1}{3\log_5(y)} = 0$$

$$\log_5^4(2x) - \log_5^4(y) - \frac{13}{3\log_5(2x)} - \frac{13}{3\log_5(y)} = 0$$

$$\log_5^4(2x) - \log_5^4(y) - \frac{13}{3} \left(\frac{\log_5(2xy)}{\log_5(2x) \cdot \log_5(y)} \right) = 0$$

$$\log_5^4(2x) - \log_5^4(y) = (\log_5^2(2x) + \log_5^2(y))(\log_5^2(2x) - \log_5^2(y))(\log_5(2xy)) =$$

$$= \left((\log_5(2xy))^2 - 2\log_5(2x) \cdot \log_5(y) \right) (\log_5 \frac{2x}{y}) \cdot \log_5(2xy)$$

$$2y \cdot 7y = xB^2$$

$$14y^2 = xB^2$$

$$xB = y\sqrt{14}$$

$$\frac{xB + Cx}{2x} = \frac{y\sqrt{14}}{2x} \cdot \frac{Cx}{2y}$$

$$\frac{y\sqrt{14} + Cx}{2x} = \frac{Cx}{y}$$

$$y^2\sqrt{14} + Cx \cdot y = Cx \cdot x$$

$$Cx = \frac{y^2\sqrt{14}}{x-y}$$

$$\sin^2 + \cos^2 = 1$$

$$1 + \cot^2 = \frac{1}{\sin^2}$$

$$\cot = \frac{5}{\sqrt{10}}$$

$$\sin^2 + \cos^2 = 1$$

$$1 + \cot^2 = \frac{1}{\sin^2}$$

$$\frac{\sqrt{7} \cdot 2y}{x} = \frac{1}{\sin^2} = \frac{35}{10}$$

$$\frac{1}{\sin^2} = \frac{35}{10}$$

$$1 + \frac{25}{10}$$

$$\frac{35}{10}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\cancel{x^2 = (10-y)^2 - 6^2 = (6-y)^2 + 4}$$

$$x^2 = (10-y)^2 - 16 = (4-y)^2 (14-y)$$

$$y^4 - 20y + 100 - 16 = y^4 - 18y + 64$$

$$100 - 36 - 56 = 2y = 20 \Rightarrow y = 10$$

$$= 64 - 56 = 8$$

$$k^2 q^2 - 1 - k^2 - q^2 + 1 = 0 \Rightarrow k^2 q^2 = k^2 + q^2$$

$$\cancel{k^2 q^2} - 20q k^2 + 100k^2 - 1 - \cancel{k^2} - \cancel{q^2} + 20q + 64 = 0$$

$$-20q k^2 + 100k^2 + 20q = -63$$

$$(a^2 + b^2)^2 - ab(a^2 + ab + b^2) + 3 = 0$$

$$(a^2 + b^2)^2 - ab((a+b)^2 - ab) + 3 = 0$$

$$\begin{aligned} a+b &= x \\ ab &= y \end{aligned}$$

$$((a+b)^2 - 2ab)^2 - ab((a+b)^2 - ab) + 3 = 0$$

$$(x^2 - 2y)^2 - y(x^2 - y) + 3 = 0$$

$$x^4 - 4x^2y + 4y^2 - x^2y + y^2 + 3 = 0$$

$$x^4 - 5x^2y + 4y^2 + 3 = 0$$

$$D = 25y^2 - 4y^2 - 12 = 21y^2 - 12$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{cases} \log_5^4(2x) - 3 \log_{2x} 5 = \log_{8x} 625 - 3 \\ \log_5^4(y) + 4 \log_y(5) = \log_y(0.2) - 3 \end{cases}$$

$$\log_5^4(2x) - \frac{3}{\log_5(2x)} = \frac{4}{3} \frac{1}{\log_5(2x)} - 3$$

$$\log_5^4(y) + \frac{4}{\log_5(y)} = -\frac{1}{3} \frac{1}{\log_5(y)} - 3$$

$$\sin^2 + \cos^2 = 1$$

$$\tan^2 + 1 = \frac{1}{\cos^2}$$

$$\log_5^4(2x) - \log_5^4(y) - \frac{3}{\log_5(2x)} - \frac{4}{\log_5(y)} - \frac{4}{3 \log_5(2x)} - \frac{1}{3 \log_5(y)} = 0$$

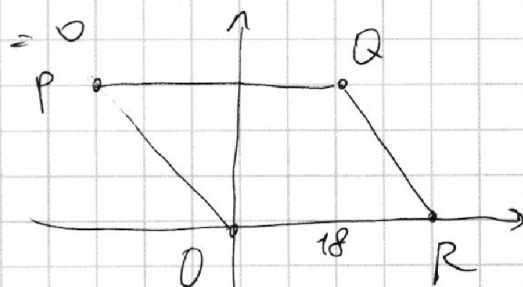
$$\begin{cases} y = \frac{ax+4b}{3} = \frac{a}{3}x + \frac{4b}{3} \\ x^2 + y^2 = 1 \end{cases}$$

$$x^2 + \frac{a^2}{9}x^2 + \frac{16b^2}{9} + 2 \cdot \frac{a}{3} \cdot \frac{4b}{3}x - 1 = 0$$

$$x^2 \left(1 + \frac{a^2}{9}\right) + \frac{8ab}{9}x + \frac{16b^2}{9} - 1 = 0$$

$$D = \frac{8a^2b^2}{81} - 4 \cdot \frac{4a^2}{9} - \frac{64b^2}{9} + 4 =$$

$$= \frac{8a^2b^2 - 36a^2 - 64b^2 + 36}{81} = \frac{8a^2b^2 - 36a^2 - 64b^2}{81}$$



$$OP: \frac{x}{-16} = \frac{y}{80}$$

$$y = -5x$$

$$QR: \frac{x-2}{16} = \frac{y-80}{-80}$$

$$y = -5x + 80$$

$$\begin{cases} y_1 \geq -5x_1 \\ y_2 \geq -5x_2 \\ y_1, y_2 \in [0, 80] \\ y_1 \leq -5x_1 + 80 \\ y_2 \leq -5x_2 + 80 \end{cases}$$

$$5x_2 - 5x_1 + y_2 - y_1 = 80$$

$$\begin{cases} 5x_2 - 5x_1 \leq y_1 - y_2 + 80 \\ 5x_2 - 5x_1 + y_2 - y_1 \leq 80 \end{cases}$$

$$5x_2 - 5x_1 \geq y_1 - 80 - y_2$$

$$5x_2 - 5x_1 + y_2 - y_1 = 80$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7
☐ ☐ ☐ ☒ ☒ ☐ ☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{cases} \alpha x - 3y + 4b = 0 & (1) \\ (x^2 + y^2 - 1)(y^2 + y^2 - 20y + 64) = 0 & (2) \end{cases} \quad 4 \text{ реш.}$$

$$(2) \quad \begin{cases} x^2 + y^2 = 1 & - \text{окр. с центром } (0,0) \text{ и } R=1 \\ x^2 + (y-10)^2 = 6^2 & - \text{окр. с центром } (0,10) \text{ и } R=6 \end{cases}$$

$$(1) \quad y = \frac{\alpha}{3}x + \frac{4b}{3} - \text{прямая,}$$

т.е. угол наклона к полож.
направлению $Ox = \frac{\alpha}{3}$

b - $\forall$ число $\Rightarrow$ прямая

двигается вдоль Oy как угодно.

Заметим, что если прямая $\parallel$ одной
касательной

этим окружностей, то ~~какая-то~~

она не сможет $\perp$ обе окружности

в 2-х точках (а y решения системы)

будет иметь $\Leftrightarrow$ прямая $\perp$ каждой окр. в 2-х точках)

Если $\text{tg} \angle \text{наклона}$ $\angle$ $\text{tg} \angle \text{наклона } \ell_1 = k, \ell_2 = -k$

(т.к. они симметричны). Тогда при $\text{tg} \angle \text{наклона}$
прямой $y = \frac{\alpha}{3}x + \frac{4b}{3} \in [0, k]$ и $\in [-k, 0]$, система будет

иметь ∞ решений $\Rightarrow \frac{\alpha}{3} \in (-\infty, -k) \cup (k, +\infty)$

Найдем k .

$\ell_1 \perp Oy = (0, y)$

По теор. Пиф. $AB^2 = AO^2 - OB^2 = (10-y)^2 - 16$

По теор. об отр. кас. $AB^2 = AC \cdot AD$ ($\angle D$ - т. пересеч. окр. с Oy)

$$AB^2 = (4-y)(14-y)$$

$$(10-y)^2 - 16 = (4-y)(14-y)$$

$$y^2 - 20y + 100 - 16 = y^2 - 18y + 56$$

$$y^2(1+k^2) + 2kq \cdot x + q^2 - 1 = 0$$

$$y^2(1+k^2) + x(2kq - 20k) + q^2 - 20q - 64 = 0$$

$$k^2q^2 - 1 - k^2 - q^2 + 1 = 0 \quad k^2q^2 = k^2q^2$$

$$k^2q^2 - 20qk^2 + 100k^2 - 1 - k^2 - q^2 + 20q + 64 = 0$$

$$k^2(-100 - 20q) + 20q + 64 = 0$$

$$y = kx + q$$

$$x^2 + k^2x^2 + 2kqx + q^2 - 1 = 0$$

$$y^2 + k^2y^2 + 2kqy + q^2 - 20q - 64 = 0$$

$$-20q - 64 = 0$$

$$\frac{(kq - 10k)^2}{k^2(q - 10)^2}$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\log_5^4(2x) - 3\log_{2x} 5 = \log_{8x} 625 - 3$$

$$\log_5^4 y + 4\log_y 5 = \log_{y^3} 125 - 3$$

$$\log_{2x} 2x = x$$

$$\log_5 y = b$$

$$a+b=?$$

$$\begin{cases} a^4 - \frac{3}{a} = \frac{4}{3a} - 3 \\ b^4 + \frac{4}{b} = -\frac{1}{3b} - 3 \end{cases}$$

$$a^4 - b^4 - \frac{3}{a} - \frac{4}{b} - \frac{4}{3a} + \frac{1}{3b} = 0$$

$$a^4 - \frac{13}{3a} - b^4 - \frac{10}{3b} = 0$$

$$\begin{array}{ccccccc} & & & 1 & & & \\ & & & 1 & & 1 & \\ & 1 & & 1 & & 1 & \\ & 2 & 1 & & 2 & 1 & \\ 3 & 1 & & 3 & & 3 & 1 \\ 4 & 1 & 4 & & 6 & & 4 & 1 \\ 5 & 1 & 5 & 10 & & 10 & 5 & 1 \end{array}$$

$$(a^2+b^2)^2 - a^4 - \frac{16}{3a} + 3 = 0 \Rightarrow 3a^5 + 9a - 16 = 0$$

$$-6a^3 - 6a^2 - 6a + 3 = 0$$

$$a^4 - \frac{3}{a} = \frac{4}{3a} - 3$$

$$3(a^5+b^5) + 9(a+b) = 0$$

$$(a^2+b^2)^2 - a^4 - \frac{16}{3a} + 3 = 0$$

$$-a^6(b^2+a^2) + a^5 + 9a - 16 = 0$$

$$a^5+b^5 \mid a+b$$

$$a^4 - \frac{3}{a} = \frac{4}{3a} - 3$$

$$a^4 - \frac{13}{3a} + 3 = 0 \quad 3a^5 + 9a - 13 = 0$$

$$b^4 + \frac{4}{b} = -\frac{1}{3b} - 3$$

$$\cancel{b^4 + \frac{13}{3b} + 3 = 0} \quad b^4 + \frac{13}{3b}$$

$$3b^5 + 9b + 13 = 0$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

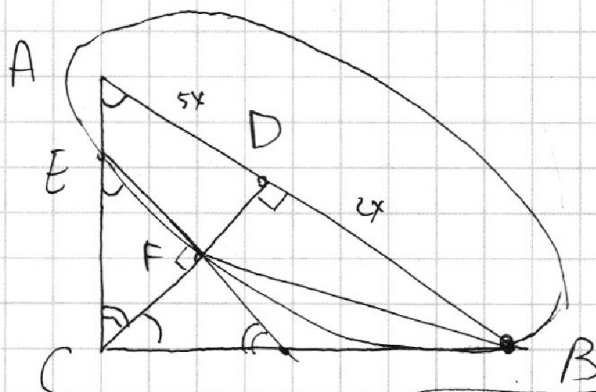
МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

(3) $10 \operatorname{arcsin}(\cos x) = \pi - 2x$
 $\operatorname{arcsin}(\cos x) = \frac{\pi - 2x}{10}$
 $\sin(\operatorname{arcsin}(\cos x)) = \sin\left(\frac{\pi - 2x}{10}\right)$
 $\cos x = \sin\left(\frac{\pi - 2x}{10}\right)$
 $\cos x = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi - 2x}{10}\right)$
 $\cos x = \cos\left(\frac{4\pi + 2x}{10}\right) \Rightarrow \cos x = \cos\left(\frac{2\pi + x}{5}\right)$

$$\left\{ \begin{aligned} x &= \frac{2\pi + x}{5} + 2\pi k \\ x &= -\frac{2\pi + x}{5} + 2\pi k \end{aligned} \right.$$

$AB \parallel EF$
 $\frac{AD}{DB} = \frac{5}{2}$
 $\frac{S_{\triangle ABC}}{S_{\triangle CEF}} = ?$



(5) $\log_5^4(2x) - \frac{3}{\log_5(2x)} = \frac{4}{3} \log_{2x}^5 - 3$

$$\frac{\log_5^5(2x) - 3}{\log_5(2x)} = \frac{4}{3 \log_5(2x)} - 3 \quad x > 0, y > 0$$

$$3 \log_5^5(2x) - 9 = 4 - 9 \log_5(2x)$$

$$3 \log_5(2x) (\log_5^4(2x) + 3) = 13$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

α, β, γ

~~мин. стенок 2. 6 (0, 6)~~

2) $\alpha \beta$: мин. стенок 2 = 8

$$3 = 14$$

$$5 = 12$$

$\beta \gamma$

$$2 = 12$$

$$3 = 20$$

$$5 = 17$$

$$\begin{array}{r} \alpha \quad \beta \\ 30 \quad 40 \\ 20 + 30 \\ \hline = 34 \end{array}$$

$$68 \div 2$$

$$60 + 17$$

$$17 + 21$$

$$18 + 13$$

$$\geq 34$$

$$\geq 40$$

$$= 30$$

$\alpha \beta \gamma$

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \beta_1 + \beta_2 + \beta_3 + \gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3 = 75$$

$$\alpha = 5 \quad \beta = 12 \quad \gamma = 27$$

$$\alpha_3 + \beta_3 + \gamma_3 - \text{мин.} \quad \alpha^2 = (y-1)(y+1) \quad \beta^2 =$$

$$\begin{cases} \alpha x - 3y + 4\beta = 0 \\ (x^2 + y^2 - 1)(x^2 + y^2 - 20y + 64) = 0 \\ \begin{cases} x^2 + y^2 = 1 \\ x^2 + (y-10)^2 = 6^2 \end{cases} \end{cases}$$

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 30$$

$$\alpha_3 + \beta_3 + \gamma_3 = 30$$

$\alpha_1 + \alpha_2$

$$\alpha_1 + \beta_1 + \beta_1 + \gamma_1 + \alpha_1 + \gamma_1 \geq 34$$

$$\geq \alpha_1 + \beta_1 + \gamma_1 \geq 17$$

$$\begin{cases} \alpha_2 + \beta_2 = 14 & \beta_2 = 14 - \alpha_2 \\ \beta_2 + \gamma_2 = 20 \\ \alpha_2 + \gamma_2 = 21 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \alpha_2 - \alpha_2 &= 6 \\ \alpha_2 + \beta_2 &= 21 \end{aligned}$$

$$\frac{55}{2} \quad \frac{56}{2} = 28$$

$$\begin{aligned} \alpha_2 &= 8 \\ \beta_2 &= 6 \\ \gamma_2 &= 14 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 14 &= \alpha_2 + \beta_2 \\ 20 &= \beta_2 + \gamma_2 \\ 22 &= \alpha_2 + \gamma_2 \end{aligned}$$

