



МОСКОВСКИЙ  
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ  
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"  
ПО МАТЕМАТИКЕ

11 КЛАСС. Вариант 2



1. [4 балла] Натуральные числа  $a, b, c$  таковы, что  $ab$  делится на  $2^7 3^{11} 5^{14}$ ,  $bc$  делится на  $2^{13} 3^{15} 5^{18}$ ,  $ac$  делится на  $2^{14} 3^{17} 5^{43}$ . Найдите наименьшее возможное значение произведения  $abc$ .

2. [5 баллов] Дан прямоугольный треугольник  $ABC$ . Окружность, касающаяся прямой  $AC$  в точке  $A$ , пересекает высоту  $CD$ , проведённую к гипотенузе, в точке  $E$ , а катет  $BC$  – в точке  $F$ . Известно, что  $AB \parallel EF$ ,  $AB : BD = 1,3$ . Найдите отношение площади треугольника  $ACD$  к площади треугольника  $CEF$ .

3. [4 балла] Решите уравнение  $5 \arccos(\sin x) = \frac{3\pi}{2} + x$ .

4. [5 баллов] Найдите все значения параметра  $a$ , для каждого из которых найдётся значение параметра  $b$ , при котором система уравнений

$$\begin{cases} x + 3ay - 7b = 0, \\ (x^2 + 14x + y^2 + 45)(x^2 + y^2 - 9) = 0 \end{cases}$$

имеет ровно 4 решения.

5. [5 баллов] Некоторые числа  $x$  и  $y$  удовлетворяют равенствам

$$\log_7^4(6x) - 2 \log_{6x} 7 = \log_{36x^2} 343 - 4, \quad \text{и} \quad \log_7^4 y + 6 \log_y 7 = \log_{y^2} (7^5) - 4.$$

Найдите все возможные значения произведения  $xy$ .

6. [5 баллов] На координатной плоскости дан параллелограмм с вершинами в точках  $O(0;0)$ ,  $P(-17;68)$ ,  $Q(2;68)$  и  $R(19;0)$ . Найдите количество пар точек  $A(x_1; y_1)$  и  $B(x_2; y_2)$  с целыми координатами, лежащих в этом параллелограмме (возможно на границе) и таких, что  $4x_2 - 4x_1 + y_2 - y_1 = 40$ .

7. [6 баллов] Дана треугольная пирамида  $SABC$ , медианы  $AA_1$ ,  $BB_1$  и  $CC_1$  треугольника  $ABC$  пересекаются в точке  $M$ . Сфера  $\Omega$  касается ребра  $AS$  в точке  $L$  и касается плоскости основания пирамиды в точке  $K$ , лежащей на отрезке  $AM$ . Сфера  $\Omega$  пересекает отрезок  $SM$  в точках  $P$  и  $Q$ . Известно, что  $SP = MQ$ , площадь треугольника  $ABC$  равна 60,  $SA = BC = 10$ .

а) Найдите произведение длин медиан  $AA_1$ ,  $BB_1$  и  $CC_1$ .

б) Найдите двугранный угол при ребре  $BC$  пирамиды, если дополнительно известно, что  $\Omega$  касается грани  $BCS$  в точке  $N$ ,  $SN = 3$ , а радиус сферы  $\Omega$  равен 4.



|                                     |                          |                          |                          |                          |                          |                          |
|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1                                   | 2                        | 3                        | 4                        | 5                        | 6                        | 7                        |
| <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

N 1

$$ab: 2^7 \cdot 3^{11} \cdot 5^{14}; \quad bc: 2^{13} \cdot 3^{15} \cdot 5^{18}; \quad ac: 2^{14} \cdot 3^{17} \cdot 5^{43}.$$

• Ясно, что если  $a, b$  или  $c$  содержат в себе простые множители, кроме 2, 3 и 5, то значение  $abc$  будет не наименьшим. Тогда:

$$a = 2^{\alpha_1} \cdot 3^{\alpha_2} \cdot 5^{\alpha_3}, \quad b = 2^{\beta_1} \cdot 3^{\beta_2} \cdot 5^{\beta_3}, \quad c = 2^{\gamma_1} \cdot 3^{\gamma_2} \cdot 5^{\gamma_3}.$$

• При этом  $\alpha_1 + \beta_1 + \gamma_1 \geq 14$ ,  $\alpha_2 + \beta_2 + \gamma_2 \geq 17$ ,  $\alpha_3 + \beta_3 + \gamma_3 \geq 43$ .

1)  $\alpha_1 + \beta_1 \geq 7$ ,  $\beta_1 + \gamma_1 \geq 13$ ,  $\alpha_1 + \gamma_1 \geq 14$ .

• Если нам удастся решить эту систему, заметив знаки неравенства на равенства, в целых неотрицательных, то мы найдём наименьшее значение  $\alpha_1 + \beta_1 + \gamma_1$ .

$$\begin{cases} \alpha_1 + \beta_1 = 7, \\ \beta_1 + \gamma_1 = 13, \\ \alpha_2 + \gamma_1 = 14; \end{cases} \Leftrightarrow \alpha_1 = 4, \quad \beta_1 = 3, \quad \gamma_1 = 10. \\ \therefore \alpha_1 + \beta_1 + \gamma_1 = 17.$$

2)  $\alpha_2 + \beta_2 \geq 11$ ,  $\beta_2 + \gamma_2 \geq 15$ ,  $\alpha_2 + \gamma_2 \geq 17$ .

• Поскольку система  $\begin{cases} \alpha_2 + \beta_2 = 11, \\ \beta_2 + \gamma_2 = 15, \\ \alpha_2 + \gamma_2 = 17. \end{cases}$  не имеет решений

в целых неотрицательных, надо вернуться к знаку неравенства. Попробуем взять  $\alpha_2 + \beta_2 = 12$ . От того, к правой части какого из трёх уравнений мы прибавим 1, сумма  $\alpha_2 + \beta_2 + \gamma_2$  не изменится. С точки зрения суммы  $\alpha_2 + \beta_2 + \gamma_2$  с таким же успехом можно было взять  $\beta_2 + \gamma_2 = 16$ , а другие уравнения оставить неизменными, и тогда мы те с теми же уравнениями системы.

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

|                                     |                          |                          |                          |                          |                          |                          |
|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1                                   | 2                        | 3                        | 4                        | 5                        | 6                        | 7                        |
| <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

№1 (продолжение)

Итак, 
$$\begin{cases} \alpha_2 + \beta_2 = 12, \\ \beta_2 + \gamma_2 = 15, \\ \alpha_2 + \gamma_2 = 17. \end{cases} \Leftrightarrow \alpha_2 = 7, \beta_2 = 5, \gamma_2 = 10.$$
$$\therefore \alpha_2 + \beta_2 + \gamma_2 = 22.$$

3)  $\alpha_3 + \beta_3 \geq 14, \beta_3 + \gamma_3 \geq 18, \alpha_3 + \gamma_3 \geq 43.$

Значения  $\alpha_3 = 14, \beta_3 = 0, \gamma_3 = 29$  удовлетворяют всем неравенствам, причем тогда  $\alpha_3 + \beta_3 + \gamma_3 = 43$ , а ранее было сказано, что  $\alpha_3 + \beta_3 + \gamma_3 \geq 43$  (это очевидно, т.к.  $a \leq 5^{43}$ ). Значит, минимальное значение  $\alpha_3 + \beta_3 + \gamma_3$ .

Итак,  $abc = 2^{\alpha_1 + \beta_1 + \gamma_1} \cdot 3^{\alpha_2 + \beta_2 + \gamma_2} \cdot 5^{\alpha_3 + \beta_3 + \gamma_3} =$ 
$$= 2^{17} \cdot 3^{22} \cdot 5^{43}.$$

Ответ:  $2^{17} \cdot 3^{22} \cdot 5^{43}$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

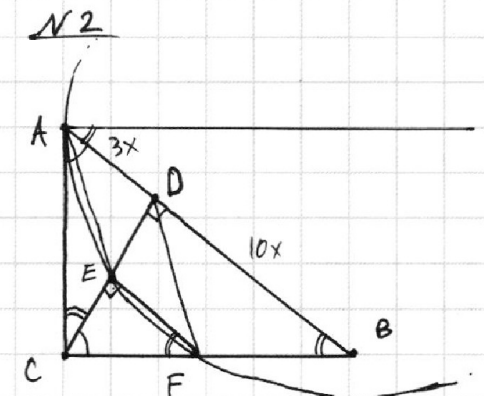
Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:

|                          |                                     |                          |                          |                          |                          |                          |
|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1                        | 2                                   | 3                        | 4                        | 5                        | 6                        | 7                        |
| <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

**МФТИ**

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



Дано:  $\triangle ABC$  ( $\angle C = 90^\circ$ ),

$\omega(O; R)$  — окружность, касаясь

AC в E.  $\omega \cap CD = F$ , где

CD — высота.  $\omega \cap BC = F$ .

$AB \parallel EF$ ,  $AB:BD = 1,3$ . Найти:

$$S_{\triangle ACD} : S_{\triangle CEF}.$$

Решение:

1)  $\frac{AB}{BD} = 1,3 \Rightarrow$  Если  $BD = 10x$ , то  $AD = 3x$ .

Потому, поскольку  $\triangle ACD$ ,  $\triangle ABC$ ,  $\triangle CFE$ ,  $\triangle CBD$  подобны, найдем, что  $CD = \sqrt{30}x$ ,  $AC = \sqrt{30}x$ ,  $BC = \sqrt{30}x$

2) Очевидно,  $EF = \frac{3}{7} BD = \frac{30}{7}x$ .

Потому  $S_{\triangle ACD} : S_{\triangle CEF} = (CD : EF)^2 = \left( \frac{\sqrt{30} \cdot 7}{30} \right)^2 = \frac{49}{30}$

Ответ:  $\frac{49}{30}$ .

|                          |                          |                                     |                          |                          |                          |                          |
|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1                        | 2                        | 3                                   | 4                        | 5                        | 6                        | 7                        |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |



N 3

$$5 \arccos(\sin x) = \frac{3\pi}{2} + x$$

$$\arccos(\sin x) = \frac{1}{5} \cdot \left( \frac{3\pi}{2} + x \right)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sin x = \cos\left(\frac{1}{5}\left(\frac{3\pi}{2} + x\right)\right), & (1) \\ 0 \leq \frac{1}{5}\left(\frac{3\pi}{2} + x\right) \leq \pi. & (2) \end{cases}$$

$$(1): \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos\left(\frac{1}{5}\left(\frac{3\pi}{2} + x\right)\right)$$

$$\begin{cases} \frac{\pi}{2} - x = \frac{1}{5}\left(\frac{3\pi}{2} + x\right) + 2\pi k, \\ x - \frac{\pi}{2} = \frac{1}{5}\left(\frac{3\pi}{2} + x\right) + 2\pi n, \end{cases} \quad k \in \mathbb{Z}; n \in \mathbb{Z};$$

$$\begin{cases} \frac{6}{5}x = \frac{\pi}{2} - \frac{3\pi}{10} - 2\pi k, \\ \frac{4}{5}x = \frac{\pi}{2} + \frac{3\pi}{10} + 2\pi n; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = \frac{\pi}{6} - \frac{5\pi k}{3}, \\ x = \pi + \frac{5\pi n}{2}. \end{cases}$$

$$(2): \quad 1) \quad x = \frac{\pi}{6} - \frac{5\pi k}{3};$$

$$0 \leq \frac{1}{5} \cdot \left( \frac{3\pi}{2} + \frac{\pi}{6} - \frac{5\pi k}{3} \right) \leq \pi$$

$$0 \leq \frac{3}{2} + \frac{1}{6} - \frac{5k}{3} \leq 5$$

$$-\frac{5}{3} \leq -\frac{5k}{3} \leq \frac{10}{3}$$

$$\therefore k = -2; -1; 0; 1. \Rightarrow x = -\frac{3\pi}{2}; \frac{\pi}{6}; \frac{11\pi}{6}; \frac{21\pi}{6}.$$

$$2) \quad x = \pi + \frac{5\pi n}{2};$$

$$0 \leq \frac{1}{5} \left( \frac{3\pi}{2} + \pi + \frac{5\pi n}{2} \right) \leq \pi$$

$$0 \leq \frac{3}{2} + 1 + \frac{5n}{2} \leq 5$$

$$-\frac{5}{2} \leq \frac{5n}{2} \leq \frac{5}{2}.$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1  
☐

2  
☐

3  
☒

4  
☐

5  
☐

6  
☐

7  
☐

 МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

№ 3 (продолжение)

$$\therefore k = -1; 0; 1 \Rightarrow x = -\frac{3\pi}{2}; \pi; \frac{7\pi}{2}.$$

$$\text{Ответ: } -\frac{3\pi}{2}; \frac{\pi}{6}; \pi; \frac{11\pi}{6}; \frac{7\pi}{2}.$$

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☒ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐



№4  
... все  $a$ , для которых найдётся  $b$ , такие, что 4 решения.

$$\begin{cases} x + 3ay - 7b = 0, & (1) \\ (x^2 + 14x + y^2 + 45)(x^2 + y^2 - 9) = 0. & (2) \end{cases}$$

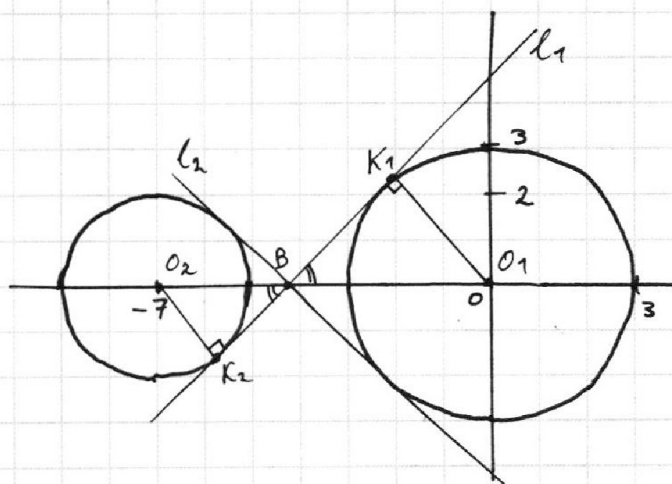
(2):  $\begin{cases} x^2 + 14x + y^2 + 45 = 0, \\ x^2 + y^2 - 9 = 0; \end{cases} \quad \begin{cases} (x+7)^2 + y^2 = 2^2, \\ x^2 + y^2 = 3^2. \end{cases} \quad \text{— две окружности.}$

(1):  $x + 3ay - 7b = 0.$

Если  $a = 0$ :  $x = 7b$  — вертикальное прямая в плоскости  $xOy$ . Скоро станет видно, что такая прямая не может пересекать две окружности (2) в четырёх точках.

Тогда  $a \neq 0$ :

$y = -\frac{1}{3a}x + \frac{7b}{3a}$  — линейная ф-ция.



Пусть  $-\frac{1}{3a} = k \in \mathbb{R}$ ,  $\frac{7b}{3a} = c \in \mathbb{R}$ .

$l_1$  — общая касательная к двум окр-там.

$l_1$  — график прямой  $y = k_1x + c_1$ ,  $k_1 > 0$ .

Точки  $O_1, O_2, K_1, K_2$  и  $B$  — на рисунке.

$\triangle O_2K_2B \sim \triangle O_1K_1B$  по двум углам с коэффициентом

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

|                          |                          |                          |                                     |                          |                          |                          |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1                        | 2                        | 3                        | 4                                   | 5                        | 6                        | 7                        |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

**МФТИ**

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

и (продолжение)

поэтому  $\frac{O_1 K_1}{O_2 K_2} = \frac{3}{2}$ . Пусть  $O_1 B = 3x$ , тогда  $O_2 B = 2x$ .  $O_1 B + O_2 B = O_1 O_2 = 7$ .  $\Rightarrow x = \frac{7}{5}$ .

$\Delta B K_1 O_1$ :  $O_1 K_1 = 3$ ,  $BO_1 = 3x = \frac{21}{5}$ ,  $\angle B K_1 O_1 = 90^\circ$   
 $\Rightarrow BK_1 = \sqrt{\left(\frac{21}{5}\right)^2 - 3^2} = \frac{6\sqrt{6}}{5}$ .

$\therefore k_1 = \operatorname{tg} \angle K_1 B O_1 = \frac{3 \cdot 5}{6\sqrt{6}} = \frac{5\sqrt{6}}{12}$ .

Аналогично для прямой  $l_2$ , являющейся прямой функции  $y = k_2 x + c_2$ ,  $k_2 = -\frac{5\sqrt{6}}{12}$ , т.е.  $k_2 < 0$ .

Итак, нетрудно понять, что если  $k \in (k_2; k_1)$ , то найдётся такое  $c$ , что прямая заданная функцией  $y = kx + c$  имеет с окружностью 4 общие точки. Стоит заметить, что  $c$  зависит и от  $a$ , и от  $b$ , но для любого желаемого значения  $c$ , при заданном значении  $a$ , можно подобрать  $b$ , решив уравнение  $b = \frac{3}{4}ac$ .

$$\begin{cases} k < k_1, \\ k > k_2; \end{cases} \begin{cases} -\frac{1}{3a} < \frac{5\sqrt{6}}{12}, \\ -\frac{1}{3a} > -\frac{5\sqrt{6}}{12}; \end{cases} \begin{cases} \frac{1}{a} + \frac{5\sqrt{6}}{4} > 0, \\ \frac{1}{a} - \frac{5\sqrt{6}}{4} < 0; \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{4 + 5\sqrt{6}a}{4a} > 0, \\ \frac{4 - 5\sqrt{6}a}{4a} < 0; \end{cases} \begin{cases} \begin{array}{c} + \quad - \quad + \\ \frac{4}{5\sqrt{6}} \quad 0 \end{array} \rightarrow a, \\ \begin{array}{c} - \quad + \quad - \\ 0 \quad \frac{4}{5\sqrt{6}} \end{array} \rightarrow a \end{cases} \iff$$

$$\iff a \in (-\infty; -\frac{4}{5\sqrt{6}}) \cup (\frac{4}{5\sqrt{6}}; +\infty).$$

Ответ:  $(-\infty; -\frac{4}{5\sqrt{6}}) \cup (\frac{4}{5\sqrt{6}}; +\infty)$

|                          |                          |                          |                          |                                     |                          |                          |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1                        | 2                        | 3                        | 4                        | 5                                   | 6                        | 7                        |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |



№5

$$\begin{cases} \log_7^4(6x) - 2 \log_{6x} 7 = \log_{36x^2} 343 - 4, & (1) \\ \log_7^4 y + 6 \log_y 7 = \log_{y^2} (7^5) - 4. & (2) \end{cases}$$

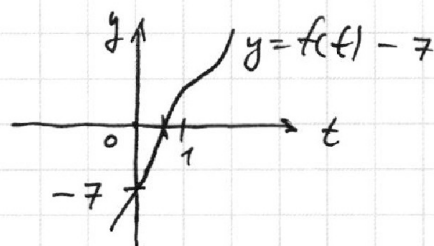
ОДЗ:

$$\begin{cases} 6x > 0, \\ 6x \neq 1, \\ 36x^2 \neq 1, \\ y > 0, \\ y \neq 1. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \in (0; \frac{1}{6}) \cup (\frac{1}{6}; +\infty), \\ y \in (0; 1) \cup (1; +\infty). \end{cases}$$

(1):  $\log_7^4 6x - \frac{2}{\log_7 6x} = \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{\log_7 6x} - 4 \quad | \cdot 2 \log_7 6x \neq 0$

$$2 \log_7^5 6x + 8 \log_7 6x - 7 = 0$$

• Пусть  $\log_7 6x = t$ , то:



$$f(t) = 2t^5 + 8t. \quad f(0) = 0.$$

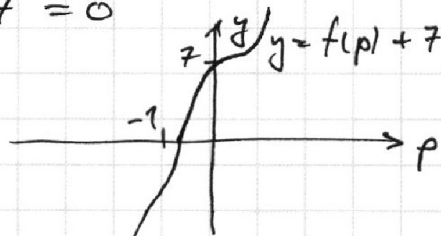
$$f'(t) = 10t^4 + 8 > 0 \Rightarrow \text{ф-ция } \uparrow \text{ возрастает.}$$

~~т.к. ф-ция возрастает~~  $f(0) - 7 < 0, \quad f(1) - 7 > 0.$

(2):  $\log_7^4 y + \frac{6}{\log_7 y} = \frac{5}{2} \cdot \frac{1}{\log_7 y} - 4 \quad | \cdot 2 \log_7 y \neq 0$

$$2 \log_7^5 y + 8 \log_7 y + 7 = 0$$

• Пусть  $\log_7 y = p$ :



$$f(p) = 2p^5 + 8p - \text{функция на ме, как и в (1).}$$

Пусть  $f(t_0) - 7 = 0, \quad f(p_0) + 7 = 0.$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

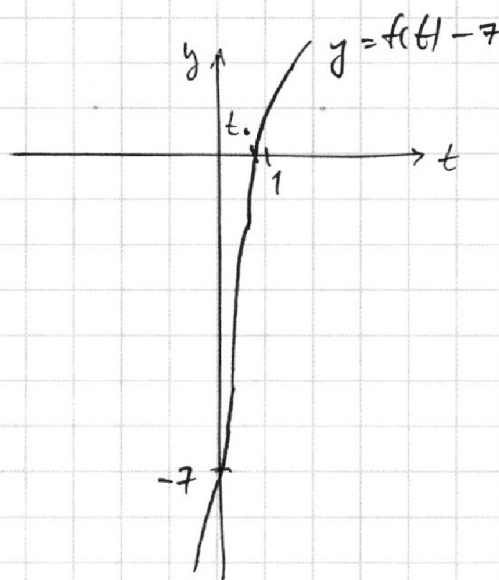
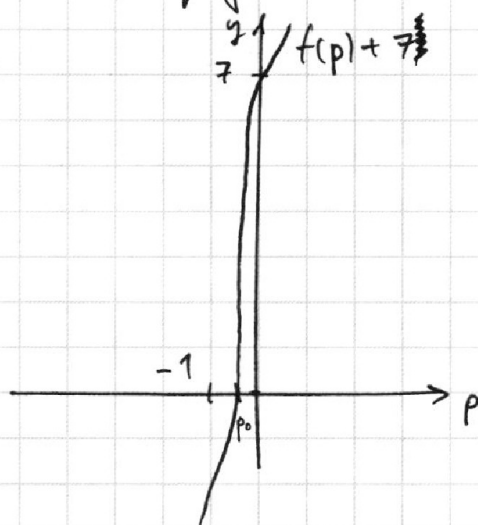
|                          |                          |                          |                          |                                     |                          |                          |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1                        | 2                        | 3                        | 4                        | 5                                   | 6                        | 7                        |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



N5 (продолжение)



Поскольку  $f$  есть сумма нечетного  $p$ -цпи, то она сама — нечетная. Из этого  $f(-7) = -f(7)$ , а значит  $t_0 = -p_0$ .

~~$xy = \frac{7^{t_0 p_0}}{6}$~~  ~~(по условию)~~  
 ~~$\therefore xy = \frac{7^{-p_0^2}}{6} = \frac{1}{6 \cdot 7^{p_0^2}}$~~

Поскольку  $t + p = \log_7(6xy)$ , то

$xy = \frac{7^{t+p}}{6}$ . Единственные возможные значения:

$t = t_0$  и  $p = p_0 = -t_0$ , поэтому  
 $xy = \frac{7^{t_0 - t_0}}{6} = \frac{7^0}{6} = \frac{1}{6}$  — такое возможно в ОДЗ (например,  $x = \frac{1}{36}, y = 6$ )

Ответ:  $\frac{1}{6}$ .



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1  
☐

2  
☐

3  
☐

4  
☐

5  
☐

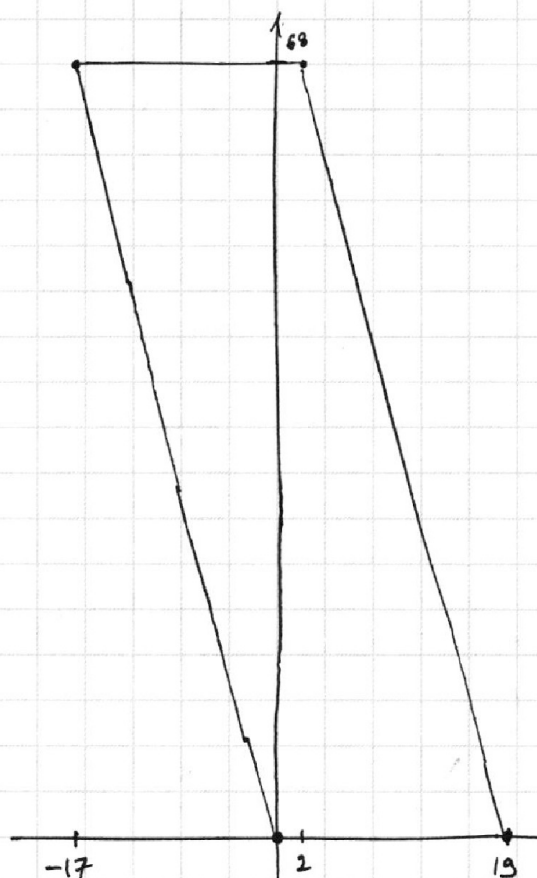
6  
☒

7  
☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

№6



$A(x_1; y_1), B(x_2; y_2)$   
 $4(x_2 - x_1) + y_2 - y_1 = 40$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

**МФТИ**

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

N1

$$a = 2^{\alpha_1} \cdot 3^{\alpha_2} \cdot 5^{\alpha_3}$$

$$b = 2^{\beta_1} \cdot 3^{\beta_2} \cdot 5^{\beta_3}$$

$$C = 2\delta_1 \cdot 3\delta_2 \cdot 5\delta_3$$

$$\alpha_1 + \beta_1 \geq 7, \quad \beta_1 + \gamma_1 \geq 13, \quad \alpha_1 + \gamma_1 \geq 14.$$

$$\Rightarrow \alpha_1 = 4, \beta_1 = 3, \gamma_1 = 10.$$

$$\alpha_2 + \beta_2 \geq 11, \quad \beta_2 + \gamma_2 \geq 15, \quad \alpha_2 + \gamma_2 \geq 17.$$

$$\Rightarrow \alpha_2 = 6, \beta_2 = 5, \gamma_2 = 11.$$

$$\alpha_3 + \beta_3 \geq 19, \quad \beta_3 + \gamma_3 \geq 18, \quad \alpha_3 + \gamma_3 \geq 13.$$

$$\Rightarrow \alpha_3 = 14, \beta_3 = 0, \gamma_3 = 23.$$

$$abc = 2^{\alpha_1 + \beta_1 + \gamma_1} \cdot 3^{\alpha_2 + \beta_2 + \gamma_2} \cdot 5^{\alpha_3 + \beta_3 + \gamma_3} = 2^{24} \cdot 3^8 \cdot 5^{50}$$

$$= 2^{17} \cdot 3^{22} \cdot 5^{13} \quad \checkmark$$

$$z^+ \begin{cases} x_2 + p_2 = 12, \\ p_2 + y_2 = 15, \\ x_2 + y_2 = 17; \end{cases} \begin{cases} p_2 + y_2 = 15 \\ 12 - p_2 + y_2 = 17 \end{cases} \quad \vee \quad \begin{cases} 12 + 2y_2 = 32 \end{cases}$$

~~124 245 246~~

$$12 - \beta_2 + 10 = 17$$

$$Y_2 = 10.$$

$$\beta_2 = 5, \quad \alpha_2 \geq 7.$$

$$\min(abc) = 2^{17} \cdot 3^{22} \cdot 5^{13}$$

$$\frac{5}{2} = \frac{2}{3.9} + \frac{6}{4} = \frac{6}{4} + \frac{2}{3.9} \quad \checkmark$$

25-3

$$\alpha_1 = \pi - \beta.$$

$$A_1 \times \sigma_1 = 13$$

$$7 - \phi_1 \quad r_{f1} = 12$$

2-4-20

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$7 + 2y_c = 17$$

$$r_1 = 1.5$$

$$\frac{2}{\frac{1}{8}} = \frac{9}{\frac{1}{6}} = \frac{9}{\frac{10}{11}} = \frac{9}{\frac{7}{11}} = \frac{9}{\frac{11}{11}} \quad (?)$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

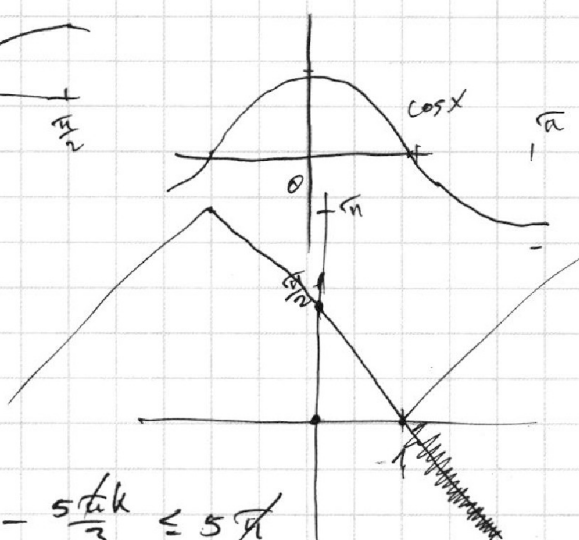
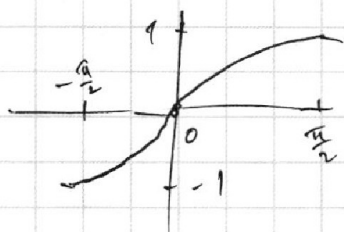
Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

|                          |                          |                          |                          |                          |                          |                          |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1                        | 2                        | 3                        | 4                        | 5                        | 6                        | 7                        |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

**МФТИ**

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

У3



$$\begin{aligned}\arccos(-1) &= \pi \\ \arccos 1 &= 0 \\ \arccos 0 &= \frac{\pi}{2}\end{aligned}$$

$$0 \leq \frac{3\pi}{2} + \frac{\pi}{6} - \frac{5\pi k}{3} \leq 5\pi$$

$$0 \leq \frac{3}{2} + \frac{1}{6} - \frac{5k}{3} \leq 5$$

$$-\frac{5}{3} \leq -\frac{5k}{3} \leq \frac{10}{3}$$

$$\therefore k = 0; 1; -1; -2.$$

$$\arccos(\sin x) = \frac{3\pi}{2} + x$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sin x = \cos\left(\frac{3\pi}{2} + x\right), \\ 0 \leq \frac{3\pi}{2} + x \leq \pi; \end{cases}$$

$$\frac{\pi}{2} - x = \frac{3\pi}{2}$$

$$\frac{\pi}{5} - \frac{6}{5}x = 2\pi k$$

$$\frac{6}{5}x = \frac{\pi}{5} - 10\pi k$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos\left(\frac{1}{5}\left(\frac{3\pi}{2} + x\right)\right)$$

$$\begin{cases} \frac{\pi}{2} - x = \frac{1}{5} \cdot \frac{3\pi}{2} + \frac{x}{5}, & \rightarrow -\frac{6}{5}x = \frac{3\pi}{10} - \frac{\pi}{2} + 2\pi k \\ \frac{\pi}{2} - x = -\frac{1}{5} \cdot \frac{3\pi}{2} - \frac{x}{5}; & \frac{6}{5}x = \frac{\pi}{5} - 10\pi k \end{cases}$$

$$x = \frac{\pi}{2} - \frac{3\pi}{10}$$

$$x = \frac{\pi}{6} - \frac{5\pi k}{3}$$

$$\frac{6}{5}x = \frac{\pi}{5}$$

$$\begin{aligned}\frac{6}{5}x - \frac{\pi}{5} &= 2\pi k \\ x &= \frac{\pi}{6} + \frac{5\pi k}{3}\end{aligned}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

|                          |                          |                          |                          |                          |                          |                          |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1                        | 2                        | 3                        | 4                        | 5                        | 6                        | 7                        |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

**МФТИ**

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$(2)-(1): \log_7^4 y - \log_7^4(6x) + \frac{6}{\log_7 y} + \frac{2}{\log_7(6x)} - \frac{5}{2\log_7 y} - \frac{3}{2\log_7 6x} = 0$$

$$(\log_7 y - \log_7 6x)(\log_7 y + \log_7 6x)(\log_7^2 6x + \log_7^2 y) +$$

$$+ \frac{7}{2\log_7 y} + \frac{7}{2\log_7 6x} = 0$$

$$\dots + \frac{7(\log_7 6x + \log_7 y)}{2\log_7 y \log_7 6x} = 0$$

$$\log + \log = s, \quad \log_7 y - \log_7 6x = r:$$

$$r \cdot s \cdot \frac{s^2 + r^2}{2} + \frac{7s}{s^2 - r^2} = 0$$

$$\frac{rs(s^2 + r^2)(s - r)(s + r) + 14s}{2(s - r)(s + r)} = 0$$

$$\frac{s(r(s^2 - r^2) + 14)}{(s - r)(s + r)} = 0$$

$$\log_7\left(\frac{y}{6x}\right) \cdot \log_7(y \cdot 6x) \cdot (\log^2 + \log^2) + \frac{7 \cdot \log_7 6x \cdot y}{2 \log_7 y \cdot \log_7 6x} = 0$$

$$(2t^5 + 8t - 7)(2p^5 + 8p + 7) = 0 \quad ??$$

$$f^2 - 4g = 0$$

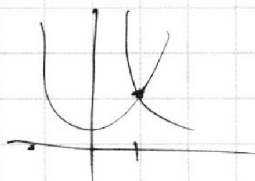
$$f = 7.$$

$$(f(t) - 7)(f(p) + 7) = ?$$

$$f(t)f(p) - 7f(p) + 7f(t) - 49 = ?$$

$$2x^5 + 8x = 7$$

$$2x(x^4 + 4) = 7$$



$$x^4 + 4 = \frac{7}{2x}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:

|                          |                          |                          |                          |                          |                          |                          |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1                        | 2                        | 3                        | 4                        | 5                        | 6                        | 7                        |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

**МФТИ**

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

15

$$\begin{cases} \log_7^4(6x) - \frac{2}{\log_7 6x} = \frac{3}{2} \log_6 x - 4 \\ \log_7^4 y + \frac{6}{\log_7 y} = \frac{5}{2} \cdot \frac{1}{\log_7 y} - 4 \end{cases}$$

(1)  $x > 0, x \neq \frac{1}{6}; 36x^2 \neq 1 \Leftrightarrow x \neq \pm \frac{1}{6}.$

$$t^4 - \frac{2}{t} = \frac{3}{2t} - 4$$

$$\parallel t = \log_7(6x).$$

$$\frac{2t^5 - 4}{t} = \frac{3 - 8t}{t}$$

$$\frac{2t^5 + 8t - 7}{t} = 0$$

$$f(t) = 10t^4 + 8 = 0 \quad \text{не имеет корней}$$

$\Rightarrow f(t)$  возрастает

$$t = \frac{1}{2}: 2 \cdot \frac{1}{32} + 8 \cdot \frac{1}{2} - 7 = \frac{1}{16} + 4 - 7 < 0.$$

$$t = \frac{1}{\sqrt{2}}: 2 \cdot \frac{1}{(\sqrt{2})^5} + \frac{8}{\sqrt{2}} - 7 = 4\sqrt{2} - 7 + \frac{1}{2\sqrt{2}} = \frac{16\sqrt{2} - 14\sqrt{2} + 1}{2\sqrt{2}} < 0$$

$$t = \frac{1}{\sqrt[5]{2}}: 2 \cdot \frac{1}{2} + \frac{8}{\sqrt[5]{2}} - 7 = \frac{8}{\sqrt[5]{2}} - 6 > 0$$

$$\frac{8}{\sqrt[5]{2}} \approx 6$$

$$\frac{4}{\sqrt[5]{2}} \approx 3$$

$$\frac{4^5}{2} \approx 13^5$$

$$\frac{7}{6} \approx x y.$$

(2)  $p^4 + \frac{6}{p} = \frac{5}{2p} - 4$

$$\frac{2p^5 + 8p + 7}{p} = 0$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

|                          |                          |                          |                          |                          |                          |                          |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1                        | 2                        | 3                        | 4                        | 5                        | 6                        | 7                        |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

**МФТИ**

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

24

(2) 
$$\begin{cases} (x+7)^2 + y^2 = 2^2 \\ x^2 + y^2 = 3^2 \end{cases}$$

$$\frac{5\sqrt{6}}{4} + \frac{5}{4} > 0$$

$$1) a = 0! \quad x = 7b.$$

минимум решение  
методом 7.

$$y = \frac{-x + 2b}{3a}$$

$$2) a \neq 0!$$

$$\frac{1}{a} + \frac{5\sqrt{6}}{4} > 0$$

$$\frac{4 + 5\sqrt{6}a}{4a} > 0$$

$$\frac{4 + 5\sqrt{6}a}{4a} > 0$$

$$y = kx + c$$
  
$$0 = k \cdot (-7 + 2b) + c$$

$$c = 7 - 2b.$$

$$2 \cdot (7 - 2b)^2 = 2 \cdot 40$$

$$5\sqrt{2} = 7 - 2b \quad \times$$

$$50 > 49$$

$$y = kx + b$$

- имеет экстрем. рин.

$$\begin{cases} (x+7)^2 + (kx+b)^2 = 4 \\ k^2 x^2 + (kx+b)^2 = 0 \end{cases}$$

$$14x + 4b = 4 - 3$$

$$x = \frac{-5b}{14} = -$$

$$2x + 3x = 7 \Rightarrow x = \frac{7}{5}.$$

$$\therefore b = \frac{3}{5} \cdot \frac{7}{5} = \frac{5}{7}.$$

$$y = -\frac{1}{3a}x + \frac{7b}{3a}.$$

$$\frac{12}{5\sqrt{6}} > \frac{1}{14}$$

$$2b = c - 7$$

$$c = \frac{2b}{7}$$

$$g = \frac{25}{14} - \frac{12}{14} = \frac{13}{14}$$

$$\frac{216}{9} = 24$$

$$\frac{216}{9} = 24$$



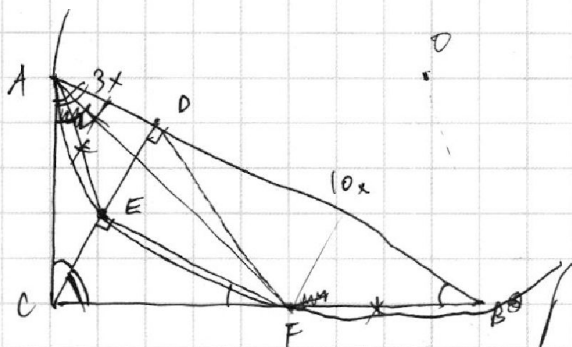
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

|                          |                          |                          |                          |                          |                          |                          |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1                        | 2                        | 3                        | 4                        | 5                        | 6                        | 7                        |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

**МФТИ**

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



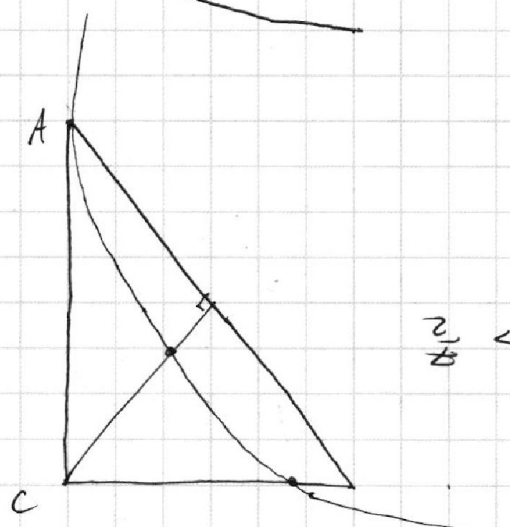
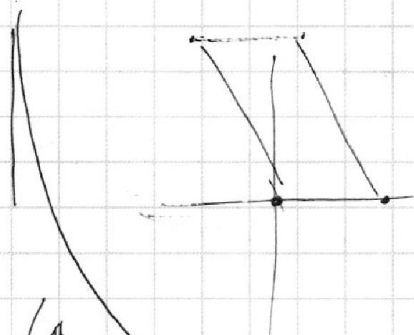
$$CD = \sqrt{30} x.$$

$$AC = \sqrt{9x^2 + 30x^2} = \sqrt{39} x$$

$$CB = \sqrt{100x^2 + 30x^2} = \sqrt{130} x$$

~~AE = EB~~, т.к. ~~внеш. углы~~.

$$\begin{aligned} EF &= 2x \\ CF &= \frac{2x}{10} \cdot \sqrt{30} = \frac{\sqrt{30}x}{5} \\ ED &= \sqrt{30} - \frac{\sqrt{30}x}{5} = \frac{\sqrt{30}(5-x)}{5} \end{aligned}$$



$$\frac{2}{5} \leftarrow \frac{2}{5}$$

$$\frac{6}{21} = \frac{3}{10} + \frac{6}{11}$$

$$\frac{3}{10} + \frac{6}{11}$$

$$= \frac{3}{10} + \frac{6}{11}$$

$$\frac{2}{5} - \frac{2}{5} = \frac{2}{5} - 11$$

$$\frac{2}{5} - 0 = \frac{3}{10} - 2 \frac{6}{10} - \frac{6}{11} = \frac{3}{10} - \frac{6}{11}$$