



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

11 КЛАСС. Вариант 4



1. [4 балла] Натуральные числа a, b, c таковы, что ab делится на $2^6 3^{13} 5^{11}$, bc делится на $2^{14} 3^{21} 5^{13}$, ac делится на $2^{16} 3^{25} 5^{28}$. Найдите наименьшее возможное значение произведения abc .
2. [5 баллов] Дан прямоугольный треугольник ABC . Окружность, касающаяся прямой AC в точке A , пересекает высоту CD , проведённую к гипотенузе, в точке E , а катет BC – в точке F . Известно, что $AB \parallel EF$, $AB : BD = 1,4$. Найдите отношение площади треугольника ACD к площади треугольника CEF .
3. [4 балла] Решите уравнение $10 \arccos(\sin x) = 9\pi - 2x$.
4. [5 баллов] Найдите все значения параметра a , для каждого из которых найдётся значение параметра b , при котором система уравнений

$$\begin{cases} 5x + 6ay - b = 0, \\ (x^2 + y^2 - 25)(x^2 + y^2 + 18y + 77) = 0 \end{cases}$$

имеет ровно 4 решения.

5. [5 баллов] Некоторые числа x и y удовлетворяют равенствам

$$\log_{11}^4 x - 6 \log_x 11 = \log_{x^3} \frac{1}{121} - 5, \quad \text{и} \quad \log_{11}^4 (0,5y) + \log_{0,5y} 11 = \log_{0,125y^3} (11^{-13}) - 5.$$

Найдите все возможные значения произведения xy .

6. [5 баллов] На координатной плоскости дан параллелограмм с вершинами в точках $O(0;0)$, $P(-15;90)$, $Q(2;90)$ и $R(17;0)$. Найдите количество пар точек $A(x_1; y_1)$ и $B(x_2; y_2)$ с целыми координатами, лежащих в этом параллелограмме (возможно, на границе) и таких, что $6x_2 - 6x_1 + y_2 - y_1 = 48$.
7. [6 баллов] Дана треугольная пирамида $SABC$, медианы AA_1 , BB_1 и CC_1 треугольника ABC пересекаются в точке M . Сфера Ω касается ребра AS в точке L и касается плоскости основания пирамиды в точке K , лежащей на отрезке AM . Сфера Ω пересекает отрезок SM в точках P и Q . Известно, что $SP = MQ$, площадь треугольника ABC равна 180, $SA = BC = 20$.
 - а) Найдите произведение длин медиан AA_1 , BB_1 и CC_1 .
 - б) Найдите двугранный угол при ребре BC пирамиды, если дополнительно известно, что Ω касается грани BCS в точке N , $SN = 6$, а радиус сферы Ω равен 8.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☒	☐	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

1) Пусть $a = 2^{d_1} \cdot 3^{d_2} \cdot 5^{d_3}$; $b = 2^{\beta_1} \cdot 3^{\beta_2} \cdot 5^{\beta_3}$; $c = 2^{d_1} \cdot 3^{d_2} \cdot 5^{d_3}$

$\Rightarrow$ т.к. $ab : 2^6 \cdot 3^{13} \cdot 5^{11} \Rightarrow$

$$\begin{aligned} d_1 + \beta_1 &\geq 6 & (1) \\ d_2 + \beta_2 &\geq 13 & (2) \\ d_3 + \beta_3 &\geq 11 & (3) \end{aligned}$$

Аналогично получаем, что

$$\begin{aligned} \beta_1 + j_1 &\geq 14 & (4) & d_1 + j_1 &\geq 16 & (7) \\ \beta_2 + j_2 &\geq 21 & (5) & d_2 + j_2 &\geq 25 & (8) \\ \beta_3 + j_3 &\geq 13 & (6) & d_3 + j_3 &\geq 28 & (9) \end{aligned}$$

2) $abc = 2^{d_1 + \beta_1 + j_1} \cdot 3^{d_2 + \beta_2 + j_2} \cdot 5^{d_3 + \beta_3 + j_3}$

Заметим, что $d_1; d_2; d_3; \beta_1; \beta_2; \beta_3; j_1; j_2; j_3$ — целые
и $d_1 + \beta_1 + j_1$ т.к. в противном случае это было
противоречие условию задачи

$\Rightarrow (1) + (4) + (7) : 2(d_1 + \beta_1 + j_1) \geq 36 \Rightarrow d_1 + \beta_1 + j_1 \geq 18$

Аналогично, $d_2 + \beta_2 + j_2 \geq 29,5$ $d_2 + \beta_2 + j_2$ — целое

$d_3 + \beta_3 + j_3 \geq 26$

$\Rightarrow abc \geq 2^{18} \cdot 3^{30} \cdot 5^{26}$

Ответ: $2^{18} \cdot 3^{30} \cdot 5^{26}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☒	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$1) \arccos t \in [0; \pi] \Rightarrow 0 \leq 9\pi - 2x \leq 10\pi$$

$$-9\pi \leq -2x \leq \pi$$

$$\frac{9\pi}{2} \geq x \geq -\frac{\pi}{2}$$

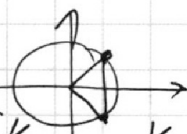
$$2) \arccos(\sin x) = \frac{9\pi - 2x}{10} \Rightarrow \cos\left(\frac{9\pi - 2x}{10}\right) = \sin x$$

$$\cos\left(\frac{9\pi - 2x}{10}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \frac{9\pi - 2x}{10} = \frac{\pi}{2} - x + 2\pi k \\ \frac{9\pi - 2x}{10} = x - \frac{\pi}{2} + 2\pi n \end{cases}$$

$$X = -\frac{\pi}{2} + \frac{5}{2}\pi k, k \in \mathbb{Z}$$

$$X = \frac{7}{6}\pi - \frac{5}{3}\pi n, n \in \mathbb{Z}$$



$$\Rightarrow \text{используя условие для } x: -\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{9\pi}{2}$$

$$\Rightarrow \text{подходят такие корни: } -\frac{\pi}{2}; 2\pi; \frac{9\pi}{2}; \frac{7\pi}{6}; \frac{17\pi}{6};$$

~~Ответ: $x = -\frac{\pi}{2}; 2\pi$~~

$$\text{Ответ: } x = \left\{ -\frac{\pi}{2}; \frac{7\pi}{6}; 2\pi; \frac{17\pi}{6}; \frac{9\pi}{2} \right\}$$

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☒ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$1) (x^2 + y^2 - 25)(x^2 + y^2 + 18y + 81 - 4) = 0$$

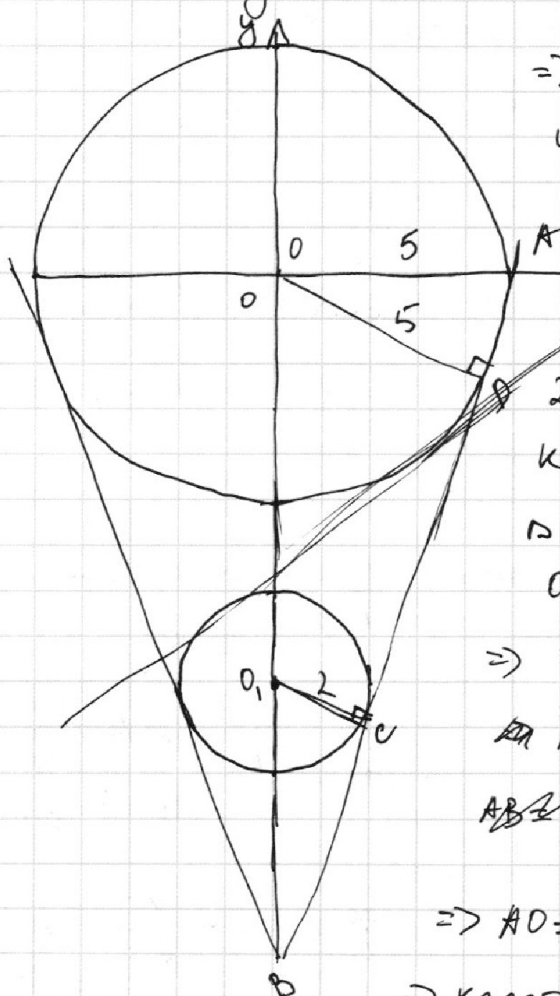
$$\Rightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 = 25 \\ x^2 + (y+9)^2 = 4 \end{cases}$$

$$5x + 6ay - 6 = 0$$

$\Leftrightarrow 2$ уравнения окружности

$$y = \frac{6-5x}{6a} \leftarrow \text{прямая}$$

$\Rightarrow$ чтобы система уравнений имела 4 корня $\Rightarrow$ прямая должна пересекать 2 окружности, но ~~ка касаясь~~ быть при этом касательной



2) Найдём уравнение касательной к двум окружностям

$$\triangle ODB \sim \triangle O_1CB \Rightarrow \frac{OC}{OD} = \frac{O_1B}{OB}$$

$OO_1 = 9$, т.к. O_1 - центр окружности

$$\Rightarrow \frac{2}{5} = \frac{O_1B}{9+O_1B} \Rightarrow O_1B = 6$$

$$\triangle ODB \sim \triangle AOB \Rightarrow \frac{OD}{AO} = \frac{OB}{AB}$$

$$AB = \sqrt{15^2 + 5^2} = \sqrt{200} = 10\sqrt{2}$$

$$\Rightarrow AO = \frac{5 \cdot 15}{2 \cdot 10\sqrt{2}} = \frac{15}{2\sqrt{2}}$$

$\Rightarrow$ касательная пересекает ось x

$$\Rightarrow \begin{cases} 0 = \frac{15}{2\sqrt{2}}k + b \\ -15 = b \end{cases} \Rightarrow \boxed{k = 2\sqrt{2}}$$

в точке $(\frac{15}{2\sqrt{2}}; 0)$
ось y в т. $(0; -15)$

3) Заметим, что прямая, касающаяся окружностей слева ~~и справа~~ имеет такой же наклон, только с другим знаком. $k = -2\sqrt{2}$



1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☒	☐	☐	☐

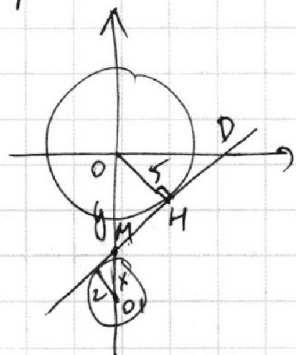
Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

4) Значит, прямая $y = -\frac{5}{6a}x + \frac{6}{6a}$ должна иметь ~~также~~ наклон ближе к оси y , чем наклон касательных и тогда обязательно найдётся такое b , что выполнится условие, т.к. прямая, не параллельная оси y , обязательно где-нибудь её пересечёт.

$$\Rightarrow -\frac{5}{6a} \in (-\infty; -2\sqrt{2}) \cup (2\sqrt{2}; +\infty)$$

$$\Rightarrow a \in \left(-\frac{5}{6 \cdot 2\sqrt{2}}; \frac{5}{6 \cdot 2\sqrt{2}}\right) \quad a \in \left(-\frac{5}{6 \cdot 2\sqrt{2}}; 0\right) \cup \left(0; \frac{5}{6 \cdot 2\sqrt{2}}\right)$$

5) Но касательная может касаться и внутренним образом $\Rightarrow$ тогда наклон будет больше



$OD = 9$. Пусть l касательная пересекает ось y в точке M

$$\Rightarrow OM + MO' = 9$$

$$\frac{OM}{MO'} = \frac{25}{45}$$

$$MO' = \frac{45}{2}$$

$$\Rightarrow OM = \frac{25}{2}$$

$$\Rightarrow \frac{25}{2} MO' = 9$$

$$\begin{cases} MO' = \frac{18}{25} \\ OM = \frac{45}{2} \end{cases}$$

$$OM^2 + OD^2 = (OM^2 - 25 + \sqrt{OD^2 - 25})^2$$

$$25 = \sqrt{OM^2 - 25} \cdot \sqrt{OD^2 - 25}$$

$$\Rightarrow OD^2 = \frac{25^2 + 25 \cdot \left(\frac{45}{2}\right)^2 - 25^2}{\left(\frac{45}{2}\right)^2 - 25} = \frac{(5 \cdot \frac{45}{2})^2}{(45 - 35)(45 + 35)} = \frac{(5 \cdot 45)^2}{10 \cdot 80}$$

$$\Rightarrow OD = \frac{8 \cdot 45}{2 \cdot 2\sqrt{2}} = \frac{45}{\sqrt{2}}$$

$$k \cdot \frac{45}{\sqrt{2}} - \frac{45}{2} = 0 \Rightarrow k = \frac{4\sqrt{2}}{7}$$

$$OD^2 - 25 = \frac{25^2}{\left(\frac{45}{2}\right)^2 - 25}$$

$$b = -\frac{45}{2}$$

$$b = -\frac{45}{2}$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☒	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$-\frac{5}{6a} \in \left(-\infty; -\frac{4\sqrt{2}}{7}\right) \cup \left(\frac{4\sqrt{2}}{7}; +\infty\right)$$

$$\Rightarrow a \in \left(-\frac{35}{24\sqrt{2}}; \frac{35}{24\sqrt{2}}\right)$$

$$a \in \left(-\frac{35}{24\sqrt{2}}; 0\right) \cup \left(0; \frac{35}{24\sqrt{2}}\right)$$

$$\text{Ответ: } a \in \left(-\frac{35}{24\sqrt{2}}; 0\right) \cup \left(0; \frac{35}{24\sqrt{2}}\right)$$

$$\Rightarrow \text{Объединим: } -\frac{5}{6a} \in \left(-\infty; -\frac{4\sqrt{2}}{7}\right) \cup \left(\frac{4\sqrt{2}}{7}; +\infty\right)$$

$$-\frac{5}{6a} \in \left(-\infty; -\frac{4\sqrt{2}}{7}\right) \cup \left(\frac{4\sqrt{2}}{7}; +\infty\right)$$

$$\Rightarrow a \in \left(-\frac{35}{24\sqrt{2}}; 0\right) \cup \left(0; \frac{35}{24\sqrt{2}}\right)$$

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☒ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

1) Пусть $t = \log_{11} x$

$\Rightarrow t^4 - \frac{6}{t} = -\frac{2}{3t} - 5 \quad t \neq 0$

$\Rightarrow t^5 + 5t - \frac{16}{3} = 0$

Заметим, что $f'(x) > 0$
при $f(x) = x^5 + 5x - \frac{16}{3}$

$\Rightarrow$ решение единственное

2) Пусть $p = \log_{11}(0,5y)$

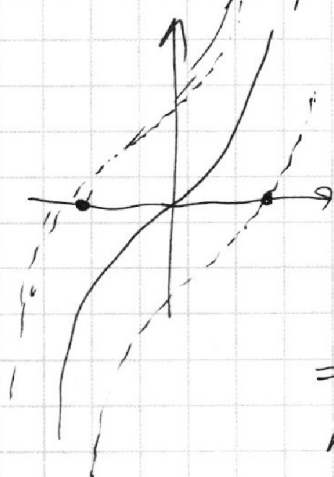
$\Rightarrow p^4 + \frac{1}{p} = -\frac{13}{3p} - 5 \quad * p \text{ т.к. } p \neq 0$

$p^5 + 5p + \frac{16}{3} = 0$

Аналогично, функция возрастает

Заметим, что $g(x) = x^5 + 5x$ имеет единственный корень

$x(x^4 + 5) = 0$, а $x^4 \geq 0 \Rightarrow x = 0$



Заметим, что при $f_1(x) = x^5 + 5x - \frac{16}{3}$
 $f_2(x) = x^5 + 5x + \frac{16}{3}$

$f_1(x)$ и $f_2(x)$ — тот же самый

график $g(x)$ только сдвинутый
вверх или вниз на $\frac{16}{3}$

$\Rightarrow$ корни f_1 и корни $f_2(x)$ равен по
модулю корню $g(x)$, но различен по

3) Т.к. $t = \log_{11} x \Rightarrow 11^t = x \Rightarrow xy = 2 \cdot 11^{(p+t)}$
Аналогично, $11^p = \frac{1}{2}y$

Т.к. $|p| = |t| \quad p = -t \Rightarrow p+t=0 \Rightarrow xy = 2 \cdot 11^0 = 2$

Ответ: 2

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$y_2 + 6 \cdot \left[-\frac{y_2}{6}; -\frac{y_2 - 102}{6} \right] - y_1 - 6 \left[-\frac{y_1}{6}; -\frac{y_1 - 102}{6} \right] = 48$$

$$y_2 + [-y_2; -(y_2 - 102)] - y_1 - [-y_1; -(y_1 - 102)] = 48$$

$$y_2 - [y_2 - 102; y_2] - (y_1 - [y_1 - 102; y_1]) = 48$$

$$\alpha - \beta = 48 \quad \alpha = \beta + 48 \quad \beta(0; 0)$$

$$y_2 - 48 = 6x_2$$

$$y_2 = 30 \quad x_2 = 42 \quad x_2 \in [-15; 12]$$

$$y_2 \in [33; 68] \quad y_2 = 33 \quad x_2 = 15$$

$$\frac{+5}{6a} = +\frac{4\sqrt{2}}{7}$$

$$\frac{-5}{6a} = -\frac{4\sqrt{2}}{7}$$

$$x^2 + y^2 = 5$$

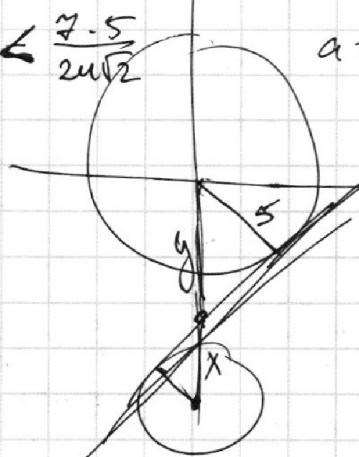
$$k \cdot \frac{5 \cdot 9}{4\sqrt{2}} - \frac{45}{7} = 0$$

$$a \leq \frac{7 \cdot 5}{2\sqrt{2}}$$

$$a = -\frac{35}{2\sqrt{2}}$$

$$x^2 + k^2 x^2 + 2kxb + b^2 = 5$$

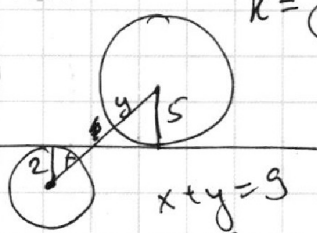
$$k = \frac{45 \cdot 4\sqrt{2}}{7 \cdot 45}$$



$$\left(\frac{45}{7} - 5 \right) \left(\frac{45}{7} + 5 \right)$$

$$y = \frac{45}{7}$$

$$y = kx + b = -\frac{45}{107} \left(\frac{45-35}{7} \right) \left(\frac{45+35}{7} \right)$$



$$x + y = 9$$

$$\frac{5}{y} = \frac{2}{x}$$

$$\frac{x}{y} = \frac{2}{5}$$

$$\frac{4}{5}y = 9$$

$$y = \frac{45}{4}$$

$$x = \frac{45}{4} \cdot \frac{2}{5} = \frac{9}{2}$$

$$y^2 + z^2 = (y^2 - 25 + z^2 - 25) \left(\frac{45-35}{7} \right) \left(\frac{45+35}{7} \right)$$

$$y^2 + z^2 = y^2 + z^2 - 50 + 2\sqrt{y^2 - 25} \sqrt{z^2 - 25}$$

$$25 = \sqrt{y^2 - 25} \sqrt{z^2 - 25}$$

$$2\sqrt{2} \cdot \frac{35}{2\sqrt{2}} = \frac{5^2 \cdot 9^2}{7^2} - 5^2$$

$$\frac{5 \cdot 25 \cdot 7}{20\sqrt{2}} = \sqrt{z^2 - 25}$$

$$\frac{4 \cdot 5^2 \cdot 7^2}{4^2 \cdot 2} + 15 = z^2$$

$$\Rightarrow 5^2 \left(\frac{9^2}{7^2} - 1 \right) = 5^2 \left(\frac{9^2 - 7^2}{7^2} \right) = \frac{5}{7} \sqrt{2 \cdot 16} =$$

$$5^2 \left(\frac{9^2 + 4^2 \cdot 2}{4^2 \cdot 2} \right) = z^2$$

$$49 + 32 = 50 + 31 = 81$$

$$= \frac{20}{7} \sqrt{2}$$

$$\frac{5 \cdot 9}{4\sqrt{2}} = z$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$p^4 + \frac{1}{p} = -\frac{13}{3p} - 5$$

$$p^5 + 1 = -\frac{13}{3} - 5p$$

$$p^5 + 5p + \frac{16}{3} = 0$$

$$3p^5 + 15p + 16 = 0$$

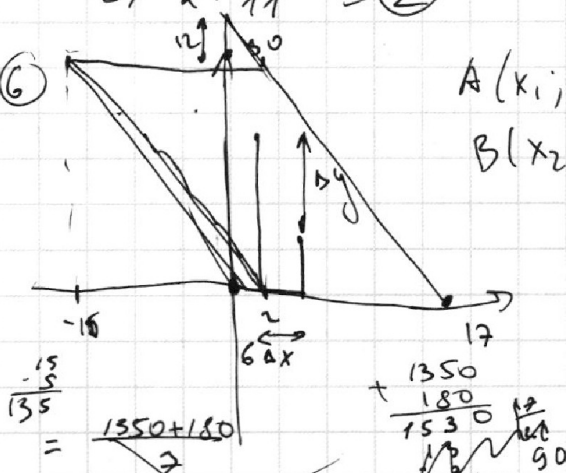
$$3p^5 + 15p = f(x)$$

$$3p(p^4 + 1) = f(x)$$

$$p + \frac{1}{p} = 0$$

$$\Rightarrow 2 \cdot 11^0 = \textcircled{2}$$

⑥



$$\Rightarrow y_2 = -\frac{90}{17}x + \frac{180}{17} + 90$$

$$k = -\frac{90}{15} = -6 \Rightarrow y = -6x$$

$$y_2 = -6x + b$$

$$-6 \cdot 17 + b = 0 \quad b = 17 \cdot 6$$

$$f_1(x) = -6x$$

$$f_2(x) = -6x + 102$$

$$y_1 \in [0; 90] \quad x_1 = \left[-\frac{y_1}{6}; -\frac{y_1 - 102}{6}\right]$$

$$y_1 + \left[-\frac{y_1}{6}; -\frac{y_1 - 102}{6}\right] + y_2 + \left[-\frac{y_2}{6}; -\frac{y_2 - 102}{6}\right] = 48$$

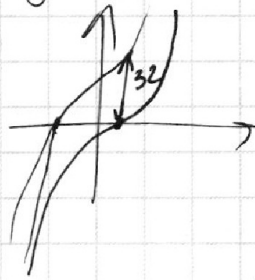
$$\max \frac{5}{6}y_1 + \frac{5}{6}y_2 \Rightarrow 90 \cdot \frac{10}{6} = 150$$

$$P = \log_{11}(0.5y)$$

$$11^P = \frac{1}{2}y$$

$$2 \cdot 11^P \cdot 11^{\frac{1}{11}}$$

p - огко реш



$$x_1 \in (-15; 17)$$

$$y = kx + b \quad y = 0 \quad x = 2$$

$$0 = 2k + b = 0 \quad y = 90 \quad x = -15$$

$$90 = -15k + b$$

$$-17k = 90$$

$$b = \frac{180}{17}$$

$$k = -\frac{90}{17}$$

$$y = -\frac{90}{17}x + \frac{180}{17}$$

$$x = -15 \Rightarrow y = \frac{90 \cdot 15 + 180}{17} =$$

$$b = 0$$

$$y = kx$$

$$90 = k - 15$$

$$\frac{-12}{102}$$

Если $x_1 \in [-15; 17]$

$$\Rightarrow y_1 \in [-6x_1; -6x_1 + 102]$$

$$y_1 = -6x_1 + 102$$

$$y_2 = 102 - y_1$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$y = \frac{3\sqrt{2}}{3}x - 15$$

$$y = -\frac{3\sqrt{2}}{3}x - 15$$

1; 3; 4

$$-\frac{5}{6a} \leq -2\sqrt{2}$$

~~или~~

$$\frac{5}{6a} > 2\sqrt{2}$$

$$\frac{1}{a} > \frac{6 \cdot 2\sqrt{2}}{5}$$

$$\Rightarrow k \in (-\infty; -\frac{3\sqrt{2}}{3}) \cup (\frac{3\sqrt{2}}{3}; +\infty)$$

$$\frac{5}{4a} > 2\sqrt{2}$$

$$|a| < \frac{5}{6 \cdot 2\sqrt{2}}$$

Если $b = a$

Все знаменатели

$a > -\frac{5}{6 \cdot 2\sqrt{2}}$ для каждого из которых найдется b

$$5) 1) \log_{11} x - 6 \log_x 11 = -\frac{2}{3} \log_x 11 - 5$$

Обозначим замену;

$$t = \log_{11} x$$

$$t^4 - 6t = -\frac{2}{3}t - 5$$

$$3t^4 - 18t = -2t - 15$$

$$3t^4 - 16t + 15 = 0$$

$$\log_{11}^4 x - \frac{6}{\log_{11} x} = -\frac{2}{3} \log_{11} x - 5$$

$$t^5 - 6 = \frac{2}{3} - 5 \quad t^5 = \frac{2}{3} + 1 = \frac{5}{3}$$

$$t^5 + 5t = \frac{2}{3} + 6 \neq 1 \quad t^5 = 32$$

$$3t^5 + 15t = 2 + 18 = 20 \quad \frac{32}{56}$$

$$3t^5 + 15t - 20 = 0$$

$$2) \log_{11}^4(0,5y) + \frac{1}{\log_{11}(0,5y)} = \frac{13}{3} \log_{11}(0,5y) + 11 - 5$$

$$p = \log_{11}(0,5y)$$

$$t^4 - \frac{6}{t} = -\frac{2}{3} \cdot \frac{1}{t} - 5$$

$$t^5 - 6 = -\frac{2}{3} - 5t$$

$$15t^4 + 15 \Rightarrow 15(t^4 + 1) = 0$$

$$\frac{3}{32} + \frac{15}{2} = \frac{3 + 15 \cdot 16}{32} = 32 \cdot 16$$

$$\frac{3}{45} + \frac{15}{4} = 16$$

$$3 + 15 \cdot 4^4 =$$

$$t^5 + 5t - \frac{16}{3} = 0$$

$$3t^5 + 15t - 16 = 0$$

$$1 \text{ реш. } t \in (0; 1)$$

$$11^t = x$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

① $ab: 2^6 \cdot 3^{13} \cdot 5^{11}$

$\text{НОД}(1;2) = 2^6 \cdot 3^{13} \cdot 5^{11}$

② $bc: 2^{14} \cdot 3^{21} \cdot 5^{13}$

$\text{НОД}(2;3) = 2^{14} \cdot 3^{21} \cdot 5^{13}$

③ $ac: 2^{16} \cdot 3^{25} \cdot 5^{28}$

$\text{НОД}(1;3) = 2^6 \cdot 3^{13} \cdot 5^{11}$

①

②

③

min $\sqrt{①②③}$

① $2^6 \cdot 3^{13} \cdot 5^{11} \cdot k \leftarrow k - \text{целое натуральное}$

② $2^6 \cdot 3^{13} \cdot 5^{11} \cdot 2^8 \cdot 3^8 \cdot 5^2 \cdot (m) \rightarrow 1; 2; 5 \dots$

③ $2^6 \cdot 3^{13} \cdot 5^{11} \cdot 2^{10} \cdot 3^{12} \cdot 5^{17} \cdot (n) \rightarrow 1; 2; 3 \dots$

$\sqrt{2^{36} \cdot 3^{59} \cdot 5^{52} \cdot k \cdot m \cdot n}$

$2^{18} \cdot 3^{30} \cdot 5^{26}$

why?

$\frac{34}{25} + \frac{24}{52}$

Ищем $a=1; b=2^6 \cdot 3^{13} \cdot 5^{11} \quad c=2^{14} \cdot 3^{21} \cdot 5^{13}$

$a=2^6 \cdot 3^{13} \cdot 5^{11}$

$b=1$

$c=2^{14} \cdot 3^{21} \cdot 5^{13} \quad k=\frac{2\sqrt{2}}{3}$

Ищем $a=2^{\alpha_1} \cdot 3^{\alpha_2} \cdot 5^{\alpha_3}$

$b=2^{\beta_1} \cdot 3^{\beta_2} \cdot 5^{\beta_3}$

$kx-15=0$

$c=2^{\gamma_1} \cdot 3^{\gamma_2} \cdot 5^{\gamma_3}$

$k \cdot \frac{3}{2\sqrt{2}} \cdot 15 - 15 = 0$

$k \cdot \frac{3}{2\sqrt{2}} = 1$

$\Rightarrow a+b \geq$

$\alpha_1 + \beta_1 \geq 6$

$\beta_1 + \gamma_1 \geq 14$

$\alpha_1 + \gamma_1 \geq 16$

$\alpha_2 + \beta_2 \geq 13$

$\beta_2 + \gamma_2 \geq 21$

$\alpha_2 + \gamma_2 \geq 25$

$\alpha_3 + \beta_3 \geq 11$

$\beta_3 + \gamma_3 \geq 13$

$\alpha_3 + \gamma_3 \geq 28$

$2\alpha_1 + 2\beta_1 + 2\gamma_1 \geq 36$

$\alpha_1 + \beta_1 + \gamma_1 \geq 18$

целые $\Rightarrow 34 + 25 = 59 \Rightarrow \alpha_2 + \beta_2 + \gamma_2 \geq 23,5$

④ $5x+6ay-b=0$

$\begin{cases} x^2+y^2=25 \\ x^2+y^2+18y+81=4 \end{cases}$

$x^2+(y+9)^2=4$

$\sqrt{5^2-5^2} = \sqrt{0 \cdot 20} = 10\sqrt{2}$

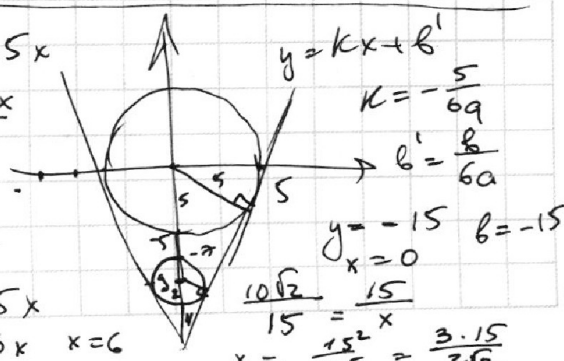
$6ay = b-5x$

$y = \frac{b-5x}{6a}$

$\frac{x}{5} = \frac{2}{5}$

$2x+18=5x$

$18=3x \quad x=6$



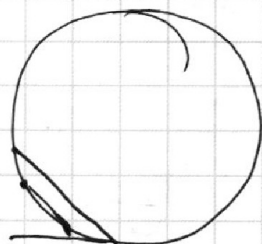
На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ



$$\frac{10x^2}{EF^2}$$

$$\frac{EF}{EC} = \frac{CD}{2x}$$

$$\frac{2x}{5x} = \frac{EC \cdot CD \cdot CE}{EF \cdot CD \cdot EF} =$$

$$= \left(\frac{EC}{EF}\right)^2 = \frac{2}{5}$$

$$5x = \frac{5x \cdot \sqrt{\frac{2}{5}}}{\sqrt{\frac{2}{5}}}$$

$$\frac{AC}{BC} = \tan \alpha$$

$$3x = CD \left(\frac{EF}{CE} - \frac{EC}{EF} \right) = 5x \cdot \sqrt{\frac{2}{5}} \left(\sqrt{\frac{5}{2}} - \sqrt{\frac{2}{5}} \right) = 5x - 5x \cdot \frac{2}{5} = 3x$$

$$\frac{a}{b} = \sqrt{\frac{2}{5}} \quad a^2 + b^2 = 49x^2$$

$$a = \sqrt{\frac{2}{5}} b$$

$$35x^2 - 25x^2 = \sqrt{10x^2} = \sqrt{10} x$$

$$a = \sqrt{4x^2 + 10x^2} = \sqrt{14x^2} = \sqrt{14} x$$

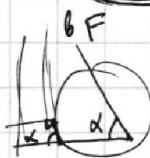
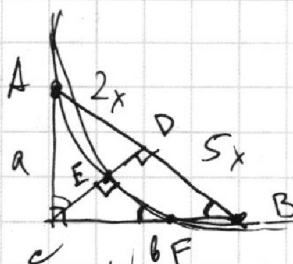
$$CF = BC \cdot k$$

$$CE = BC \cdot k \cdot \sqrt{\frac{2}{5}}$$

$$EF = 5x \cdot k$$

$$BC^2 \cdot k^2 \cdot \frac{2}{5} + 25x^2 k^2 = BC^2 \cdot k^2$$

$$35x^2 \cdot \frac{2}{5} = 25x^2$$



$$\frac{7x}{5x} = \frac{14}{10} = 1,4$$

$$\frac{2x \cdot CD}{EF \cdot CE}$$

$$\frac{CD}{CE} = \frac{5x}{EF}$$

$$2x = \frac{EC \cdot CD}{EF}$$

$$5x = \frac{CD \cdot EF}{CE}$$

$$CE = EF$$

$$CD = 5x \cdot \sqrt{\frac{2}{5}}$$

$$2x \cdot$$

$$EC^2 + EF^2 = CF^2$$

$$AC^2 = 4x^2 + CD^2$$

$$BC^2 = 25x^2 + CD^2$$

$$\frac{CF}{CB} = \frac{CE}{CD}$$

$$\frac{2}{5} b^2 + b^2 = 49x^2$$

$$\frac{7}{5} b^2 = 49x^2$$

$$b = \sqrt{35} x$$

$$b^2 = 35x^2$$

$$CD = \sqrt{\frac{2}{5}} b$$

$$CD = \sqrt{10} x \quad CB = \sqrt{35} x$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$10 \arccos \frac{17}{6} = \frac{5}{6}$
 $10 \arccos(\sin x) = 9\pi - 2x$
 $\arccos t \in (0; \pi)$
 $\frac{1}{2}$
 $\frac{10}{3} = \frac{3 - 2 \cdot \frac{17}{6}}{5\pi - 2x} \in [0; 10\pi]$
 $x \in (0; 2\pi)$
 $y \in (-1; 1)$

$10 \arccos(\sin x) \in (0; 10\pi) \Rightarrow \arccos d = \beta$
 $\Rightarrow \cos \beta = \sin x$
 $\sin x = \cos(\frac{\pi}{2} - x)$
 $\cos \frac{9\pi - 2x}{10} = \sin x$
 $\cos \frac{9\pi - 2x}{10} = \cos(\frac{\pi}{2} - x)$
 $\arccos 0 = 1 \Rightarrow \cos 0 = 1$

$1) \frac{9\pi - 2x}{10} = \frac{\pi}{2} - x + 2\pi k$
 $9\pi - 2x = 5\pi - 10x + 20\pi k$
 $8x = -4\pi + 20\pi k$
 $x = -\frac{\pi}{2} + \frac{5}{2}\pi k$
 $2) \frac{9\pi - 2x}{10} = x - \frac{\pi}{2} + 2\pi n$
 $9\pi - 2x = 10x - 5\pi + 20\pi n$
 $12x = 14\pi - 20\pi n$
 $x = \frac{7}{6}\pi - \frac{5}{3}\pi n$

$\arccos(\sin x) = \pi \Rightarrow \cos \pi = \sin x$
 $\sin x = -1$
 $x = \frac{3}{2}\pi$
 $\frac{4\pi}{6} = \frac{2}{3}\pi \cdot 10 = \frac{20}{3}\pi$
 $9\pi - 2 \cdot \frac{7}{6}\pi = \frac{27 - 7}{3}\pi$
 $\frac{2\pi - 10\pi}{6} = \frac{-8\pi}{6}$
 $\frac{7}{6}\pi - \frac{10}{6}\pi = -\frac{3}{6}\pi = -\frac{\pi}{2}$
 $\frac{7}{6} + \frac{10}{6} = \frac{17}{6}$
 $\frac{17}{6} \pi = \frac{5}{6}\pi$
 $2x \cdot 5x + \dots$
 $\frac{EF}{BD} = \frac{CE}{CD}$
 $5x = \frac{EF \cdot CD}{CE}$

