



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

11 КЛАСС. Вариант 2



1. [3 балла] Найдите все действительные значения x , при каждом из которых существует геометрическая прогрессия, состоящая из действительных чисел и такая, что её четвёртый член равен

$$\sqrt{\frac{15x+6}{(x-3)^3}}, \text{ десятый член равен } x+4, \text{ а двенадцатый член равен } \sqrt{(15x+6)(x-3)}.$$

2. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \sqrt{x+7} - \sqrt{5-x-3z} + 6 = 2\sqrt{y-2x-x^2+z}, \\ |y-20| + 2|y-35| = \sqrt{225-z^2}. \end{cases}$$

3. [5 баллов] Найдите все значения параметра p , при которых уравнение

$$\cos 3x + 6 \cos x = 3 \cos 2x + p$$

имеет хотя бы одно решение. Решите это уравнение при всех таких p .

4. [5 баллов] Две окружности ω_1 и ω_2 пересекаются в точках A и B , а их общая касательная имеет с ω_1 и ω_2 общие точки C и D соответственно, причём точка B расположена ближе к прямой CD , чем точка A . Луч CB пересекает ω_2 в точках B и E . Найдите отношение $ED : CD$, если диагональ AD четырёхугольника $ACDE$ делит отрезок CE в отношении $9 : 25$, считая от вершины C .
5. [4 балла] Дан клетчатый прямоугольник 150×200 . Сколькими способами можно закрасить 8 клеток этого прямоугольника так, чтобы закрашенное множество обладало хотя бы одной из следующих симметрий: относительно центра прямоугольника, относительно любой из двух "средних линий" прямоугольника ("средней линией" прямоугольника назовём отрезок, соединяющий середины двух его противоположных сторон). Ответ дайте в виде выражения, содержащего не более трёх членов (в них могут входить факториалы, биномиальные коэффициенты).
6. [4 балла] Найдите все тройки целых чисел $(a; b; c)$ такие, что:
- $a > b$,
 - число $a - b$ не кратно 3,
 - число $(a - c)(b - c)$ является квадратом некоторого простого числа,
 - выполняется равенство $a + b^2 = 820$.
7. [6 баллов] В основании призмы лежит равносторонний треугольник со стороной 2. Площади её боковых граней равны 5, 5 и 4. Найдите высоту призмы.

На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



1 ☒ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

N 1

$$\alpha_4 = \sqrt{\frac{15k+6}{(k-3)^3}}, \quad \alpha_{10} = k+4, \quad \alpha_{12} = \sqrt{(15k+6)(k-3)}$$

$$\alpha_1 \cdot q^3, \quad \alpha_1 \cdot q^9, \quad \alpha_1 \cdot q^{11}$$

$$\alpha_1^2 \cdot q^{14} = \frac{15k+6}{k-3}$$

$$\alpha_{10} = k+4, \quad \alpha_1 \cdot q^9 = k+4$$

т.к. α в α_4 под корнем коэффициент $15k+6$.
но α_1 не отрицательное, а значит $\frac{15k+6}{k-3}$ тоже $\frac{15k+6}{k-3}$
отсюда $\alpha_1 \cdot q^4 = \alpha_1 \cdot q^4 = \sqrt{\frac{15k+6}{k-3}} = \alpha_4 \cdot q^4 \geq 0$, поэтому

$$\frac{\alpha_3}{\alpha_4} = q^4 = k-3, \quad q^2 = \sqrt{k-3}$$

ведь $k \geq 3$, значит $\alpha_{10}, \alpha_1, \alpha_{12} \geq 0$
 $(k+4) \cdot \sqrt{k-3} = \sqrt{(15k+6)(k-3)}$, т.е. либо $k-3=0$,
что невозможно, либо $k-3$ находится в выражении
под корнем в α_4 , либо $k+4 = \sqrt{15k+6}$

$$k^2 + 16k = k^2 + 8k + 16 = 15k + 6$$

$$k^2 - 7k + 10 = 0 \quad D = 49 - 40 = 9$$

$$k = \frac{7 \pm 3}{2} = 5; 2$$

заметьте, что $k=2$ не подходит, ведь $q^4 = k-3 = -1$
невозможно.

ответ: $k=5$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1
☐

2
☒

3
☐

4
☐

5
☐

6
☐

7
☐

СТРАНИЦА

1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

№ 2

$$\sqrt{x+4} - \sqrt{5-x-3z} + 6 = 2\sqrt{y-2x-x^2+z}$$
$$|y-20| + 24 = 35 \Rightarrow \sqrt{225-z^2}$$

$$x+4+5-x-3z-2\sqrt{(x+4)(5-x-3z)} = 4y-8x-4x^2+4z+36$$
$$-12\sqrt{y-2x-x^2+z}$$

$$12-3z-2\sqrt{x-}$$
$$5x-x^2-3xz+35-4x-12z = 4y-8x-4x^2+4z+36$$
$$-12\sqrt{y-2x-x^2+z}$$

$$y \leq 20$$

$$y-20+24$$

$$20-y+40-2y = \sqrt{225-z^2}$$

$$40-3y = \sqrt{225-z^2}$$

$$40$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



1 ☐ 2 ☐ 3 ☒ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА

1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

N 3

$$\cos 3\pi + 6\cos \pi = 3\cos 2\pi + p$$

$$\begin{aligned} \cos 3\pi &= \cos 2\pi \cdot \cos \pi - 2\sin 2\pi \cdot \sin \pi \cdot \cos \pi = \cos 2\pi \cdot \cos \pi - \\ &- 2 \cdot (1 - \cos^2 \pi) \cdot \cos \pi = (2\cos^2 \pi - 1) \cdot \cos \pi - 2(1 - \cos^2 \pi) \cdot \cos \pi = \\ &= 4\cos^3 \pi - 3\cos \pi \end{aligned}$$

$$4\cos^3 \pi - 3\cos \pi + 6\cos \pi = 3(\cos^2 \pi - 1) + p$$

$$4\cos^3 \pi + 3\cos \pi - 6\cos^2 \pi = p - 3$$

$$f' = 12\cos^2 \pi \cdot \sin \pi - 6\cos \pi \cdot \sin \pi + 3 \cdot \sin \pi$$

$$4\cos^3 \pi - 4\cos^2 \pi + \cos \pi - 2\cos^2 \pi + 2\cos \pi$$

$$1\cos \pi \cdot (4\cos^2 \pi - 1)^2 - 2\cos^3 \pi + 2\cos \pi = p - 3$$

$$\cos \pi = 0 \quad p = 3 \quad \pi = \pm \frac{\pi}{2} + \pi n \quad \pi = \frac{\pi}{2} + \pi n$$

$$2\cos \pi - 4\cos^2 \pi - 6\cos \pi + 3 = K \quad K = 3 + m \cdot \cos \pi$$

$$4\cos \pi - 6 = m \quad m = \cos \pi$$

3 + 4 =

$$4\cos^3 \pi + 3\cos \pi - 6\cos^2 \pi = p - 3$$

Возьмем производную

$$12\cos^2 \pi \cdot \sin \pi - 6\cos \pi \cdot \sin \pi + 3 \cdot \sin \pi$$

$$6\cos \pi \cdot \sin 2\pi - 6\sin 2\pi + 3\sin \pi$$



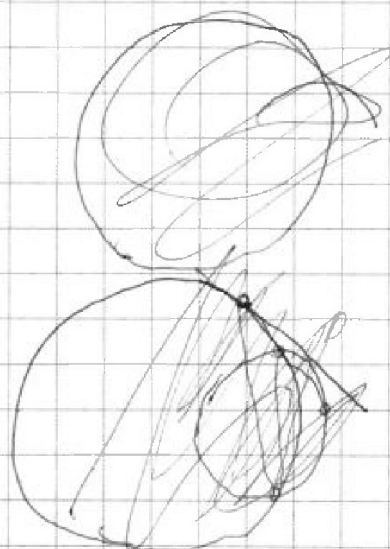
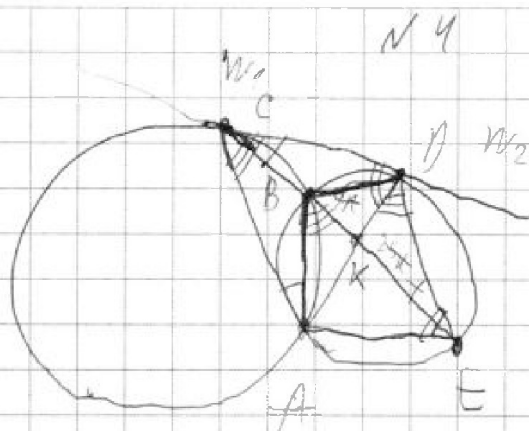
На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☒ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА

1 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



$$\angle DCB = \angle CAB$$

$$\angle CDA = \angle CDE$$

$$\angle CDK = \angle EDA$$

$$\frac{SEDK}{SEDK} = \frac{SEDK}{SEDK} + \frac{DE \cdot \sin EDK \cdot DK/2}{BCD \cdot \sin CDK \cdot DK/2} = \frac{DE \cdot \sin EDK}{CD \cdot \sin CDK}$$

$$= \frac{25}{9} \quad \frac{DE}{CD} = \frac{25}{9} \cdot \frac{\sin CDK}{\sin EDK}$$

$$\angle KDE = \angle ADE = \angle ABE = 180 - \angle CBA$$

$$\sin CB = 2R \frac{CA}{2R}$$

$$\angle DCA = 180 - \angle CBA$$

$$\text{из треугольника } CDA: \frac{AC}{\sin CDA} = \frac{CD}{\sin CAD}$$

$$\text{из треугольника } ADE: \frac{AE}{\sin ADE} = \frac{DA}{\sin DEA}$$

$$AC = DA \cdot \frac{\sin CDA}{\sin CAD}$$

$$AE = DA \cdot \frac{\sin ADE}{\sin DEA}$$

$$AC \cdot AE = DA^2$$

$$\frac{AC}{AE} = \frac{\sin^2 CDA}{\sin^2 DEA}$$

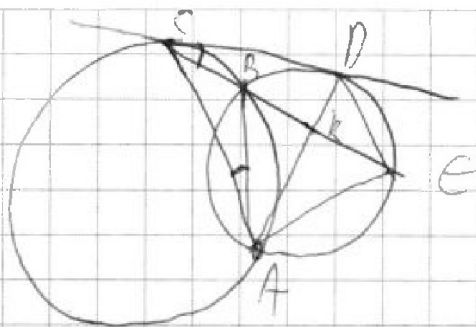


На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☒ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
2 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



$$\frac{AC}{AE} = \frac{\sin^2 \angle DCA}{\sin^2 \angle DEA}$$

~~$$AC \cdot \sin \angle ACD \cdot CD = AC \cdot 9 \cdot \sin \angle CDK \cdot \sin \angle ACD$$~~

~~$$DE \cdot \sin \angle AED \cdot AE = AE \cdot 25 \cdot \sin \angle EDK \cdot \sin \angle AED$$~~

~~$$= \frac{9}{25} - \text{отсюда же получаем } \triangle ACD \text{ и } \triangle AED,$$~~

~~откуда получаем, что $CK \in CE$~~

$$\angle ACD = \angle ADE = 180^\circ - \angle ACD - \angle CDA = 180^\circ - \angle AED - \angle ADE$$

AK - биссектриса угла CAE

Биссектриса делит сторону противолежащую углу на отрезки пропорциональные другим сторонам. Значит

$$\frac{AC}{AE} = \frac{9}{25}$$

$$\frac{\sin \angle DCA}{\sin \angle DEA} = \frac{3}{5} = \frac{\sin \angle CDK}{\sin \angle EDK}$$

$$\frac{DE}{CD} = \frac{25}{9} \cdot \frac{3}{5} = \frac{5}{3}$$

Ответ: $\frac{5}{3}$

[illegible]



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

☐ 1

☐ 2

☐ 3

☐ 4

☐ 5

☒ 6

☐ 7

СТРАНИЦА

1 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$a > b, \quad a - b \leq 3, \quad (a - c)(b - c) = p^2, \quad a + b^2 = 820$$

$$(a - c)(b - c) = p^2$$

$$p^2 = p \cdot p = 1 \cdot p^2 = -1 \cdot (-p^2) = -p \cdot (-p)$$

$$(a - c) = b - c = p \quad a - c = b - c = -p$$

невозможно, ведь $a > b$

$$a - c = 1, b - c = p^2; \quad a - c = -p^2, b - c = -1$$

невозможно, ведь $a > b$

получаем, что возможны только случаи

$$a - c = p^2, b - c = 1; \quad a - c = -1, b - c = -p^2$$

1 случай

$$a - b = p^2 + (-1 + 1) = p^2 - 1 \quad \text{отсюда делаем вывод что}$$

$p = 3$, ведь в остальных случаях $p^2 \equiv 1 \pmod{3}$, что было бы невозможно для условия.

$$2 \quad a - c = 9, b - c = 1$$

$$a = c + 9, b = c + 1$$

$$c + 9 + c^2 + 2c + 1 = 820$$

$$c^2 + 3c + 10 - 820 = 0$$

$$c^2 + 3c - 810 = 0$$

$$D = 9 + 810 \cdot 4 = 9 \cdot (1 + 40 \cdot 4) = 9 \cdot 361 = 9 \cdot 19^2$$

$$c = \frac{-3 \pm 3 \cdot 19}{2} = -30; 27$$

получаем решения $(-29, -29, -30); (36, 28, 27)$

2 случай

$$a - b = (c - 1) - (c - p^2) = p^2 - 1, \quad \text{аналогично получаем } p = 3, \text{ так}$$

$$\text{то } a - c = -1, b - c = -9 \quad a = c - 1, b = c - 9$$

$$\begin{array}{r} 19 \\ \times 9 \\ \hline 171 \\ 190 \\ \hline 171 \\ 190 \\ \hline 361 \end{array}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☒ 7 ☐

СТРАНИЦА
2 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$a = c - 1, b = c - 9$$

$$c - 1 + c^2 - 18c + 81 = 820$$

$$c^2 - 17c + 80 = 820$$

$$c^2 - 17c - 740 = 0$$

$$D = 17^2 + 4 \cdot 740 = 2809$$

$$4 + 1 + 2 \cdot 4 = 4 + 8 = 12$$

$$17^2 = 4 \pmod{9}$$

$$3 \cdot 4 = 1 \pmod{9}$$

$$20 \equiv 2 \pmod{9}$$

$$4 \equiv 4 \pmod{9}$$

$$D \equiv 4 + 2 \cdot 1 \cdot 4 \equiv 12 \equiv 3 \pmod{9}$$

$$17^2 \equiv 1 \pmod{3}$$

$$3 \cdot 4 \equiv 1 \pmod{3}$$

$$20 \equiv 2 \pmod{3}$$

$$4 \equiv 1 \pmod{3}$$

$$D \equiv 1 + 2 \cdot 1 \cdot 1 \equiv 3 \equiv 0 \pmod{3}$$

получим, что дискриминант не полный квадрат, следовательно делится на 3, но не делится на 9, значит решением этого уравнения являются иррациональные числа, а не целые

$$\text{Ответ: } (-21; -29; -30), (36; 28; 27)$$

$$17^2 + 3 \cdot 4 \cdot 80 = 17 \cdot 17 + 17 \cdot 80 + 20 \cdot 80 = 17 \cdot 97 + 20 \cdot 80 =$$

$$= 100 \cdot 17 + 100 \cdot 16 - 17 \cdot 3 = 100 \cdot 33 - 51 =$$

$$= 3300 - 51 = 3249 = 57^2$$

$$\begin{array}{r} 57 \\ \times 57 \\ \hline 399 \\ 2850 \\ \hline 3249 \end{array}$$

$$c = \frac{17 \pm 57}{2} = -20, 37$$

$$a = -21$$

получим решения $(-21; -29; -30), (36; 28; 37)$

$$\text{Ответ: } (-21; -29; -30), (36; 28; 27), (-21; -29; -30), (36; 28; 37)$$

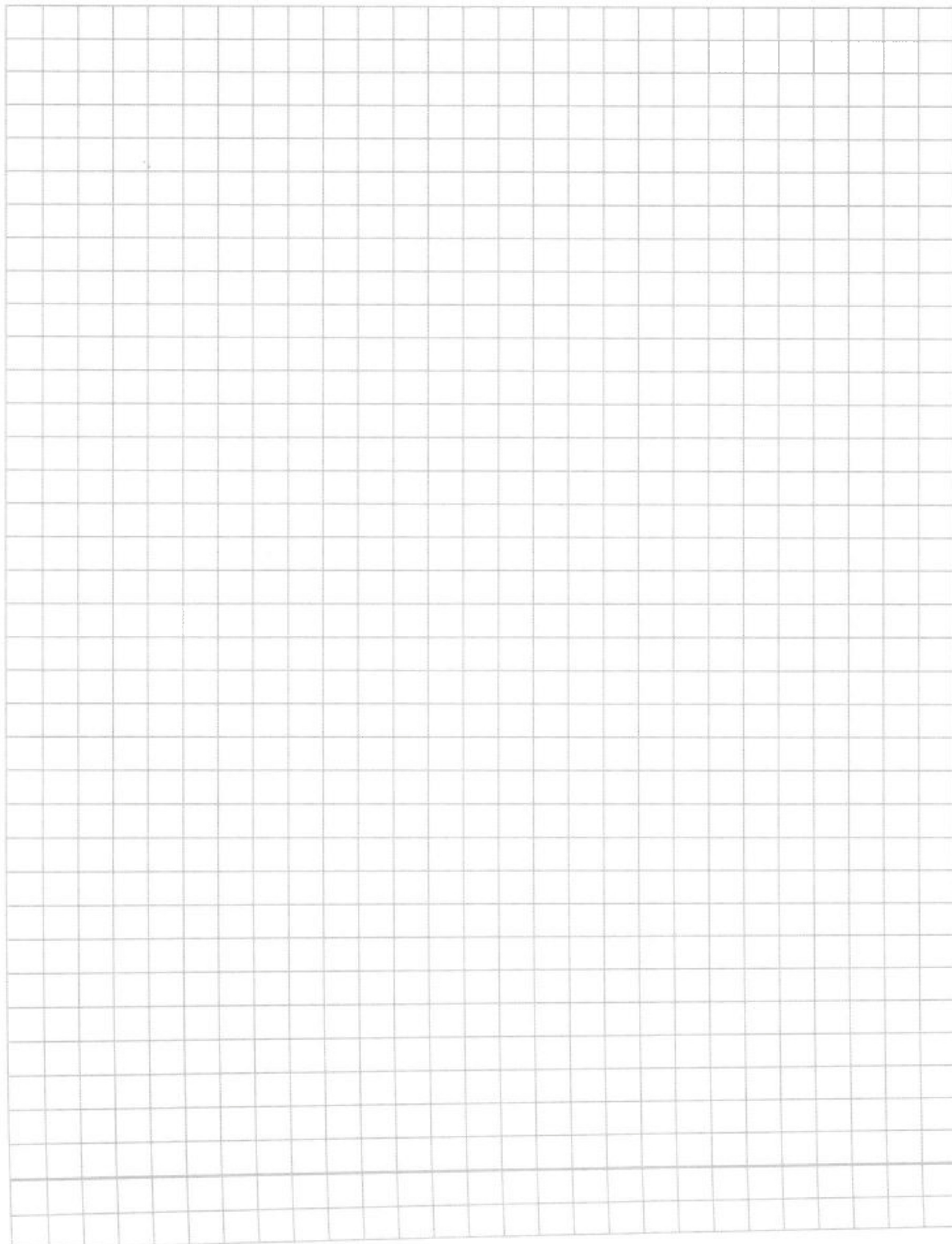


На одной странице можно оформлять **только одну задачу**. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



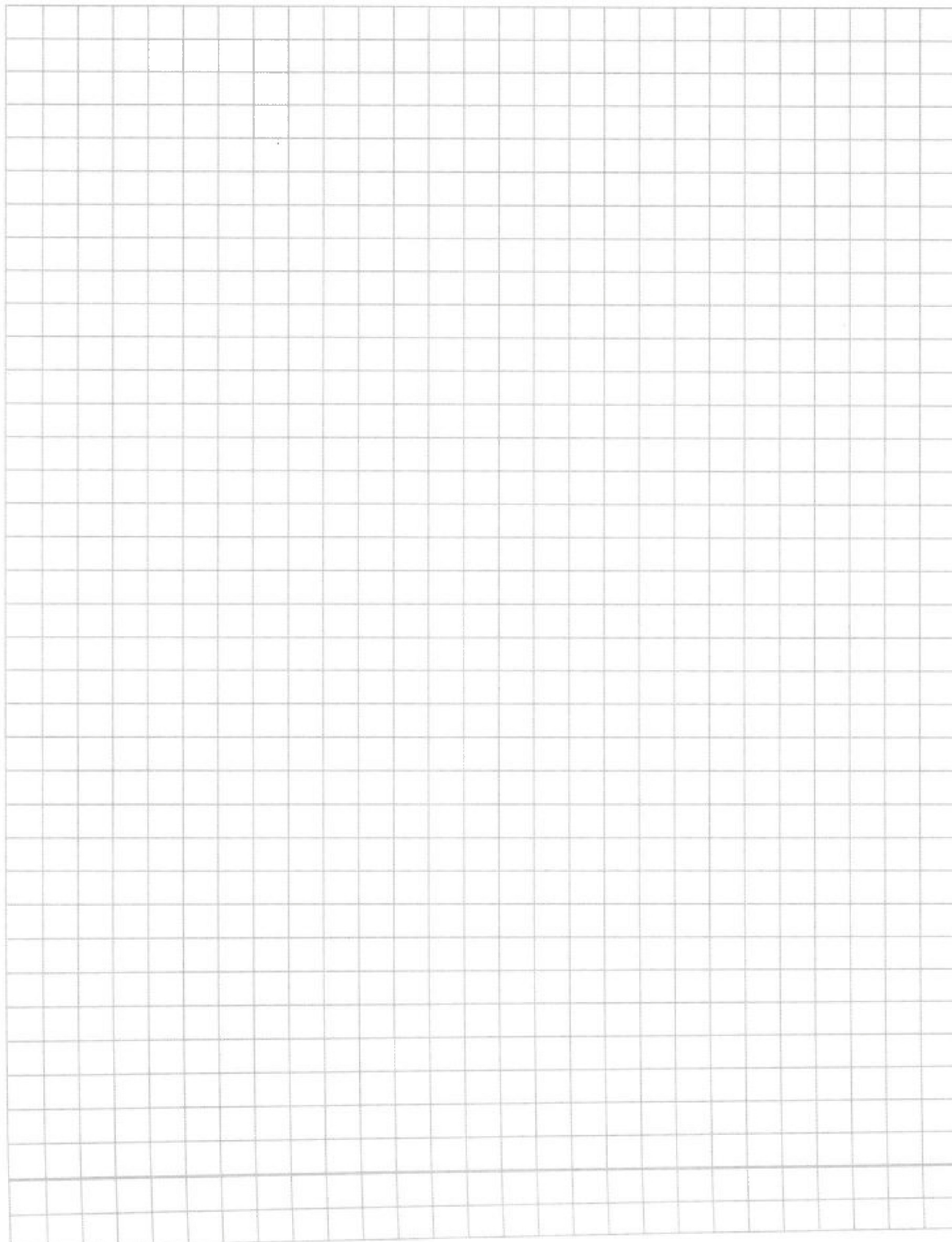


На одной странице можно оформлять **только одну задачу**. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!





На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1
☐

2
☐

3
☐

4
☐

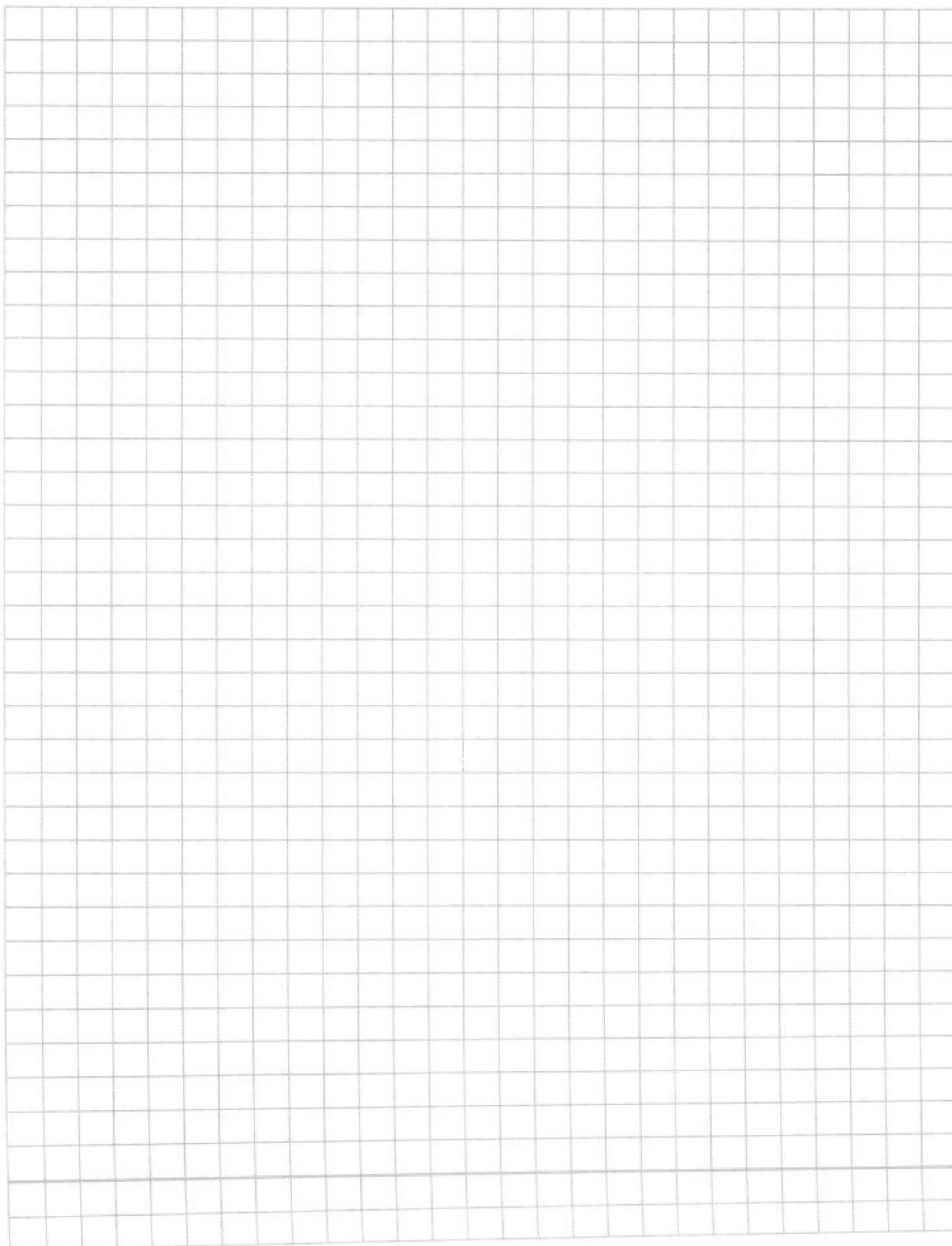
5
☐

6
☐

7
☐

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



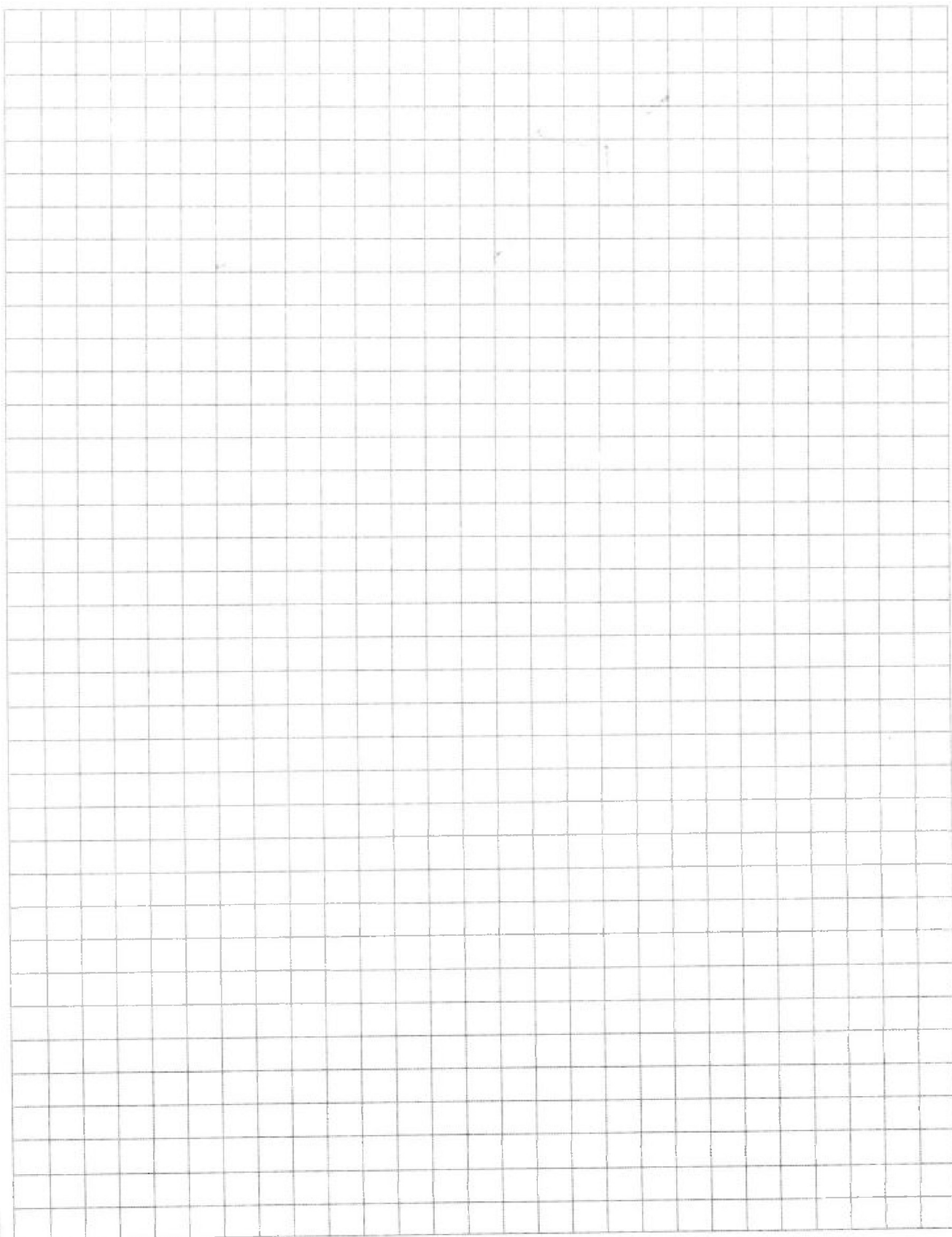


На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!



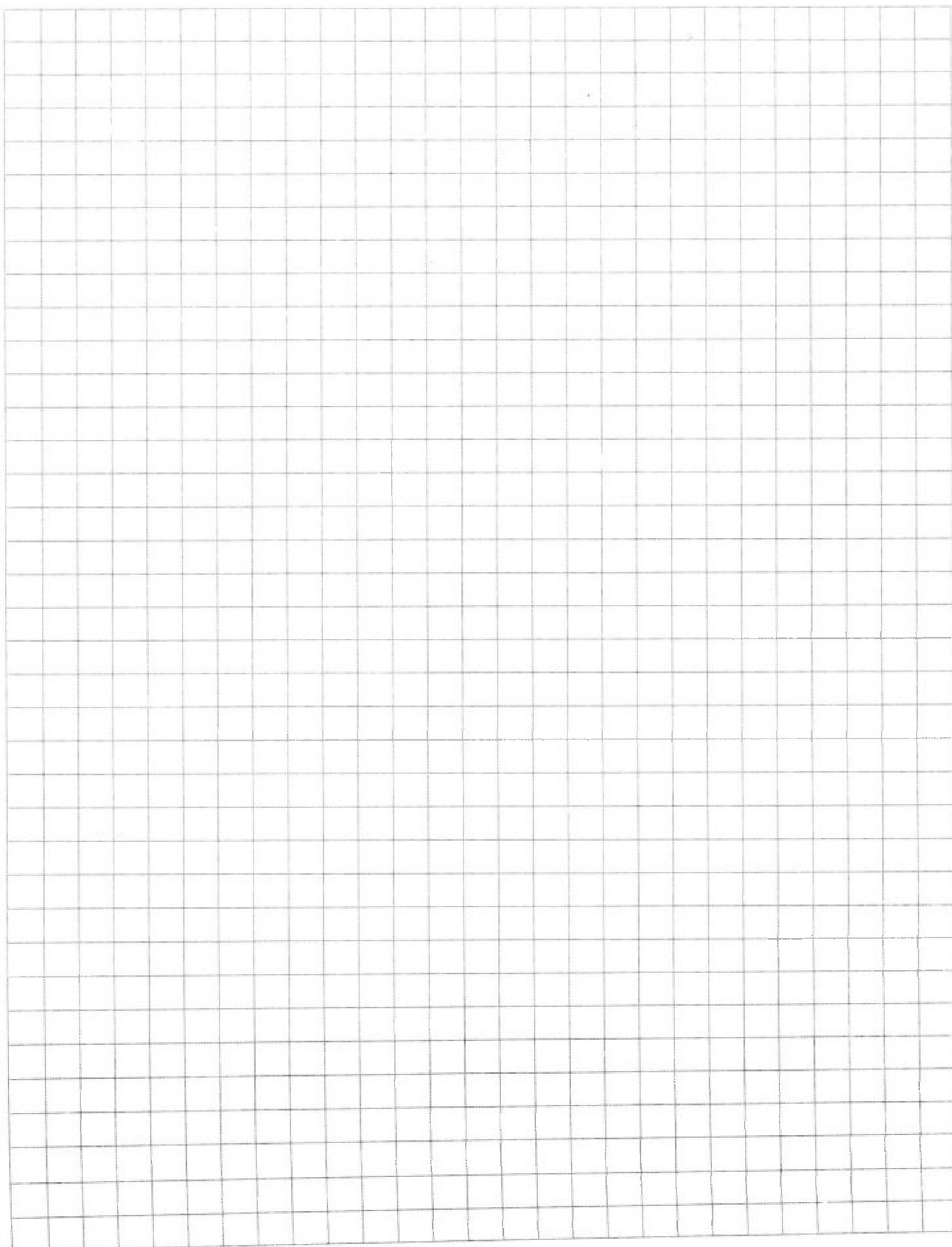


На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!





На одной странице можно оформлять **только одну задачу**. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1
☐

2
☐

3
☐

4
☐

5
☐

6
☐

7
☐

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

