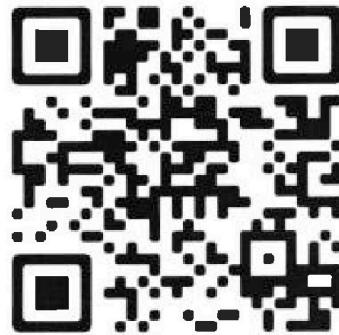




МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ



11 КЛАСС. Вариант 2

1. [3 балла] Найдите все действительные значения x , при каждом из которых существует геометрическая прогрессия, состоящая из действительных чисел и такая, что её четвёртый член равен $\sqrt{\frac{15x+6}{(x-3)^3}}$, десятый член равен $x+4$, а двенадцатый член равен $\sqrt{(15x+6)(x-3)}$.

2. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \sqrt{x+7} - \sqrt{5-x-3z} + 6 = 2\sqrt{y-2x-x^2+z}, \\ |y-20| + 2|y-35| = \sqrt{225-z^2}. \end{cases}$$

3. [5 баллов] Найдите все значения параметра p , при которых уравнение

$$\cos 3x + 6 \cos x = 3 \cos 2x + p$$

имеет хотя бы одно решение. Решите это уравнение при всех таких p .

4. [5 баллов] Две окружности ω_1 и ω_2 пересекаются в точках A и B , а их общая касательная имеет с ω_1 и ω_2 общие точки C и D соответственно, причём точка B расположена ближе к прямой CD , чем точка A . Луч CB пересекает ω_2 в точках B и E . Найдите отношение $ED : CD$, если диагональ AD четырёхугольника $ACDE$ делит отрезок CE в отношении $9 : 25$, считая от вершины C .

5. [4 балла] Дан клетчатый прямоугольник 150×200 . Сколько способами можно закрасить 8 клеток этого прямоугольника так, чтобы закрашенное множество обладало хотя бы одной из следующих симметрий: относительно центра прямоугольника, относительно любой из двух "средних линий" прямоугольника ("средней линией" прямоугольника назовём отрезок, соединяющий середины двух его противоположных сторон). Ответ дайте в виде выражения, содержащего не более трёх членов (в них могут входить факториалы, биномиальные коэффициенты).

6. [4 балла] Найдите все тройки целых чисел $(a; b; c)$ такие, что:

- $a > b$,
- число $a - b$ не кратно 3,
- число $(a - c)(b - c)$ является квадратом некоторого простого числа,
- выполняется равенство $a + b^2 = 820$.

7. [6 баллов] В основании призмы лежит равносторонний треугольник со стороной 2. Площади её боковых граней равны 5, 5 и 4. Найдите высоту призмы.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- | | | | | | | |
|---------------------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|
| <input checked="" type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 2 | <input type="checkbox"/> 3 | <input type="checkbox"/> 4 | <input type="checkbox"/> 5 | <input type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 7 |
|---------------------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|

СТРАНИЦА
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

N 1

$$a_4 = \sqrt[4]{\frac{15n+6}{(n-3)^3}}, \quad a_{10} = n+4, \quad a_{12} = \sqrt[4]{(15n+6)(n-4)}$$

$$a_1 \cdot q^3, \quad d_1 \cdot q^9, \quad d_1 \cdot q^{11}$$

$$a_1^2 \cdot q^{14} = \frac{15n+6}{n-3}, \quad a_{10} = n+4$$

$$a_1 \cdot q^9 = n+4$$

М.к. & 8 а₄ под корнем выражают $15n+6$.
Чтобы это отразить, я умножил $\frac{15n+6}{n-3}$ на $n-3$ (n-3)⁴
получил $a_1 \cdot q^4 \cdot a_1 \cdot q^4 = \sqrt[4]{\frac{15n+6}{n-3}} = a_4 \cdot q^4 \geq 0$, подобрав

$$\frac{d_3}{a_4} = q^4 = n-3, \quad q = \cancel{q^4}, \quad q^2 = \sqrt{n-3}$$

Все $n \geq 3$, кроме $a_1, a_4, a_{10}, a_{12} > 0$

$(n+4) \cdot \sqrt{n-3} = \sqrt{(15n+6)(n-3)}$, м.к. надо $n-3=0$,
чтобы подкоренное, здесь $n-3$ находится в уравнении
под корнем в а₄, надо $n+4 = \sqrt{15n+6}$

$$n^2 + 16n - n^2 + 8n + 16 = 15n + 6$$

$$n^2 - 4n + 10 = 0 \quad D = 16n - 40 = 9$$

$$n = \frac{7 \pm 3}{2} = 5; 2$$

Заданными числами $n=2$ не подходит, ведь $q^4 = n-3 = -1$
невозможно.

Ответ: $n=5$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1

2

3

4

5

6

7

СТРАНИЦА
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

✓ 2

$$\sqrt{n+4} - \sqrt{5-n-3z} + 6 = 2\sqrt{y-2n-n^2+z}$$
$$|y-20| + 2\sqrt{y-35} = \sqrt{225-z^2}$$

$$n+4 + 5 - n - 3z - 2\sqrt{(n+4)(5-n-3z)} = ny - 4n - 4n^2 + 42 + 36$$
$$- 12\sqrt{y-2n-n^2+z}$$

$$22 - 3z - 2\sqrt{y-2n-n^2+z}$$
$$5n - n^2 - 3nz + 35 - 4n - 212 = ny - 8n - 4n^2 + 42 + 36$$
$$- 12\sqrt{y-2n-n^2+z}$$

$$y < 20$$

$$y = 20 + 2z$$

$$20 - y + 40 - 2y = \sqrt{225 - z^2}$$

$$60 - 3y = \sqrt{225 - z^2}$$

0.0



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

 1 2 3 4 5 6 7СТРАНИЦА
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

N 3

$$\cos 3n + 6 \cos n = 3(\cos 2n + p)$$

$$\begin{aligned} \cos 3n &= (\cos 2n - \cos n) - 2 \sin^2 n \cdot \cos n = \cos 2n \cdot \cos n - \\ &- 2 \cdot (1 - \cos^2 n) \cdot \cos n = (2 \cos^2 n - 1) \cdot \cos n - 2(1 - \cos^2 n) \cdot \cos n = \\ &= 4 \cos^3 n - 3 \cos n \end{aligned}$$

$$4 \cos^3 n - 3 \cos n + 6 \cos n = 3(2 \cos^2 n - 1) + p$$

$$4 \cos^3 n + 3 \cos n - 6 \cos^2 n = p - 3$$

$$f' = 4 \cdot 2 \cos^2 n - 12 \cdot \cos^2 n \cdot \sin n - 6 \cos n \cdot \sin n + 3 \cdot \sin n$$

$$4 \cos^3 n - 4 \cos^2 n + \cos n - 2 \cos^2 n + 2 \cos n$$

$$\cos n \cdot ((4 \cdot 2 \cos^2 n - 1)^2 - 2 \cos^2 n + 2 \cos n) = p - 3$$

~~тогда~~

$$\begin{aligned} \cos n &= 0 & p &= 3 & n &= \pi/2 + k\pi & n &= \frac{\pi}{2} + k\pi \\ (2 \cos^2 n - 1)^2 &= 2 \cos^2 n + 2 = K \end{aligned}$$

~~$$2 \cos n \quad 4 \cos^2 n - 6 \cos n + 3 = K \quad K = 3 + m \cdot \cos n$$~~

~~$$4 \cos^3 n - 6 \cos n = m \quad m = \cos n$$~~

~~тогда~~

$$4 \cos^3 n + 3 \cos n - 6 \cos^2 n = p - 3$$

~~запись правильна~~

~~$$4 \cdot 2 \cdot 4 + 72 \cos^2 n \cdot \sin n - 6 \cos n \cdot \sin n + 3 \sin n$$~~

~~$$6 \cos n \cdot \sin^2 n - 6 \sin n \cos n + 3 \sin n$$~~

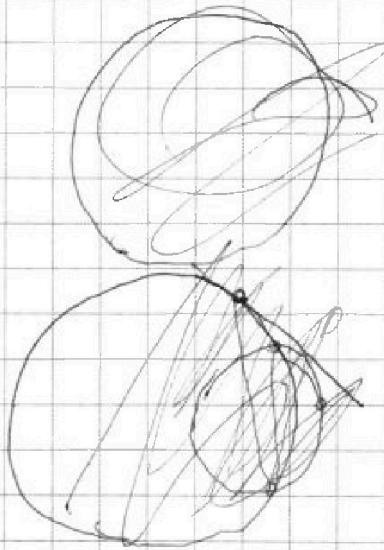
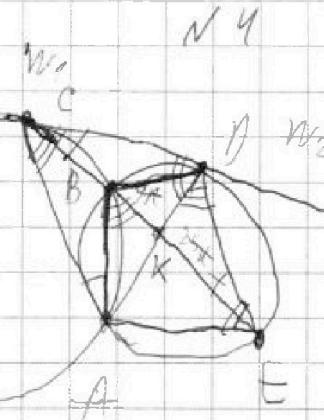


На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- | | | | | | | |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 2 | <input type="checkbox"/> 3 | <input checked="" type="checkbox"/> 4 | <input type="checkbox"/> 5 | <input type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 7 |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|

СТРАНИЦА
1 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



$$\angle DCB = \angle CAB$$

$$\angle CDA = \angle CDE$$

$$\Rightarrow \angle K = \angle CDA$$

$$\frac{\sin K}{\sin CK} = \frac{\sin K}{\sin CDK} \quad \text{или} \quad \frac{\sin K}{\sin CK} = \frac{\sin CDE \cdot \sin \angle CKD}{\sin \angle CDA \cdot \sin \angle KDC} = \frac{\sin CDE}{\sin \angle CDA}$$

$$= \frac{2S}{9}$$

$$\frac{DE}{CD} = \frac{2S}{9} \cdot \frac{\sin \angle CDK}{\sin \angle CDE}$$

$$\angle KDE = \angle APE = \angle ABE = 180 - \angle CBA$$

$$\sin CBA = \frac{2R}{AC}$$

~~$$\angle CDA + \angle DCA = 180 - \angle CBA$$~~

~~$$\text{из треугольника } CDA: \frac{AC}{\sin CDA} = \frac{CD}{\sin \angle CDA} = \frac{DA}{\sin \angle CAD}$$~~

~~$$\text{из треугольника } ADE: \frac{AE}{\sin \angle ADE} = \frac{DA}{\sin \angle DAE}$$~~

$$AC = DA \cdot \frac{\sin \angle CDA}{\sin \angle CAD}$$

$$\frac{AC}{\sin \angle CAD} = \frac{DA}{\sin \angle DAE}$$

$$AC \cdot AE = DA^2$$

$$AE = DA \cdot \frac{\sin \angle ADE}{\sin \angle DAE}$$

$$\frac{AC}{AE} = \frac{DA^2}{\sin^2 \angle DAE}$$

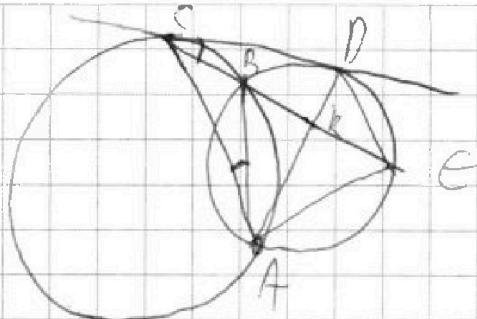


На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- 1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
2 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



$$\frac{AC}{AE} = \frac{\sin^2(\alpha)}{\sin^2(\gamma)}$$

~~$$AC \cdot \sin \angle ACD \cdot \sin \angle CAD = AE \cdot \sin \angle AED \cdot \sin \angle ACD \cdot \sin \angle AED$$~~
~~$$DE \cdot \sin \angle AED \cdot AC = AE \cdot 2S \cdot \sin \angle EDK \cdot \sin \angle AED$$~~

$\frac{9}{25}$ - определение площади $\triangle ACD$ и $\triangle AED$,
они же фигуры, из которых складывается

~~$$\angle CAD + \angle AED = 180^\circ - \angle ACD - \angle CAD = 180^\circ - \angle AED$$~~
~~$$\angle AED - \angle ADE$$~~

акт - внутренний угол $\triangle AED$

дополнительный факт отсутствует пропорциональность
изменяющихся углов сопоставляемых з углами

$$\frac{AC}{AE} = \frac{9}{25} \quad \frac{\sin \angle DA}{\sin \angle EA} = \frac{3}{5} = \frac{\sin \angle DK}{\sin \angle EDK}$$

откуда

$$\frac{DE}{CD} = \frac{25}{9} \cdot \frac{3}{5} = \frac{5}{3}$$

Ответ: $\frac{5}{3}$

На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1

2

3

4

5

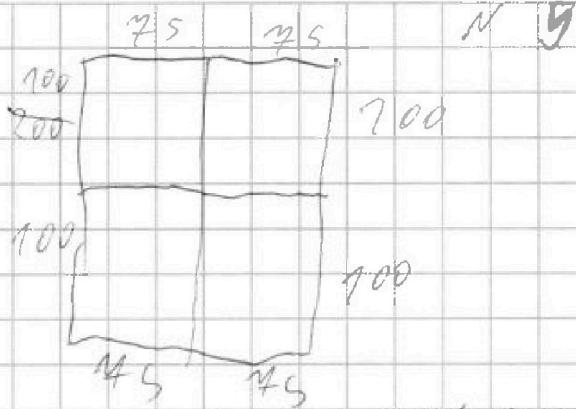
6

7

СТРАНИЦА

1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



симметричный отражение было горизонтальной линии и четверти радишей, а не ради. Повторение четверти ради мелкой симметрии здания уложилось в 75000. Ещё одна четверть и четверти хватило - С 45000. Аналогично для вертикальной симметрии, потому их суммарно - С 45000.

Что мы получаем в итоге, когда симметрических есть симметрии четверти. В этом случае для отражения в четверти четверти будет отнятьсь 1/2 ради и повторить эти же условия в другой четверти будет отражение здания в четверти ради. Итак, в итоге получим в зеркальном отражении здания в четверти ради. Так же получим в зеркальном отражении здания в четверти ради. Итак, в итоге получим в зеркальном отражении здания в четверти ради.

Также мы замечаем, что при симметрии радией друг симметрии, третий тоже симметрический. Аналогично при симметрии отражением радией в четверти ради получим зеркальное зеркальное отражение здания. Итак, в зеркальном отражении в симметрии отражении радией получим С 45000. Применим формулу симметрии - и получим и получим, что и зеркальное радиение, умноженное на радиение, получим зеркальное радиение, умноженное на радиение.

$$S_{45000} - 3 \cdot S_{4500} + S_{4500} = 3 S_{4500} - 2 S_{4500}$$

$$\text{Итого: } 3 S_{4500} - 2 S_{4500}$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- | | | | | | | |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 2 | <input type="checkbox"/> 3 | <input type="checkbox"/> 4 | <input type="checkbox"/> 5 | <input checked="" type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 7 |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|

СТРАНИЦА
1 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$a > b, \quad a-b \geq 3, \quad (a-1)(b-1) = p^2, \quad a+b = 820$$

$$(a-1)(b-1) = p^2$$

$$p^2 = p \cdot p = 1 \cdot p^2 = -1 + p^2 = -p \cdot (-p)$$

$$(a-1) = b-1 = p \quad a-1 = b-1 = -p$$

известно, что $a > b$

$$a-1 = 1, \quad b-1 = p^2; \quad a-1 = -p^2, \quad b-1 = -1$$

известно, что $a > b$

получаем, что $b-1$ нечетное

$$d-1 = p^2, \quad b-1 = 1; \quad a-1 = -1, \quad b-1 = -p^2$$

1 случай
 $d-1 = p^2 + (-1+1) = p^2 - 1$ отрицательное четное число
 $p=3$, ведь в остальных случаях $p^2 \equiv 1 \pmod{3}$, чтобы было нечетное значение $d-1$.

$$d-1 = 9, \quad b-1 = 1$$

$$d = 1+9, \quad b = 1+1$$

$$c+9+p^2+2c+1 = 820$$

$$c^2 + 3c + 10 - 820 = 0$$

$$c^2 + 3c - 810 = 0$$

$$D = 9 + 810 \cdot 4 = 9 \cdot (1 + 90 \cdot 4) = 9 \cdot 361 = 9 \cdot 19^2$$

$$c = \frac{-3 \pm 3 \cdot 19}{2} = -30; 24$$

$$\begin{array}{r} 19 \\ 19 \\ \hline 81 \\ 81 \\ \hline 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 19 \\ 19 \\ \hline 361 \\ 361 \\ \hline 0 \end{array}$$

получаем решения $(-21, -29, -30), (36, 28, 24)$

2 случай

$a-b = (c-1) - (c-p^2) = p^2 - 1$ подставляем получаем $p=3$,
 $a-b = -1, \quad b-c = -9 \quad a=c-1, \quad b=c-9$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- | | | | | | | |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 2 | <input type="checkbox"/> 3 | <input type="checkbox"/> 4 | <input type="checkbox"/> 5 | <input checked="" type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 7 |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|

СТРАНИЦА
2 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\alpha = (-1), \beta = (-9)$$

$$(-7 + 1^2 - 18) + 81 = 820$$

$$(-1^2 - 1^2) + 80 = 820$$

$$(-1^2 - 1^2) - 40 = 0$$

$$D = 1^2 + 3^2 \cdot 20 \cdot 4$$

$$4 + 9 + 2 \cdot 4 = 43 = 42$$

$$1^2 = 1 \pmod{9}$$

$$3^2 = 9 \pmod{9}$$

$$20 \equiv 2 \pmod{9}$$

$$4 \equiv 4 \pmod{9}$$

$$1^2 = 1 \pmod{3}$$

$$3^2 = 9 \pmod{3}$$

$$20 \equiv 2 \pmod{3}$$

$$4 \equiv 1 \pmod{3}$$

$$D = 4 + 2 \cdot 4 = 12 \equiv 3 \pmod{9}$$

~~решение получено с помощью критерия квадратичности по модулю 3, но оно не является полным, т.к. оно делится на 3, но не делится на 9, значит решениями являются кратные 3, а не кратные 9~~

$$\text{Ответ: } (-21, -29, -30), (36, 28, 24)$$

$$1^2 + 3^2 \cdot 80 = 1^2 \cdot 1^2 + 1^2 \cdot 80 + 20 \cdot 80 = 1^2 \cdot 9^2 + 20 \cdot 80 =$$

$$= 100 \cdot 9^2 + 100 \cdot 16 - 1^2 \cdot 3 = 100 \cdot 33 - 51 =$$

$$= 3300 - 51 = 3249 = 57^2$$

$$\begin{array}{r} 57 \\ \times 57 \\ \hline 3249 \end{array}$$

$$l = \frac{1^2 + 57}{2} = -20, 37$$

$$\begin{array}{r} 25 \\ \overline{)3249} \\ 25 \\ \hline 74 \\ 75 \\ \hline 1 \end{array}$$

$$l = -21$$

получаем решения $(-21, -29, -30), (36, 28, 24)$

$$\text{Ответ: } (-21, -29, -30), (36, 28, 24), (-21, -29, -20), (36, 28, 34)$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1

2

3

4

5

6

7

СТРАНИЦА
— ИЗ —

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1

2

3

4

5

6

7

СТРАНИЦА
ИЗ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач **нумеруются отдельно**. Порча QR-кода недопустима!



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1

2

3

4

5

6

1

СТРАНИЦА
ИЗ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- 1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
ИЗ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1

2

3

4

5

6

7

СТРАНИЦА
ИЗ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

СТРАНИЦА
ИЗ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач **нумеруются отдельно**. Порча QR-кода недопустима!