



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

10 КЛАСС. Вариант 6



1. [3 балла] Второй член арифметической прогрессии равен $12 - 12x$, четвёртый член равен $(x^2 + 4x)^2$, а восьмой равен $(-6x^2)$. Найдите x .
2. [4 балла] Найдите наименьшее значение выражения $10x + 5y$ при условии

$$\begin{cases} |2x - 3y| \leq 6, \\ |3x - 2y| \leq 4. \end{cases}$$

3. [5 баллов] Найдите все пары (m, n) натуральных чисел, для которых одно из чисел $A = m^2 - 4mn + 4n^2 + 13m - 26n$ и $B = m^2n - 2mn^2 - 2mn$ равно $17p^2$, а другое равно $15q^2$, где p и q — простые числа.
4. [5 баллов] Прямая, параллельная биссектрисе AH треугольника ABC , проходящая через середину M его стороны BC , пересекает сторону AC и продолжение стороны AB в точках Z и Y соответственно. Найдите BC , если $AC = 18$, $AZ = 6$, $YZ = 8$.
5. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \sqrt{x+4} - \sqrt{3-y} + 5 = 2\sqrt{12-x-y^2}, \\ 2x^5 + 4x^2 - \sqrt[4]{3y} = 2y^5 - \sqrt[4]{3x} + 4y^2. \end{cases}$$

6. [4 балла] На тетрадном листе нарисован квадрат 7×7 клеток (стороны квадрата идут вдоль границ клеток), а все узлы сетки внутри квадрата или на его границе покрашены в чёрный цвет. Найдите количество способов перекрасить два узла в белый цвет, если раскраски, получающиеся друг из друга поворотом, считаются одинаковыми.
7. [6 баллов] В треугольнике ABC на медиане AM и биссектрисе CL как на диаметрах построены окружности Ω и ω соответственно, пересекающиеся в точках P и Q . Отрезок PQ параллелен высоте треугольника ABC , проведённой из вершины B . Окружность Ω пересекает сторону AC повторно в точке N . Найдите длины сторон AC и BC , если $AB = 6$, $AN = 5$.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
☒	☐	☐	☐	☐	☐	☐

СТРАНИЦА

2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Запомним, что $x = -2$ является корнем кубического уравнения (запомним $(x^3 + 6x^2 + 6x - 4)$ на $(x+2)$):

$$\begin{array}{r|l} x^3 + 6x^2 + 6x - 4 & x+2 \\ \underline{x^3 + 2x^2} & \\ 4x^2 + 6x & \\ \underline{4x^2 + 8x} & \\ -2x - 4 & \\ \underline{-2x - 4} & \\ 0 & \end{array} \quad \begin{array}{l} x^2 + 4x - 2 \end{array}$$

Итого имеем:

$$(x+2)^2 / (x^2 + 4x - 2) = 0$$

$$\text{Решим уравнение } x^2 + 4x - 2 = 0$$

$$D = 16 + 8 = 24$$

$$x_1 = \frac{-4 + \sqrt{24}}{2} = \sqrt{6} - 2$$

$$x_2 = \frac{-4 - \sqrt{24}}{2} = -\sqrt{6} - 2$$

Окончательно:

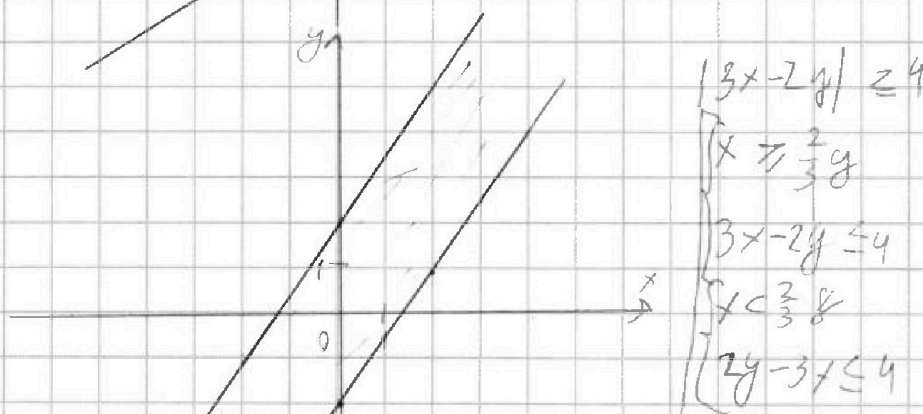
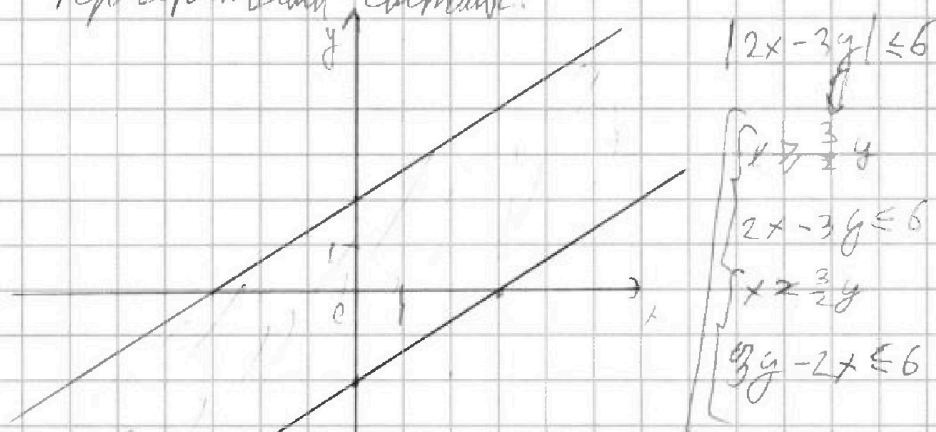
$$\begin{cases} x = -2 \\ x = \sqrt{6} - 2 \\ x = -\sqrt{6} - 2 \end{cases}$$

1 ☐ 2 ☒ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
1 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

2. Изобразить области координатной плоскости, ограниченные неравенствами системы.



Пусть $10 + 45y = 9$; тогда $y = \frac{9}{5} - 2x$, иная сторона
крайняя со значением коэффициента $\frac{9}{5}$. Преобразуем
сделаем коэффициент в как можно меньше.
Изобразим все три графика на координатной плоскости



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1
☐

2
☒

3
☐

4
☐

5
☐

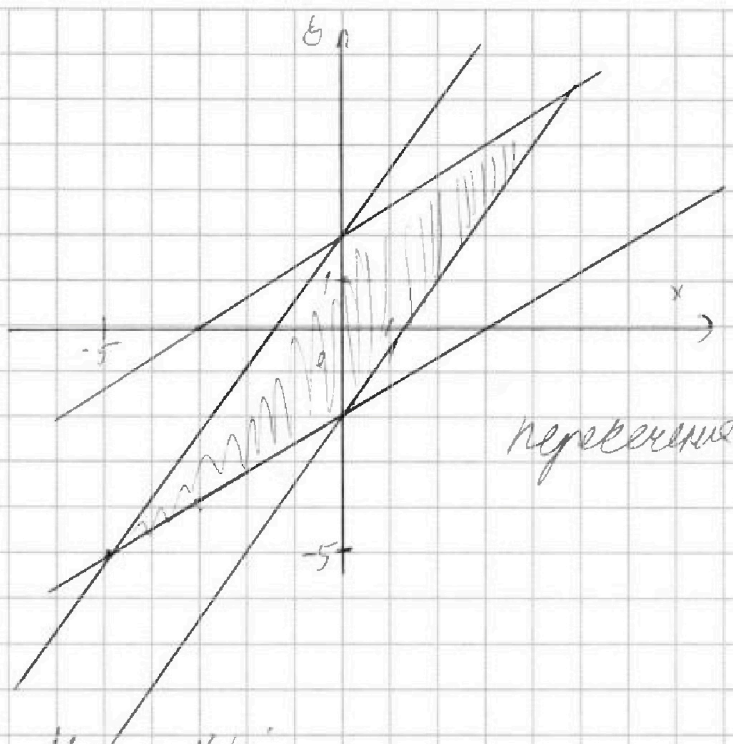
6
☐

7
☐

СТРАНИЦА

2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



Такая форма "функции"
прямую с коэффициентом
наклона -2 вверх каждой
краске ~~как~~ переключен
сначала, что одна точка -
прямых $y = -2 + \frac{2}{3}x + 4$
 $y = +2 + \frac{3}{2}x$

Каждая k, y :

$$y = \frac{2}{3}x - 2$$

$$y = \frac{3}{2}x + 2$$

$$3y = 2x - 6$$

$$2y = 3x + 4$$

$$6y = 4x - 12$$

$$6y = 9x + 12$$

$$9x + 12 = 4x - 12$$

$$2y = 3x + 4$$

$$x = \frac{24}{5}$$

$$y = \frac{26}{5}$$

$$\text{Ожидание } 10x + 5y = -48 - 26 = -74$$

$$\text{Ожидание } -74$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



1 2 3 4 5 6 7

☐ ☐ ☒ ☐ ☐ ☐ ☐

СТРАНИЦА

1 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

3. Выразите A и B на множестве $\mathbb{N}$.

$$A = (m - 4mn + 4n^2) + (13m - 20n) = (m - 2n)^2 + 13(m - 2n) = (m - 2n)(m - 2n + 13)$$

$$B = m^2n - 2m^2 - 2mn + mn / (m - 2n - 2)$$

Рассмотрим k :

П.ч. 17 и p — простые числа, но число $17p^2$ можно представить

в виде произведения 17 способами: 1) $1 \cdot 17p^2$ 2) $p \cdot 17p$ 3) $(17p) \cdot p$ 4) $(17p^2) \cdot 1$

Пусть $(m - 2n) = k$, тогда $k = k(k + 13)$: 5) $17 \cdot p^2$ 6) $p^2 \cdot 17$ 7) $1 \cdot 17p^2$ 8) $17p^2 \cdot 1$

1) $k = 1 \Rightarrow 17p^2 = 14$
 $k + 13 = 17p^2$ П.ч. p — целое, но $\emptyset$

2) $k = 17 \Rightarrow 17p^2 = 37$
 $k + 13 = p^2$ П.ч. p — целое, но $\emptyset$

8) $-17 = k \Rightarrow -4 = -p^2 \Rightarrow p = 2$
 $k + 13 = p^2 \Rightarrow m - 2n = -17$

3) $17p = k \Rightarrow 17p + 13 = p \Rightarrow 16p = 13$ П.ч. p — целое, но $\emptyset$
 $k + 13 = p$ П.ч. p — целое, но $\emptyset$

4) $17p^2 = k \Rightarrow 17p^2 + 13 = 1 \Rightarrow 17p^2 = -12$ П.ч. p — целое, но $\emptyset$
 $k + 13 = 1$ П.ч. p — целое, но $\emptyset$

5) $p = k \Rightarrow 16p = 13$ П.ч. p — целое, но $\emptyset$
 $17p = k + 13$ П.ч. p — целое, но $\emptyset$

6) $p^2 = k \Rightarrow p^2 = 4 \Rightarrow p = 2$ П.ч. p — целое, но $\emptyset$
 $17 = k + 13$ П.ч. p — целое, но $\emptyset$

7) $-1 = k \Rightarrow 12 = 17p^2$ П.ч. p — целое, но $\emptyset$
 $k + 13 = -17p^2$ П.ч. p — целое, но $\emptyset$

Окончательно, $p = 2$ и $\begin{cases} m - 2n = 4 \\ m - 2n = -17 \end{cases}$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☒ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
1 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{cases} m-2n=4 \\ m-2n=-17 \end{cases} \quad B = mn/(m-2n-2)$$

Рассмотрим первый случай ($m-2n=4$)

$$m-2n-2=4-2=2$$

$$B = m \cdot n \cdot 2 = 15q^2$$

Пусть $m=2t$ (т.к. $m-2n=4$, то m четно, а значит $t \in \mathbb{N}$)

Тогда: Тогда $4n \cdot 4 = 15 \cdot q^2$. Т.к. 15 не делится на 2,

$$\begin{cases} t-n=q \\ 2^2 \cdot t \cdot n = 15q^2 \end{cases}$$

то $q^2 : 4 \Rightarrow q : 2$, то n, k, q - кратны, то $q=2$

$$\begin{cases} n=t-2 \\ t^2-2t=15(2)^2=60 \end{cases}$$

Значит: $\begin{cases} t-n=2 \\ t \cdot n=15 \end{cases}$ Из системы получаем две пары решений:

$$t = 1 \pm \sqrt{1+15(2)^2}$$

$$\begin{cases} t=2+n \\ 2n+n^2-15=0 \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} n=5 \\ m=6 \end{pmatrix} \text{ и } \begin{pmatrix} n=3 \\ m=10 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} (n+5)/(n-3) \leq 0 \\ t=2+n \end{cases}$$

Т.к. $n, m \in \mathbb{N}$, то имеем $\begin{cases} m=10 \\ n=3 \end{cases}$

Рассмотрим второй случай ($m-2n=-17$):

$$B = mn/(-17-2) = -19mn = 15q^2$$

Заметим, что $-19mn$ - отрицательно, т.к. $n, m \in \mathbb{N}$, а $15q^2$ - нет.

А значит данный случай не дает ответа

Ответ: $m=10, n=3$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1
☐

2
☐

3
☐

4
☒

5
☐

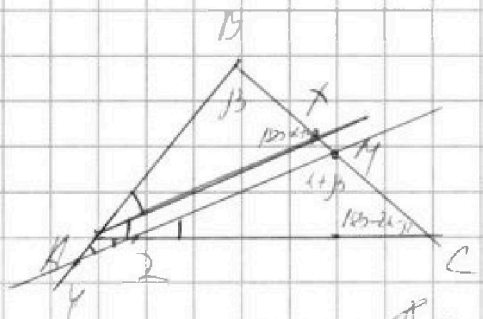
6
☐

7
☐

СТРАНИЦА

1 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



Решо: $AC = 18$, $AZ = 6$, $YZ = 8$
 M - середина BC ; M - середина
 $YZ \parallel AX$

Решо: BC

Решение

$$\angle BAK = \angle CAK \text{ (к.м. } AK \text{ - биссектриса)}$$

$$\angle NZC = \angle XAL \text{ (м.о. } AZ \parallel YZ)$$

$$\angle AZY = \angle NZC \text{ (к.м. вертикальные)}$$

$$\angle AYZ = \angle AZY \text{ (м.к. } \angle BAC \text{ - внешний)} = 2\angle AZY$$

$$\text{Пусть } 2\angle BAK = \angle BAC = \angle AYZ = \alpha$$

Для $\triangle AYZ$ (теорема косинусов):

$$AZ^2 = AY^2 + YZ^2 - 2AY \cdot YZ \cdot \cos \angle AYZ$$

$$\text{П.к. } \angle AYZ = \angle YZA, \text{ но } YZ \text{ - равнобедренный} \Rightarrow AY = AZ = 6$$

$$6^2 = 6^2 + 8^2 - 2 \cdot 6 \cdot 8 \cdot \cos \alpha$$

$$\frac{8}{12} = \cos \alpha$$

$$\cos \alpha = \frac{2}{3}$$

$$\text{Пусть } \angle BAC = \beta, \text{ тогда } \angle ACB = 180 - 2\alpha - \beta; \angle BKA = 180 - \alpha - \beta;$$

$$\angle ZMC = 180 - \alpha - (180 - 2\alpha - \beta) = \alpha + \beta; \angle KMA = \angle KMA = 180 - \alpha - \beta;$$

$$\text{Теорема синусов для } \triangle ZMC: \frac{MC}{\sin \alpha} = \frac{ZC}{\sin(\alpha + \beta)}$$

$$\text{Теорема синусов для } \triangle KMA: \frac{KA}{\sin \alpha} = \frac{MA}{\sin(\alpha + \beta)}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1
☐

2
☐

3
☐

4
☒

5
☐

6
☐

7
☐

СТРАНИЦА
2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Возвращаясь к уравнению:

$$\frac{MC}{BM} = \frac{BM}{BY} \cdot \frac{ZC}{BY}$$

т.к. M — середина BZ , то $MC = BM \Rightarrow \frac{ZC}{BY} = 1$

$$2C = BC - AZ = AB - AP = 12$$

$$BY = AB + AY = AB + AZ = AB + 6$$

$$AB = 6$$

Теорема косинусов для ABC :

$$BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2AB \cdot AC \cdot \cos 2\angle$$

$$\cos 2\angle = 2 \cdot \cos^2 \angle - 1 = 2 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^2 - 1 = -\frac{1}{9}$$

$$BC^2 = AB^2 + AC^2 + \frac{2}{9} AB \cdot AC$$

$$BC = 8\sqrt{6}$$

$$\boxed{\text{Ответ: } 8\sqrt{6}}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

☐ 1

☐ 2

☐ 3

☐ 4

☒ 5

☐ 6

☐ 7

СТРАНИЦА
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

5. Заметим, что из второго уравнения системы следует $x, y \geq 0$ (и.ч. присутствия $\sqrt{x}$ и $\sqrt{y}$)

~~Заметим~~ из второго же уравнения мы же следуют, что если есть пара (x, y) -решение, то (y, x) -решение. Допустим, что (x_0, y_0) -решения системы. Тогда запишем первое уравнение (учитывая, что будем указывать также решение):

$$\begin{cases} \sqrt{x_0+4} - \sqrt{3-y_0} + 5 = 2\sqrt{12-x_0-y_0} \\ \sqrt{y_0+4} - \sqrt{3-x_0} + 5 = 2\sqrt{12-y_0-x_0} \end{cases}$$

Заметим, что $3-x_0 \geq 0$ и $3-y_0 \geq 0$, а значит $0 \leq x_0, y_0 \leq 3$. Сделаем значение левой части уравнения:

$$\begin{aligned} \sqrt{x_0+4} &\geq \sqrt{0+4} \geq 2 \\ -\sqrt{3-y_0} &\geq -\sqrt{3+3} \geq 0 \\ 5 &\geq 5 \end{aligned}$$

$$\sqrt{x_0+4} - \sqrt{3-y_0} + 5 \geq 7 = \sqrt{49}$$

Сделаем значение правой:

$$2\sqrt{12-x_0-y_0} \leq 2\sqrt{12-0-0} \leq \sqrt{49}$$

И.ч. левая часть всегда больше $\sqrt{49}$, а правая меньше $\sqrt{49}$, то решений уравнения / системы не будет. Ответ 0



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1
☐

2
☐

3
☐

4
☐

5
☐

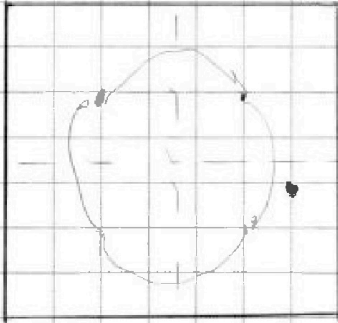
6
☒

7
☐

СТРАНИЦА
1 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

В. "Закрепим" одну/две, перфур./ точку в область 4×4
в верхней левой углу.



Допустим, на восьми паре точек
(на рисунке слева пример)

~~Из пары точек~~

Выбрав одну точку на 90° ~~дальше~~

перенесем первую точку в правый верхний угол;
на 180° - в правый нижний, на 270° - в левый нижний;

И.е. из этой пары точек мы можем получить ~~еще одну~~
другую пару, причем, что первая точка будет не в левом
верхнем углу. И наоборот: из любой пары точек можно
получить одну (и только одну) пару точек, причем, что первая
точка будет в левом верхнем углу. Из любой ~~пары~~ точек можно

получить еще одну пару точек. В итоге из всех
пар точек ~~можно~~ сформировать группу по 4 пары точек
в ряды, которые переходят друг в друга по кругу.

Соответственно можно

написать какое-то пар точек, причем, что одна из
них будет в левом верхнем углу.

Выбрав первую точку произвольным образом, с ней можно
составить



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☒ 7 ☐

СТРАНИЦА
2 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

III. а. из почти всех пар точек можно получить 4 пары при повороте. Однако если обе точки лежат на диаметре, то из данной пар можно получить 8 в вершинах квадрата на диаметре на равном расстоянии от центра, то пар получается всего 2. Точки симметричны относительно центра квадрата, то пар можно сделать всего две.

Рассмотрим пары ~~несимметричных~~ точек. Выберем произвольную точку. Из неё можно сделать $(64-1)$ пар (т.е. всего точек 64, одну занимает сама точка, другая ей симметричная). Из следующей точки $-(64-1-1)$, т.е. одну пару для каждой пары из точек $-(64-1-2)/4$ т.е.

$$\text{Всего пар} = 63 + 62 + 61 + \dots + 1 = \frac{64 \cdot 63}{2}$$

Количество пар симметричных точек образует - 4028, где 4028 - количество симметричных точек, 8 - количество симметричных точек.

Рассмотрим количество симметричных точек.

Очевидно, что первую точку можно выбрать 64 способами, вторую - 63, т.е. каждая пара рассматривается дважды, то

$$\text{Всего пар} = 32 \Rightarrow 8 = 32 \Rightarrow 4 \cdot 8 = (32 \cdot 63 - 32 \cdot 2) = 10 \cdot 8 = 32 \cdot 65$$

III. б. 0-8-4 есть исходное значение, но очевидно: (2011-500)



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1
☐

2
☐

3
☐

4
☐

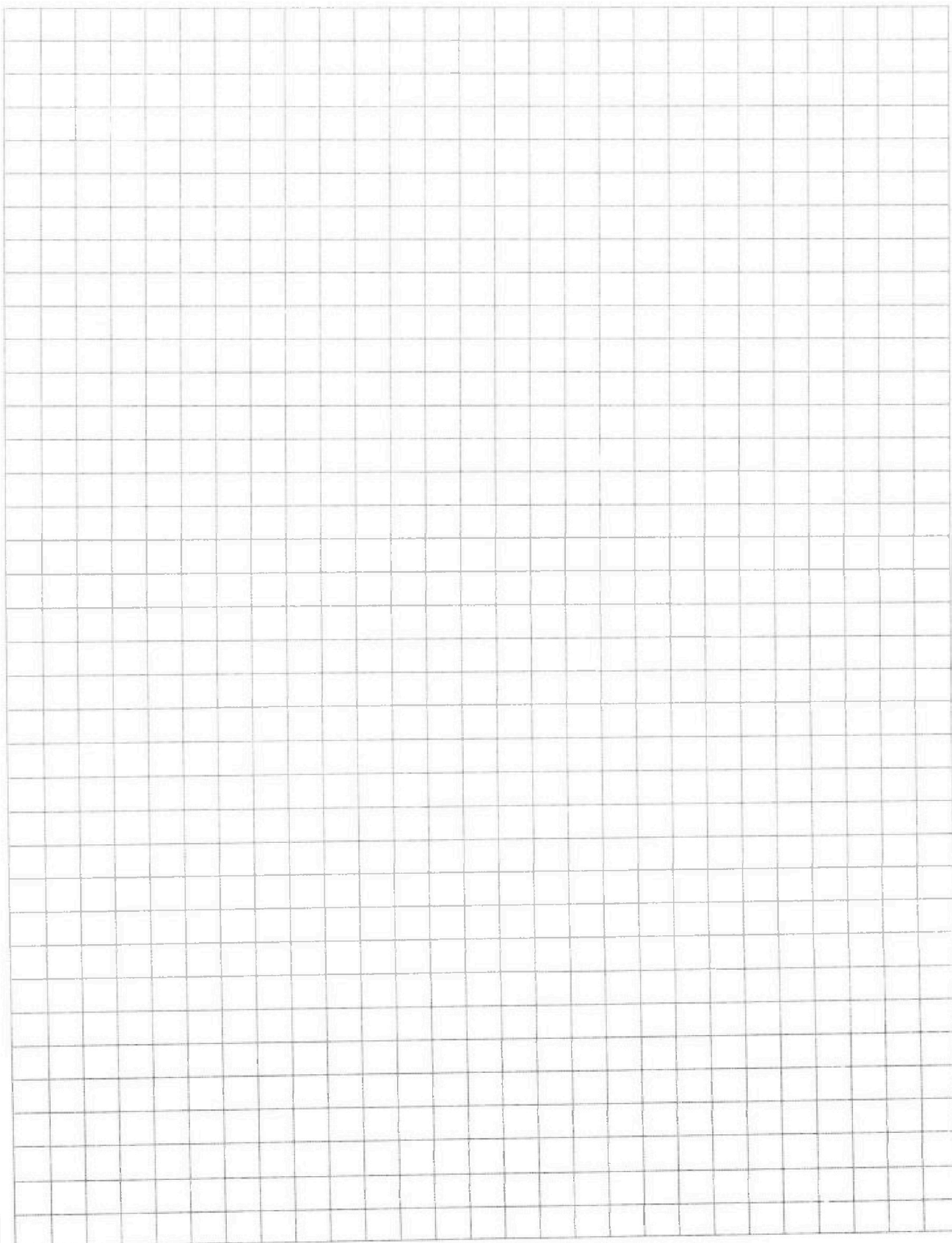
5
☐

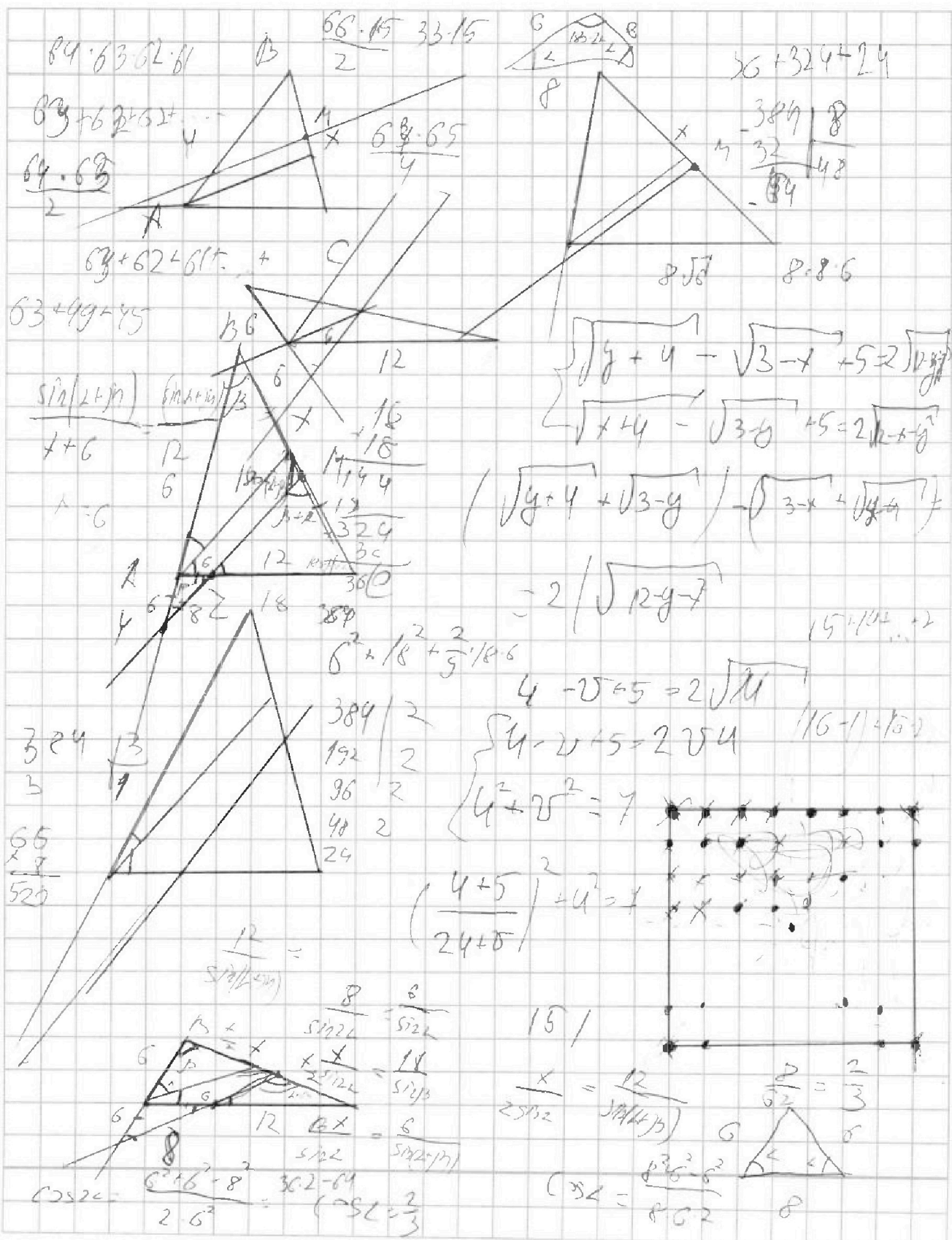
6
☐

7
☐

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!





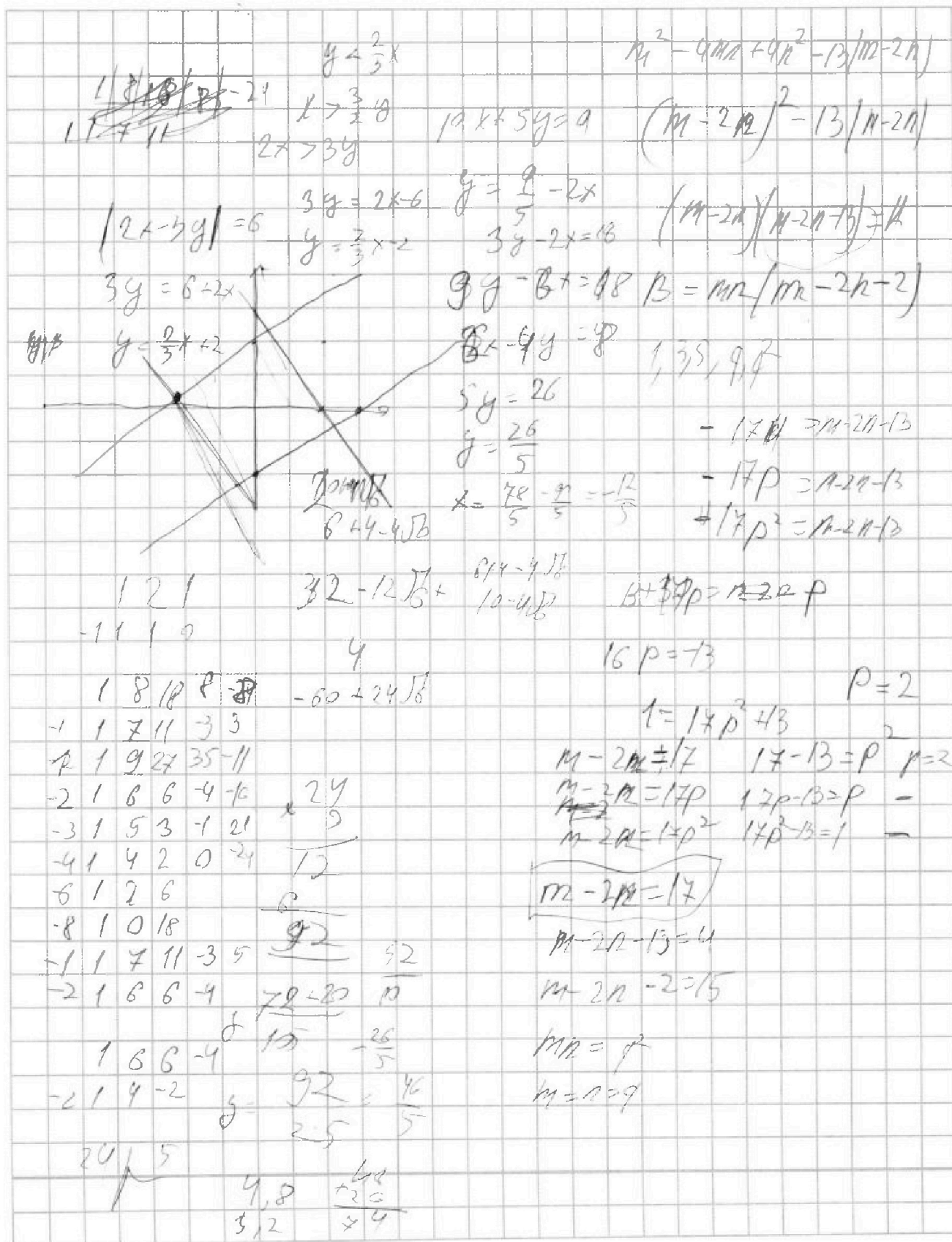


На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
из

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



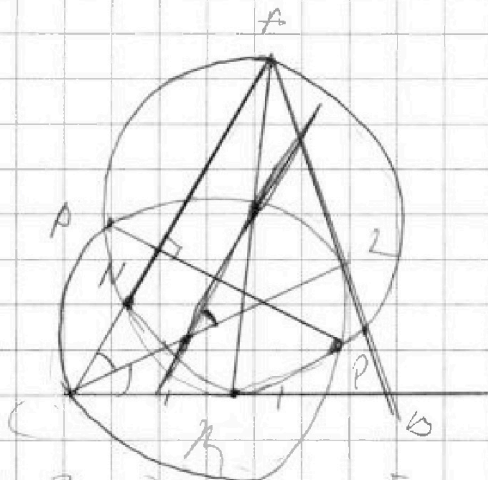


На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



$$[2; \sqrt{17}] \quad [0; \sqrt{3}]$$

$$[0; 2\sqrt{3}]$$

$$\sqrt{x+y} - \sqrt{3-y} + 5 = 2\sqrt{12-y-x}$$

$$\sqrt{44} - \sqrt{3-x} + 5 = 2\sqrt{12-x-y}$$

$$\sqrt{7} \approx 2.65$$

$$0 < x < 3$$

$$0 < y < 3$$

$$y \approx 1.2$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
из

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\sqrt{x+4} - \sqrt{3-y} + 5 = 2\sqrt{12-x-y^2}$$

$$\sqrt{y+4} - \sqrt{3-x} + 5 = 2\sqrt{12-y-x^2}$$

$$u^2 - v^2 + 5 = 2\sqrt{12}$$

$$u(x) + v(y)$$

$$12 - x - y^2 = 12 + y + x^2$$

$$x+4+3-y+25-2\sqrt{12-xy-4y+3x} + 10(\sqrt{x+4} - \sqrt{3-y}) = 4$$

$$y+4+3-x+25-2\sqrt{12-xy-4x+3y} + 10(\sqrt{y+4} - \sqrt{3-x}) = 4$$

$$(12-x-y^2)(x+4) = 12x - x^2 - y^2x + 48 - 4x - 4y^2$$

$$(12-y-x^2)(y+4) = 12y - y^2 - x^2y + 48 - 4y - 4x^2$$

$$(12-x-y^2)(3-y) = 36 - 3x - 3y^2 - 12y + xy - y^3$$

$$a = x+4$$

$$b = 3-y$$

$$x^2 - y^2 + y = x$$

$$12 - a + 4 - b^2 - y + 6b \quad (x-y)/(x+y) - (x-y)$$

$$x - a + b - b^2$$

$$(x-y)/(x+y-1)$$